10. Übung Geometrie für Lehramt

Aufgabe 1. Sei $\alpha : O, \vec{a}, \vec{b}$ Koordinatensystem der Ebene und $P = 2\vec{a} + 3\vec{b} + O$. Bestimme die homogenen Koordinaten von P.

Lösung. Die homogenen Koordinaten sind $(2, 3, 1)$.

Aufgabe 2. Im Raum sei eine Kugel mit Zentrum O gegeben. Sie $\mathbb{S}$ die Kugeloberfl ache.

$$\mathbb{P} = \{\{P, P'\} \mid P, P' \in \mathbb{S}, \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}\}$$

Sei $\mathbb{G}$ die Menge der Großkreise auf $\mathbb{S}$. Sei $\{P, P'\}$ inzident mit dem Großkreis k genau dann, wenn $\{P, P'\} \subseteq k$.

1. Zeigen Sie, dass man so eine projektive Ebene erhält
2. Wählen Sie einen Großkreis k_∞ und geben Sie anschauliche Modelle an, die zu der affinen Ebene $\mathbb{P} \setminus k_\infty$ isomorph sind.

Lösung.

- Auf jeden großen Kreis gibt es unendlische viele Paar Punkte, deshalb gibt es mindestens drei Paar Punkte.
- Durch zwei verschiedene Paar Punkte geht genau ein großer Kreis.
- Je zwei verschiedene großen Kreise haben genau ein Paar Punkte gemeinsam.
- Punkte $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ und ein beliebige Punkt, der nicht mit je zwei vorige Punkte kolinear ist.

Aufgabe 3 Sei $\alpha : O, \vec{a}, \vec{b}$ Koordinatensystem der Ebene, $P = -\vec{a} + O$ und $Q = 2\vec{a} - \vec{b} + O$. Bestimme für die Gerade g durch P und Q eine Parameterbeschreibung in homogenen Koordinaten.

Lösung. $P \vee Q = \{P + r\overrightarrow{QP} \mid r \in \mathbb{R}\}$. Also ist $(-1, 0) + r(3, -1)$ eine Parameterdarstellung von $P \vee Q$.

Aufgabe 4 Sei α ein Koordinatensytem des 3-D Raumes. Betrachte die Ebene ϵ, dessen Parameterdarstellung wie unten ist.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Seien P, Q, R, Z die Punkte, sodass

$$P^\alpha = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad Q^\alpha = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad R^\alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad Z^\alpha = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

Sei π die Projektion auf die Ebene ϵ mit Zentrum Z.

1. Berechne $\pi(P)$.
2. Sei l die Gerade durch Q und R. Berechne eine Paramterdarstellung für $\pi(l)$

Lösung.

1. $\pi(P)$ is der Schnittpunkt zwischen ϵ und $P \vee Z$. Daraus folgt, dass es s und t gibt, sodass $\pi(P)^\alpha = (1,0,0) + s(1,1,0) + t(1,0,1)$. Es gibt auch r, sodass $\pi(P)^\alpha = (0,2,2) + r(1,0,-1)$. Daraus folgt,

$$\begin{cases} 1+s+t & = r \\ s & = 2 \\ t & = 2-r \end{cases}$$

Aus die zwei ersten Zeilen folgt $3 + t = r$. Wegen der letzten Zeile, daraus folgt $r = \frac{2}{5}$. Somit $\pi(P)^\alpha = (0,2,2) + \frac{2}{5}(1,0,-1) = (\frac{2}{5}, 2, \frac{7}{5})$.

2. $\pi(l)$ ist die Schnitt Gerade zwischen ϵ und die Ebene $Q \vee R \vee Z$, dessen eine Parameterdarstellung z.B. $(0,2,2) + q(1,2,4) + r(-1,1,1)$ ist. So wird ein beliebiger Punkt von $\pi(l)$ durch $(0,2,2)+q(1,2,4)+r(-1,1,1)$ oder $(1,0,0) + s(1,1,0) + t(1,0,1)$ beschrieben. Daraus folgt

$$\begin{cases} q-r & = 1+s+t \\ 2+2q+r & = s \\ 2+4q+r & = t \end{cases}$$

In der ersten Gleichung ersetz man s und t mit den zwei letzten Gleichungen. Daraus folgt $q-r = 1+2+2q+r+2+4q+r$, d.h. $5+5q+3r = 0$. Somit ist $(0,2,2)+q(1,2,4)-\frac{5}{3}(1+q)(-1,1,1)$, d.h. $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})+u(8,1,7)$, eine Parameterdarstellung von $\pi(l)$.

