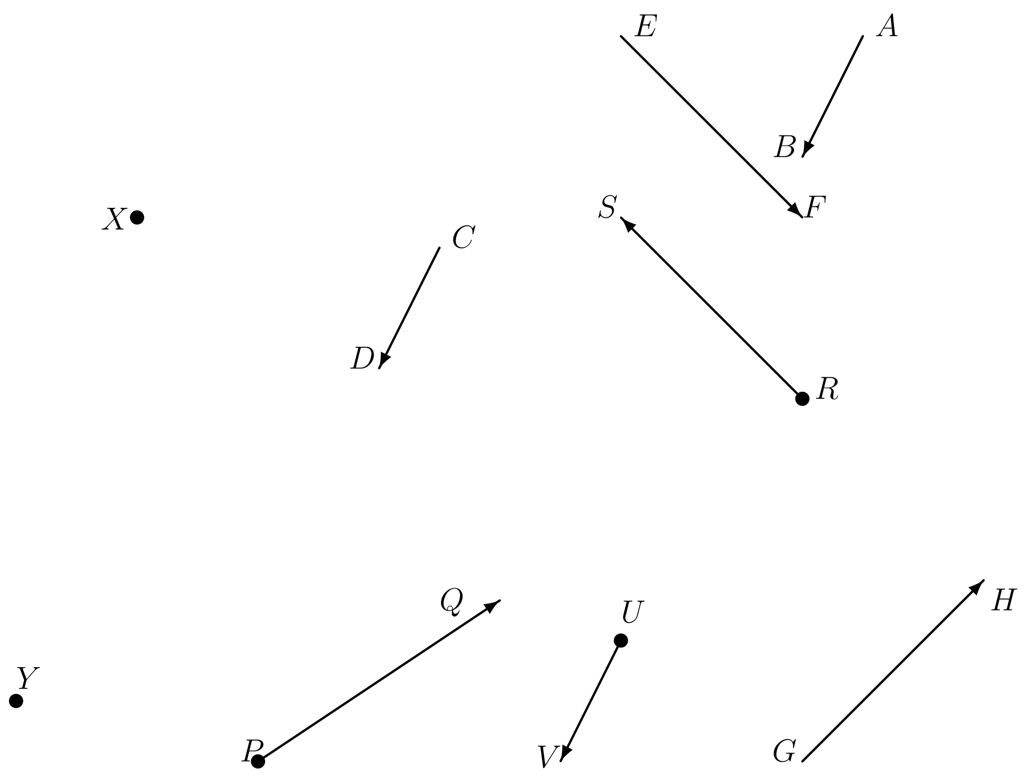
2. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

In Aufgabe 1,2,4 und 6 geht es um die Ebene der anschaulichen Geometrie. Erlaubte Hilfsmittel in 1 ud 2 sind Lineal und Geodreieck - aber nicht zum Messen von Längen oder Winkeln.

Aufgabe 1. In der Skizze seien

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{RS}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{UV}$$

