11. Übung Geometrie für Lehramt

Aufgabe 1.

Sei $\alpha : O, \vec{a}, \vec{b}$ ein orthonormales Koordinatensystem der Ebene und sei $\beta : P, \vec{c}, \vec{d}$ das Koordinatensystem mit

$$P = 2\vec{a} + O \qquad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a} - \vec{b}) \qquad \vec{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a} + \vec{b})$$

1. Ist β orthonormal? Warum bzw. warum nicht?
2. Bestimme die homogene Koordinatentransformationsmatrix ${}_\alpha\tilde{T}_\beta$
3. Bestimme die Koordinaten des Punktes $R = -2\vec{c} + \vec{d} + P$ im System α
4. Bestimme die Inverse von ${}_\alpha\tilde{T}_\beta$
5. Bestimme die homogenen Koordinaten des folgenden Punktes im System β?

$$Q := \vec{a} + 2\vec{b} + O \qquad .$$

Lösung.

1. Ja. Man rechnet nach, dass die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ Länge 1 haben und aufeiander senkrecht stehen.
2. $$ {}_\alpha\tilde{T}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
3. $$R^{\tilde{\alpha}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta R^{\tilde{\beta}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
4. Wegen 1 ist $A =_\alpha T_\beta$ eine orthogonale Matrix, also die transponierte A^t ihre Inverse. Somit erhält man $$ {}_\alpha\tilde{T}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ -A^{-1}\mathbf{t} & A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
5. $$Q^{\tilde{\beta}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta^{-1} Q^{\tilde{\alpha}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad .$$

Aufgabe 2. Sei $\alpha : O_\alpha, \vec{a}, \vec{b}$ ein orthonormales Koordinatensystem der Ebene. Beschreibe die folgenden affinen Abbildungen durch affine Matrizen bezüglich homogener Koordinaten bzgl. α

1. Die Parallelverschiebung durch den Vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$.
2. Die Achsenspiegelung an der Geraden durch die Punkte $\vec{a} + O$ und $\vec{a} + \vec{b} + O$.
3. Die $30°$-Drehung, deren Zentrum der Punkt $O + \vec{a}$ ist. ($\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.)

Lösung.

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30° & -\sin 30° \\ 0 & \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos 30° & \cos 30° & -\sin 30° \\ -\sin 30° & \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Was erhält man als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen in der Ebene? Begründung?

Lösung.

Aufgabe 4. Sei σ eine zentrische Streckung mit Zentrum O. Begründen Sie, dass gilt für alle A, B gilt
$$\angle AOB \equiv \angle \sigma(A) O \sigma(B)$$

Lösung.

Aufgabe 5. Sei ABC ein Dreieck und ϕ eine affine Abbildung der Ebene so, dass das $\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ ein zu ABC kongruentes Dreieck ist. Begründen Sie, dass ϕ eine Bewegung der Ebene ist.

Lösung.