1. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Wir haben die folgenden Axiome:
(E0) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 2 verschiedene Punkte
(E0') Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte
(E1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade
(E2) Zu jeder Geraden g und Punkt P gibt es genau eine Parallele durch P
(E3) Es gibt 3 nicht kollineare Punkte
(E4) Aus $PQ \approx UV \approx RS$, $P \neq Q$ und $P \vee Q \neq R \vee S$ folgt $PQ \approx RS$.
Hier bedeutet $PQ \approx RS$, dass $P = Q$ und $R = S$ oder $P = R$ und $Q = S$ oder alle 4 paarweise verschieden und $P \vee Q \parallel R \vee S$ und $P\ veeR \parallel Q \vee S$.

Aufgabe 1. Inwieweit sind die Axiome (E0-E4) in den folgenden beiden Beispielen erfüllt?

a Gegeben sei ein Tetraeder. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Eckpunkte, $\mathbb{G}$ die Menge der Kanten und I die Inzidenz-Relation 'liegt auf'.

b Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Punkte P auf der Oberfläche der Einheitskugel im Raum, $\mathbb{G}$ die Menge der Großkreise g, d.h. der Schnitte von $\mathbb{P}$ mit Ebenen durch das Zentrum der Kugel. Sei $P\,I\,g \Leftrightarrow P \in g$.

Lösung.

a Auf jeder Geraden liegen genau 2 Punkte. Damit gilt (E0) aber nicht (E0'). Je zwei Ecken spannen genau eine Kante auf: also (E1). Jede Kante hat genau eine Parallele: die "gegenüberliegende" Kante - und diese enthält gerade die beiden anderen Punkte. Also (E2) und (E4). Es gilt sogar: keine 3 Punkte sind kollinear. Also (E3).

b (E0) und (E0'): ja. (E1) nur zur Hälfte: Zu einem Antipodenpaar $Q = -P$ gibt es unendlich viele Großkreise, ansonsten genau einen. (E2) geht voll daneben, 2 verschiedene Großkreise haben genau 2 (antipodische) Punkte gemeinsam. Folglich gilt (E4) trivialerweise. (E3) gilt offensichtlich.

Aufgabe 2. Leiten Sie aus (E0) und (E1-3) her:

a Sind $g \parallel h$ und $k \nparallel g$ so $k \nparallel h$ und es gilt $g \cap k = h \cap k$ genau dann wenn $g = h$.

b Ist P, Q, R ein Dreieck, so sind die Geraden $P \vee Q$, $P \vee R$, $Q \vee R$ paarweise verschieden und keine 2 parallel.

c Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade nicht durch diesen Punkt

Lösung

a Wäre $k \parallel h$ so auch $k \parallel g$ wegen der Transitivität. Also $k \nparallel h$. Somit $k \cap g = P$ und $k \cap h = Q$. Ist $P = Q$ so $g = h$ da $P \in g \cap h$ und $g \parallel h$.

b Angenommen $P \vee Q = P \vee R$, Dann sind P, Q, R kollinear, Widerspruch. Angenommen $P \vee Q \parallel P \vee R$. Da P gemeinsamer Punkt ist, folgt $P \vee Q = P \vee R$, Widerspruch.

c Nach (E3) gibt es ein Dreieck P, Q, R. Ist $X \in \{P, Q, R\}$ so nach a) Schnittpunkt von genau 2 der 3 Geraden. Andernfalls X auf höchstens einer wegen (A1) und b)