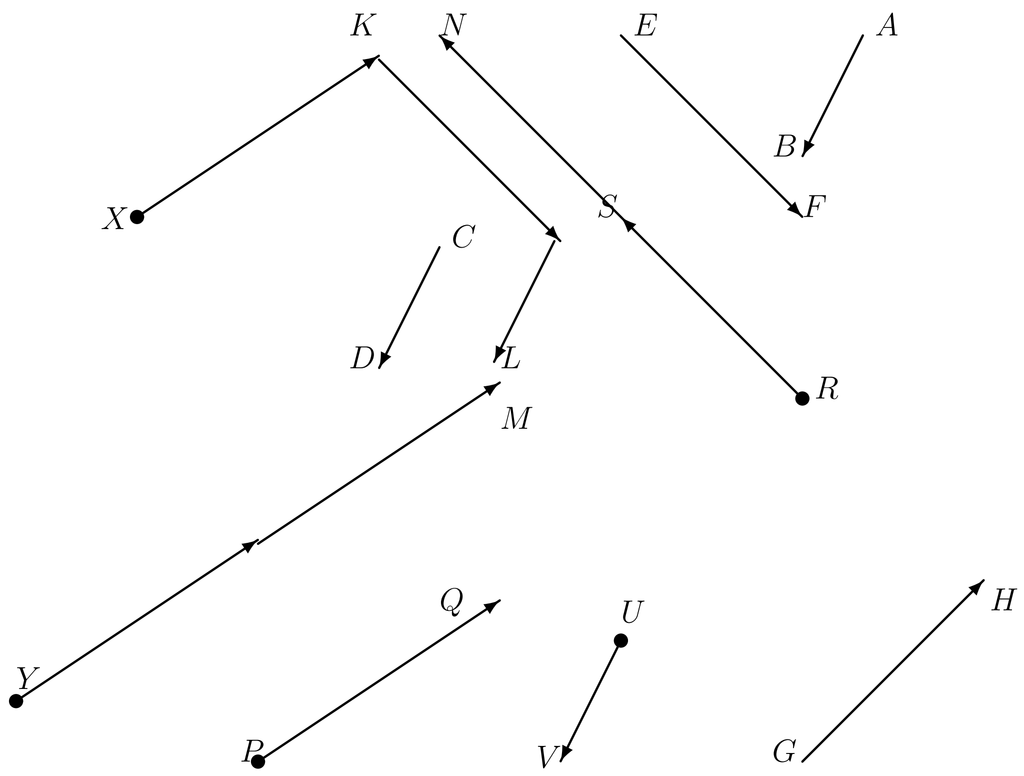
1. Prüfen Sie, welche Pfeile jeweils den gleichen Vektor bzw. den entgegengesetzten bestimmen (sollen)
2. Bestimmen Sie die Punkte $K = (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} + X))$ und $L = (-\vec{b}) + (\vec{a} + (\vec{b} + X))$
3. Bestimmen Sie die Punkte $M = \vec{a} + (\vec{a} + Y)$ und $N = (\vec{b} + \vec{b}) + R)$



Lösung.

1. $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{RS}$
2. Bestimme die Pukte so: $(\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} + X)) = \vec{c} + (-\vec{b} + (\vec{a} + X))$ und $(-\vec{b}) + (\vec{a} + (\vec{b} + X)) = \vec{a} + X$

3. Bestimme mittels $\overrightarrow{PQ}$ den Punkt $\vec{a}+Y$ und dann $\vec{a}+(\vec{a}+Y)$. Bei der zweite Konstruktion haben wir $S=\vec{b}+R$ und müssen $\vec{b}$ an S antragen. Dazu braucht man einen Repräsentanten von $\vec{b}$, der nicht auf $R\vee S$ liegt, z.B. FE. Mit diesem kann man $\vec{b}+S=(\vec{b}+\vec{b})+R$ bestimmen.



Aufgabe 2. Zeichnen Sie einen Pfeil PQ mit $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$ und bestimmen Sie repräsentierende Pfeile für jeden der folgenden Vektoren

$$\frac{1}{2}.\vec{v},\ \frac{1}{3}.\vec{v},\ \frac{2}{3}.\vec{v}.$$

Lösung.

1. Sei R_1 ein Punkt, der nicht auf der Gerade $P\vee Q$ liegt. Sei R der Punkt so, dass $\overrightarrow{PR_1}=\overrightarrow{R_1R}$. (z.B. mann kann zuerst S zeichen so, dass $\overrightarrow{PR_1}=\overrightarrow{QS}$ und dann R so, dass $\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{R_1R}$.) Die Geraden $P\vee Q$ und die Parallel zu $R\vee Q$ durch R_1 sind nicht parallel. Sei Q_1 ihr Schnittpunkt. Der Vektor $\overrightarrow{PQ_1}$ gleich $\frac{1}{2}.\vec{v}$.

2. Sei R_1 ein Punkt, der nicht auf der Gerade $P\vee Q$ liegt. Sei R_2 und R die Punkte so, dass $\overrightarrow{R_1R_2}=\overrightarrow{R_2R}=\overrightarrow{PR_1}$. Sei Q_1 der Schnittpunkt zwischen $P\vee Q$ und die Parallel zu $R\vee Q$ durch R_1. Der Vektor $\overrightarrow{PQ_1}$ gleich $\frac{1}{3}.\vec{v}$.

