Prof. Dr. Christian Herrmann
Dr. Martin Hofmann
Michael Marz

Technische Hochschule Darmstadt
Fachbereich Mathematik

WS 95/96
29. November 1995

Lösungshinweise zum 4. Tutorium

Lineare *Algebra I*

Lineare Algebra I

für M, HLM, Inf, WInf, GWL

(T 8)

Das Viereck wird in vier gleichschenklige Dreiecke zerlegt. Somit ist $\angle(MCB) = \angle(CBM)$ und analog für die anderen Winkel. Da die Winkelsumme im Viereck $360°$ ist, können wir somit schreiben

$$2(\angle(MCB) + \angle(DCM) + \angle(DAM) + \angle(MAB)) = 360°$$

also $\angle(DCB) + \angle(DAB) = 180°$.

(T 9)

Wir wählen einen Punkt D auf der Kreislinie unterhalb der Sehne CA. Mit dem Satz vom Kreisviereck ist jeder Umfangswinkel gleich $180° - \angle(CDA)$.

(T 10)

Wir spiegeln das Dreieck am Durchmesser. So ergibt sich ein Kreisviereck mit zwei gleichen Winkeln, die sich zu $180°$ addieren. Der Winkel selber muß daher $90°$ betragen.

Prof. Dr. Christian Herrmann
Dr. Martin Hofmann
Michael Marz

Technische Hochschule Darmstadt
Fachbereich Mathematik

WS 95/96
13. Dezember 1995

Lösungshinweise zum 6. Tutorium

Lineare *Algebra I*

Lineare Algebra I

für M, HLM, Inf, WInf, GWL

(T 16)

a) Wäre $\varphi(P) \neq C$, so wäre die Gerade $\varphi(P)C$ parallel sowohl zu AP als auch zu BP. Damit liegt aber P auf der Geraden AB. Ein Widerspruch.

b) Es bleibt zu zeigen, daß auch für $Q \in AB$ gilt $\varphi(Q) = C$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \notin AB$ und mit Teil 1) wissen wir $\varphi(P) = \varphi(A) = C$. Da $Q \notin AP$ können wir Teil 1) mit B ersetzt durch P verwenden und erhalten $\varphi(Q) = C$.

(T 17)

Es sei $\varphi(A) = A$ und $\varphi(B) = B$. Wenn $C \notin AB$, dann ist $A\varphi(C)$ parallel zu AC, mithin liegt $\varphi(C)$ auf der Geraden AC. Analog findet man $\varphi(C) \in BC$. Also ist $\varphi(C) = C$. Den Fall $C \in AB$ handelt man genau wie in der vorhergangenen Aufgabe durch Betrachtung eines beliebigen Punktes $Q \notin AB$ ab.

(T 18)

Wir wählen einen Punkt A und setzen $\vec{v} := \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Es bleibt zu zeigen, daß für beliebigen Punkt $B \neq A$ gilt $\varphi(B) = \overrightarrow{A\varphi(A)} + B$. Dazu müssen wir zeigen, daß $AB\varphi(A)\varphi(B)$ ein Parallelogramm ist. Da φ Dehnung ist, ist AB parallel zu $\varphi(A)\varphi(B)$ (Man beachte, daß $\varphi(A) = \varphi(B)$ wegen der Fixpunktfreiheit ausgeschlossen ist.). Wenn sich nun $A\varphi(A)$ und $B\varphi(B)$ in einem Punkt C schneiden, so ist $\varphi(B)\varphi(C)$ parallel zu BC, also liegt $\varphi(C)$ auf der Geraden BC. Ebenso argumentiert man, daß $\varphi(C)$ auf der Geraden AC liegt und somit ist $C = \varphi(C)$ im Widerspruch zur Fixpunktfreiheit.

(T 19)

Sei φ Dehnung mit Fixpunkt O. Wir wählen $P \neq O$ beliebig und setzen $\lambda := \frac{\overrightarrow{O\varphi(P)}}{\overrightarrow{OP}}$. Nun gilt $\varphi(A) = \lambda\overrightarrow{OA} + O$ für alle A, denn nach dem Argument in der Aufgabe 17 liegt $\varphi(A)$ auf der Geraden OA und, da φ Dehnung ist, auf der Parallelen zu AP durch $\varphi(P)$. Dadurch ist $\varphi(P)$ eindeutig bestimmt und der Punkt $\lambda\overrightarrow{OA} + O$, der auch diese Eigenschaften hat, ist mit $\varphi(P)$ identisch.

(T 20)

Die gesuchte Streckung ist definiert durch

$$\varphi(X) = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OX} + O$$

(T 21)

Seien λ und μ die Verhältnisse der Streckungen φ und ψ. Durch Einsetzen erhält man $\varphi \circ \psi(X) = \lambda\mu\overrightarrow{OX} + O$. Die verlangte Aussage folgt mit der Kommutativität der Multiplikation von Skalaren.

Nach Aufgabe 20 gibt es eine Streckung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(E) = F$, sowie eine Streckung ψ mit $\psi(B) = C$ und $\psi(D) = E$. $C = \psi(\varphi(A))$ und $F = \varphi(\psi(D)) = \psi(\varphi(D))$ und somit ist AD parallel zu CF, da $\psi \circ \varphi$ Dehnung ist.

Man hat hier eigentlich nichts gewonnen, da man ja die Kommutativität von S mit Hilfe des Satzes von Pappos gezeigt hat. Man weiß jetzt aber immerhin, daß „Pappos“ und die Kommutativität äquivalent sind.