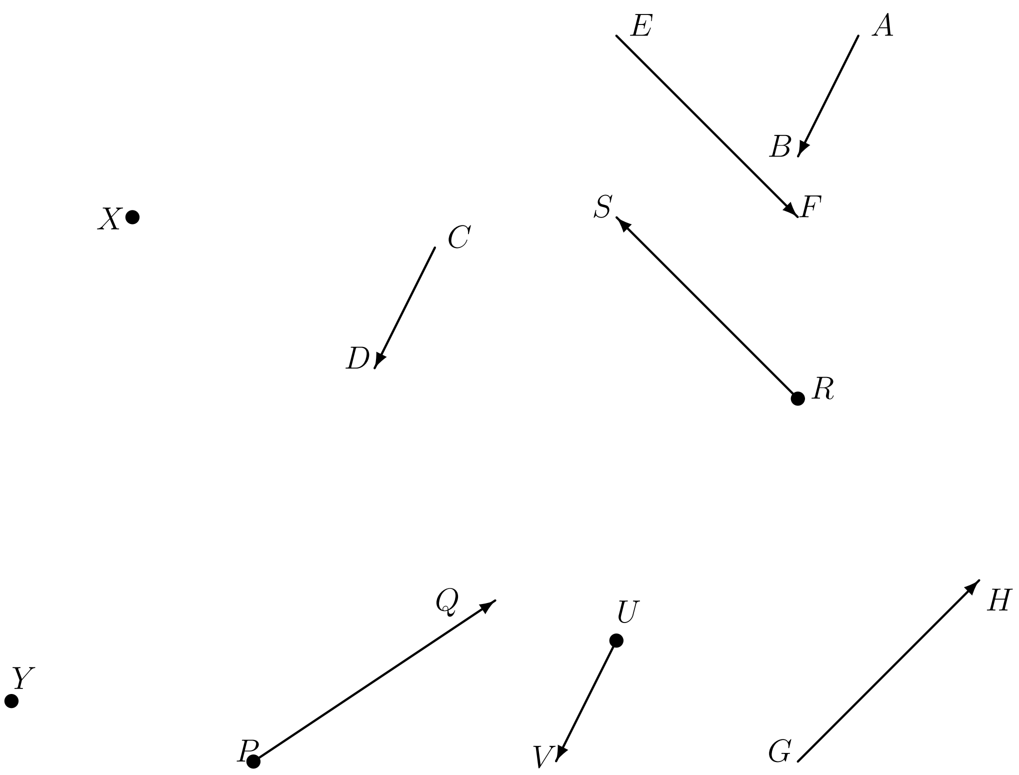
Aufgabe 3. Erlaubte Hilfsmittel sind Lineal und Geodreieck - aber nicht zum Messen von Längen oder Winkeln. In der Skizze seien

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{RS}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{UV}$$

a Prüfen Sie, welche Pfeile jeweils den gleichen Vektor bzw. den entgegengesetzten bestimmen (sollen)

b Bestimmen Sie die Punkte $K = (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} + X))$ und $L = (-\vec{b}) + (\vec{a} + (\vec{b} + X))$

c Bestimmen Sie die Punkte $M = \vec{a} + (\vec{a} + Y)$ und $N = (\vec{b} + \vec{b}) + R)$