3. In dem oben Zeichnen, der Vektor $\overrightarrow{Q_1Q}$ gleich $\frac{2}{3}.\vec{v}$.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe geht es um die Einführung der rationalen Zahlen. Definieren Sie eine Relation $\sim$ auf der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ so, dass $(a,b)\sim(a',b')$ genau dann, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ dieselbe rationale Zahl bedeuten sollen. Das heisst genauer: so, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist (Beweis!) und durch Abstraktion aus (a, b) die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ wird. Wie ist das Produkt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ definiert und warum ist das wohldefiniert?

Lösung. Sei $\sim$ die Relation, die unten durch zwei verschieden (aber äquivalent) Methoden definiert wird.

$$\sim \overset{def}{=} \{((a,b),(a',b')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})^2 \mid ab' = a'b\}$$

$$\forall ((a,b),(a',b')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\})^2,\ (a,b) \sim (a',b') \overset{def}{\Leftrightarrow} ab' = a'b$$

Es wird unten bewiesen, dass $\sim$ eine Äquialenzrelation ist:

1. Sie ist reflexiv: Sei (a, b) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Aus $ab = ab$, folgt $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Sie ist symmetrisch: Sei (a, b) und (x, y) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ so, dass $(a, b) \sim (x, y)$. Wegen der Definition von $\sim$, daraus folgt $ay = xb$, dann $xb = ay$, und definitionsgemä $(x, y) \sim (a, b)$.
3. Sie ist transitiv: Sei (a, b), (x, y) und (u, v) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ so, dass $(a, b) \sim (x, y)$ und $(x, y) \sim (u, v)$. Wegen der Definition von $\sim$, daraus folgt $ay = xb$ und $xv = uy$. Mann multipliziert die erste Gleichung mit v und es folgt $ayv = xbv$; mann multipliziert die zweite Gleichung mit b und es folgt $xvb = uyb$; daraus folgt $ayv = uyb$, anders gesagt $y(av - ub) = 0$. Weil y nicht Null ist, folgt $av - ub = 0$, anders gesagt $av = ub$, und definitiongemä $(a, b) \sim (u, v)$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklasse von (a, b) wird $\frac{a}{b}$ geschrieben.

Jetzt sei (a, b), (x, y), (a', b') und (x', y') in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Angenommen, dass $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, gilt es $ab' = a'b$ und $xy' = x'y$. Daraus folgt $ab'xy' = a'bx'y$, und dann $(ax, by) \sim (a'x', b'y')$, anders gesagt $\frac{ax}{by} = \frac{a'x'}{b'y'}$. Dieses Gesetzt zeigt, dass die Operation $\frac{a}{b} . \frac{x}{y} \overset{def}{=} \frac{a.x}{b.y}$ wohldefiniert ist.

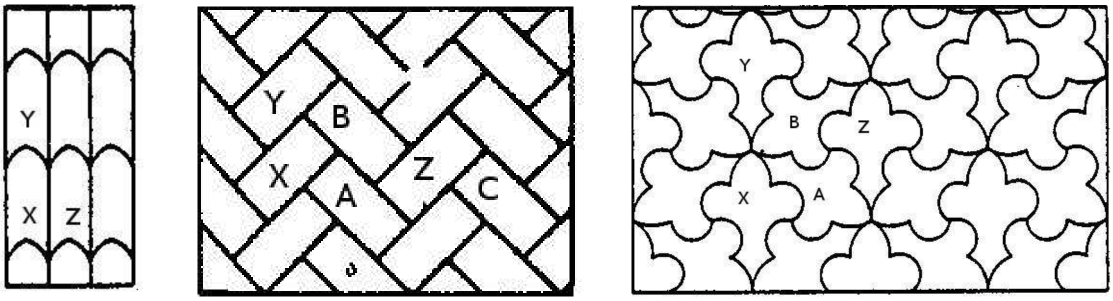
Aufgabe 4. Betrachten Sie jeweils das Muster in Fig 1a. Setzt man dieses auf die ganze Ebene fort, so erhält man ein System $\mathcal{X}$ von Teilmengen der Ebene, wobei die $X \in \mathcal{X}$ die Zellen ("Kacheln") des Musters sind. Ist T die Gruppe aller Translationen der Ebene, so ist $T_{\mathcal{X}}$ eine Untergruppe bestehend aus den Translationen, die das Muster in sich überführen, d.h. Zellen auf Zellen abbilden. Somit wirkt $T_{\mathcal{X}}$ auf $\mathcal{X}$. Bestimmen Sie jeweils die Bahnen dieser Wirkung von $T_{\mathcal{X}}$ und eine Gitterbasis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, d.h. mit