Aufgabe 5. In der euklidischen Ebene sei $\vec{n} \neq \vec{0}$, O ein Punkt, und $c \in K$. Zeige

1. $g = \{\vec{x} + O \mid \langle n \mid x \rangle = c\}$ ist eine Gerade

2. Ist $\|\vec{n}\} = 1$, so ist c der Abstand der Geraden g von O, d.h. $|c| = \min\{|PO| \mid P \in g\}$

3. Ist $\|\vec{n}\| = 1$ und $c \geq 0$ (dann heißt die Gleichung $\langle n \mid x \rangle = c$ die *Hessesche Normalenform* für g) , so ist für jeden Punkt $Q = \vec{y} + O$ der Abstand von g bestimmt als $|\langle n \mid y \rangle - c|$. Welche geometrische Bedeutung hat das Vorzeichen von $\langle n \mid y \rangle - c$?

Lösung.

1. $\vec{n}^\alpha = (n_1, n_2, n_3)$. Eine Gleichung fr g ist $n_1 x + n_2 y + n_3 z = c$, die die Gleichung einer Gerade ist.

2. $\langle \vec{n} \mid c\vec{n} \rangle = c$ und $O + c\vec{n}$ ist der nhste Punkt von g von 0.

3. Wie oben, mit einer Translation durch Vektor $\vec{y}$.

Aufgabe 6. Bezüglich eines Koordinatensytems α der Ebene seinen der Vektor $\vec{b}$ und die Punkte P, Q durch ihre Koordinaten gegeben:

$$\vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}^\alpha = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei g die Gerade mit der Parameterdarstellung $\{\lambda \vec{b} + Q : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Gib die Hesseche Normalform von g an, und berechne den Abstand von g zum Punkt P und den Fußpunkt des Lotes durch P auf g.

2. Sei h die gerade gegeben durch $h = \{x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + O \mid 3x_1 - 2x_2 = 24\}$. Gib h in ihrer Parameterdrastellung an und berechne den Shnittpunkt mit g. In welchem Winkel Schneiden sie sich?

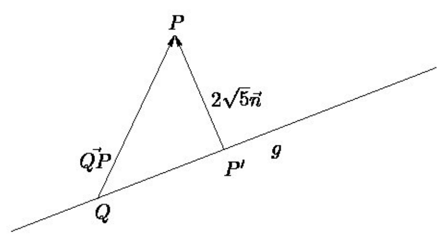
a) Wir suchen einen Vektor $\vec{n}$ der Länge 1, der senkrecht auf $\vec{b}$ steht; mit $\vec{n}^\alpha = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ folgt aus $< \vec{n} \mid \vec{b} >= 0$ und $< \vec{n} \mid \vec{n} >= 1$, $n_1 = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ und $n_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Aus $Q = \vec{q} + O$ und $< \vec{q} \mid \vec{n} >= \frac{2}{5}\sqrt{5}$ erhalten wir die Hessesche Normalform

$$g = \{\vec{x} \mid < \vec{x} \mid \vec{n} >= \frac{2}{5}\sqrt{5}\}.$$

Wir berechnen den Abstand von P und g über die Komponente des Vektors $\vec{QP}$ in Richtung $\vec{n}$:

$$< \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} > \vec{n} = -2\sqrt{5}\vec{n}.$$

Damit ist der Abstand von P zu g $2\sqrt{5}$ Längeneinheiten und der Fußpunkt P' des Lots durch P auf g ist $(P')^\alpha = P^\alpha + 2\sqrt{5}\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



b) Wir bringen h in Parameterdarstellung: Der Punkt R mit Koordinaten $R^\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt auf h. Durch Ausprobieren finden wir einen Richtungsvektor $\vec{v}$, der senkrecht auf dem Normalenvektor $(\vec{n}_h)^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht. Wir setzen $\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und erhalten die Parameterdarstellung $h = \{\mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$. Um den Schnittpunkt der Geraden zu berechnen, müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\lambda_S + 1 &= 2\mu_S + 6 \\ (-2)\lambda_S + 0 &= 3\mu_S - 3 \end{aligned}$$

lösen. Es gilt $\lambda_S = 3$, $\mu_S = -1$ und der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $S^\alpha = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Um den Winkel γ zwischen $\vec{b}$ und $\vec{v}$ zu bestimmen, normieren wir zuerst beide Vektoren und erhalten $(\vec{b}')^\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $(\vec{v}')^\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $\cos\gamma = < \vec{b}' \mid \vec{v}' >= \frac{-4}{\sqrt{65}}$ und $\arccos(\frac{-4}{\sqrt{65}}) \approx 6.26°$.