12. Lösung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1.

1. Sei $ABCD$ ein Quadrat und ϕ eine affine Abbildung der Ebene so, dass das $\phi(A)\phi(B)\phi(C)\phi(D)$ ein zu $ABCD$ kongruentes Quadrat ist. Begründen Sie, dass ϕ eine Bewegung der Ebene ist.

2. Sei ABC ein Dreieck und ϕ eine affine Abbildung der Ebene so, dass das $\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ ein zu ABC kongruentes Dreieck ist. Begründen Sie, dass ϕ eine Bewegung der Ebene ist.

Lösung.

1. Es ist notwendig zu zeigen, dass die zugehörige lineare Abbildung ϕ_l orthogonal ist. So ist es notwendig zu zeigen, dass es eine ON-Basis gibt, dessen Bild durch ϕ_l auch ein ON-Basis ist. Man schreibt einfach X' statt $\phi(X)$ für alle Punkte X. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}$ sind orthogonal wegen der Annahme. Sei s die Länge die Seite des Quadrats. Sei $E = \frac{1}{l}\overrightarrow{AB}+A$ und $F = \frac{1}{l}\overrightarrow{AD}+A$. Es gilt, dass $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ eine ON-Basis ist. Da ϕ affine ist, gilt $\overrightarrow{A'E'} = \frac{1}{l}\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'F'} = \frac{1}{l}\overrightarrow{A'D'}$. Somit ist $\overrightarrow{A'E'}, \overrightarrow{A'F'}$ auch eine ON-Basis.

2. Sei H auf $A \vee C$, sodass $B \vee H \perp A \vee C$. Man schreibt einfach X' statt $\phi(X)$ für alle Punkte X. Da ϕ affine ist, gilt $\frac{AH}{AC} = \frac{A'H'}{A'C'}$. Daraus folgt $AH = A'H'$, weil die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent sind. Die Dreiecke ABH und $A'B'H'$ sind auch kongruent, weil die Winkel $\angle BAH$ und $\angle B'A'H'$ kongruent sind. Es folgt, dass das Bild von der orthogonalen Basis $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ auch eine orthogonal Basis ist. Man kann wie vorher schließen.

In Aufgabe 2 und 3 geht es um die Komposition von Abbildungen: welchen Typ diese Komposition haben kann, wie das von den Daten (Zentrum, Achse, Verschiebungsvektor, Streckfaktor) abhängt, und wie man die Daten der zusammengesezten Abbildung aus den Daten der einzelnen Abbildungen erhält. Alles das ist gemeint mit "bestimme".

Aufgabe 2.

1. Seien $\tau_1 = \tau_{\vec{v}_1}$ und $\tau_2 = \tau_{\vec{v}_2}$ zwei Parallelverschiebungen. Bestimme $\tau_2 \circ \tau_1$.

2. Seien ρ eine Drehung und σ eine Spiegelung. Bestimme $\rho \circ \sigma$. Gibt es eine Drehung ρ' und eine Spiegelung σ', sodass $\rho \circ \sigma = \sigma' \circ \rho'$?

3. Seien ρ_1 und ρ_2 zwei Drehungen. Bestimme $\rho_2 \circ \rho_1$.

Lösung.

1. $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_{\vec{v}_1+\vec{v}_2}$

2. Keine Lösung ist hier abgegeben.

3. Man betrachtet den Fall, wenn die Winkel nicht trivial sind und die Zentrums ungleich sind. Die Abbildung $\rho_2 \circ \rho_1$ ist eine Bewegung, weil sie die Hintereinanderausfürhung zweier Bewegungen ist. Seien O_1 und O_2 die Zentrums der Drehungen. Sei O der einzige Punkt, sodass $OO_1 = O\rho_2 \circ \rho_1(O_1)$ und $OO_2 = O\rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}(O_2)$. Der Punkt O ist ein Fixpunkt von $\rho_2 \circ \rho_1$, die nicht die identische Abbildung ist. Es gibt auch keine Fixgerade, somit muss $\rho_2 \circ \rho_1$ eine Drehung um das Zentrum O sein.

Aufgabe 3.

1. Seien τ eine Parallelverschiebung und ϕ eine Drehstreckung. Bestimme $\tau \circ \phi$.

2. Sei σ_2 eine Spiegelung, und κ eine Klappstreckung, d.h. $\kappa = \zeta \circ \sigma_1$ wobei ζ zentrsiche Streckung mit Zentrum auf der Achse von σ_1. Ist $\sigma_2 \circ \kappa$ eine Translation, falls die Achsen von σ_1 und σ_2 parallel sind? Bestimme $\sigma_2 \circ \kappa$.

Aufgabe 4. Seien $\alpha : A, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\beta : B, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ zwei orthonormale Koordinatensyteme und es gelte

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{a}_1 + \vec{b}_2 \\ \vec{b}_1 &= \tfrac{-1}{2}\vec{a}_2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 &= \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_2 \end{aligned}$$

Sei σ die Spiegelung um Gerade durch B mit Richtungsvektor $\vec{b}_2$).

1. Bestimme die affine Matrix, die σ bezüglich β in homogenen Koordinaten beschreibt.

2. Bestimme die homogenen Koordinatentransformationsmatrien ${}_\alpha\tilde{T}_\beta$ und ${}_\beta\tilde{T}_\alpha$.

3. Bestimme die affine Matrix, die σ bezüglich α in homogenen Koordinaten beschreibt.

1. **Lösung.**

$$M_\sigma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Da $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_2$, es gilt

$${}_\alpha\tilde{T}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

und ${}_\beta\tilde{T}_\alpha = ({}_\alpha\tilde{T}_\beta)^{-1}$

3. $M_\sigma^\alpha = {}_\alpha\tilde{T}_\beta M_\sigma^\beta {}_\beta\tilde{T}_\alpha$