$$T_{\mathcal{X}} = \{\tau_{\vec{v}} \mid \vec{v} = z_1\vec{v}_1 + z_2\vec{v}_2,\ z_i \in \mathbb{Z}\}$$

Hier ist $\tau_{\vec{v}}(P) = \vec{v} + P$. Hinweis: Wählen Sie ein Zelle aus und untersuchen Sie, ob bzw. wie sie in möglichst nahe Zellen verschoben werden kann.

Lösung. In aller Figuren erzeugen T_{χ} die Translation, die Zelle X in Zelle Y überführt, zusammen mit der Translation, die Zelle X in Zelle Z überfürht. (Aber es gibt andere mögliche Gitterbasen.)

Fig. 1a: Sei irgenwelche zwei Zellen, es gibt eine Translation in T_{χ}, die die erste Zelle in die zweite Zelle überführt. Daraus folgt, dass es nur eine Bahn gibt.



(a) (b) (c)

Abbildung 1: Figuren vgl. Artin, Algebra 4.16

Fig. 1b: Es gibt zwei Bahnen. Es gibt nmlich keine Translation, die Zelle X in Zelle A überführt. Eine Bahn wird z.B. durch Zelle X erzeugt, und die andere durch A.

Fig. 1c: Es gibt drei Bahnen, die jeweils durch Zellen X, A und B erzeugt werden.

Aufgabe 5. Leiten Sie aus (E0'-4) her: Ist g eine Gerade und $\vec{v}$ ein Vektor, so ist $\{\vec{v}+X \mid X \in g\}$ eine zu g parallele Gerade. Hinweis: Wählen Sie $P \in g$ fest und betrachten Sie die Parallele h zu g durch $\vec{v}+P$.

Lösung. Wähle $P \in g$ fest und h als die Parallele zu g durch $R = \vec{v}+P$. Sei $Q \in g$. Nach Konstruktion von $S = \vec{V}+Q$ mittels des Repräsentanten PR von $\vec{v}$ haben wir, das $k = R \vee S \parallel g$, also $k = h$ wegen der Eindeutigkeit der Parallelen. Wir betrachten nun die umgekehrte Situation mit $R = \vec{v}+P \in h$ gegeben und dem Vektor $-\vec{v}$. Dann $-\vec{v}+R = P$ und zu $S \in h$ wie eben $-\vec{v}+S \in g$. Somit $S = \vec{v}+(-\vec{v}+S)$ von der gewünschten Form.

Aufgabe 6. Fortsetzung von Aufgabe 4 mit Fig 1b and 1c.

Aufgabe 7. Fortsetzung von Aufgabe 3 mit Addition und Inversion.

Lösung.

Sei (a,b), (x,y), (a',b') und (x',y') in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Angenommen, dass $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, gilt es $ab' = a'b$ und $xy' = x'y$. Daraus folgt $yy'.ab' = yy'.a'b$ und $bb'.xy' = bb'.x'y$. Dann $b'y'(ay+xb) = by(a'y'+x'b')$ und definitionsgemä $\frac{ay+xb}{by} = \frac{a'y'+x'b'}{b'y'}$. Dieses Gesetzt zeigt, dass die Operation $\frac{a}{b}+\frac{x}{y} \stackrel{def}{=} \frac{ay+xb}{b.y}$ wohldefiniert ist.

Sei (a,b) und (x,y) in $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Angenommen, dass $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, gilt es $ay = xb$. Daraus folgt $bx = ya$ und definitionsgemä $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$. Dieses Gesetzt zeigt, dass die Operation $(\frac{a}{b})^{-1} \stackrel{def}{=} \frac{b}{a}$ wohldefiniert ist, wenn a nicht gleich 0 ist.