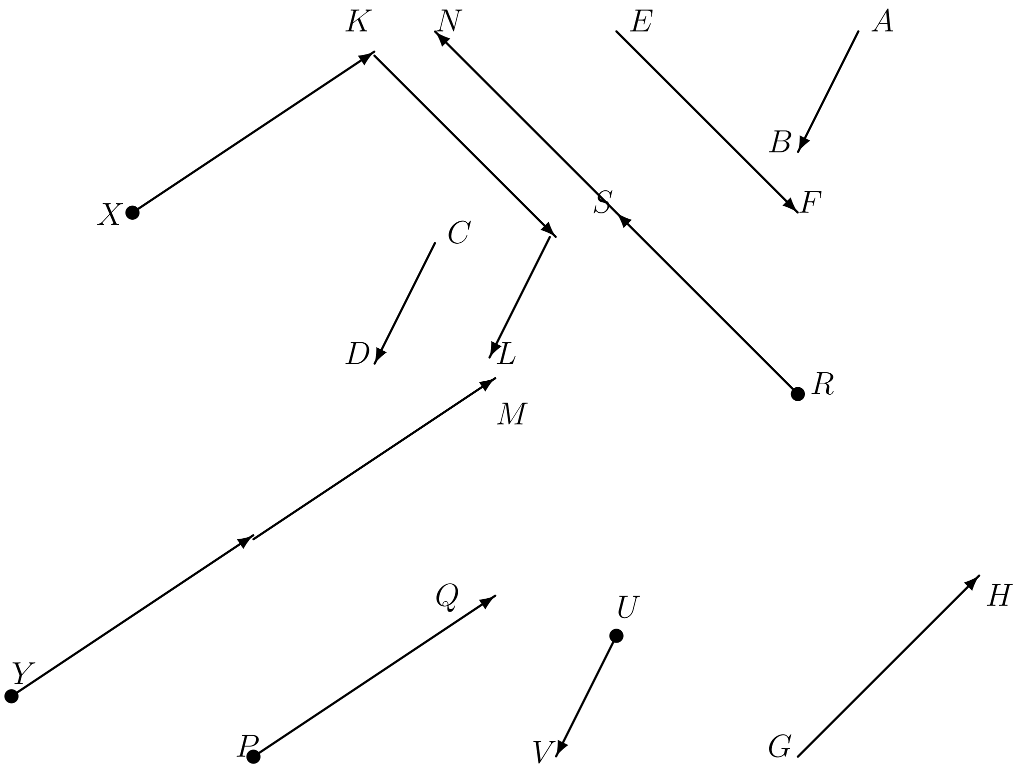


Lösung.

a $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{RS}$

b Bestimme die Pukte so: $(\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} + X)) = \vec{c} + (-\vec{b} + (\vec{a} + X))$ und $(-\vec{b}) + (\vec{a} + (\vec{b} + X)) = \vec{a} + X$

c Bestimme mittels $\overrightarrow{PQ}$ den Punkt $\vec{a} + Y$ und dann $\vec{a} + (\vec{a} + Y)$. Bei der zweite Konstruktion haben wir $S = \vec{b} + R$ und müssen $\vec{b}$ an S antragen. Dazu braucht man einen Repräsentanten von $\vec{b}$, der nicht auf $R \vee S$ liegt, z.B. FE. Mit diesem kann man $\vec{b} + S = (\vec{b} + \vec{b}) + R$ bestimmen.



Aufgabe 4. Leiten Sie aus (E0'-4) her: Ist g eine Gerade und $\vec{v}$ ein Vektor, so ist $\{\vec{v} + X \mid X \in g\}$ eine zu g parallele Gerade. Hinweis: Wählen Sie $P \in g$ fest und betrachten Sie die Parallele h zu g durch $\vec{v} + P$.

Lösung. Wähle $P \in g$ fest und h als die Parallele zu g durch $R = \vec{v} + P$. Sei $Q \in g$. Nach Konstruktion von $S = \vec{V} + Q$ mittels des Repräsentanten PR von $\vec{v}$ haben wir, das $k = R \vee S \parallel g$, also $k = h$ wegen der Eindeutigkeit der Parallelen. Wir betrachten nun die umgekehrte Situation mit $R = \vec{v} + P \in h$ gegeben und dem Vektor $-\vec{v}$. Dann $-\vec{v} + R = P$ und zu $S \in h$ wie eben $-\vec{v} + S \in g$. Somit $S = \vec{v} + (-\vec{v} + S)$ von der gewünschten Form.

Aufgabe 5. Leiten Sie aus (E0'-3) her:

a Durch jeden Punkt gehen unendlich viele Geraden.

b Jede Gerade hat unendlich viele Parallelen c Zu je endlich vielen Geraden gibt es einen Punkt, der auf keiner dieser Geraden liegt.

Lösung.

a Ist P gegegeben, so wähle nach 2c) eine Gerade g mit $P \notin g$. Dann erhält man nach (E0') und (E1) unendlich viele Geraden $P \vee Q$ mit $Q \in g$.

b Ist g gegeben, so wähle $P \in g$ nach (E0), eine Gerade $h \neq g$ mit $P \in h$ nach a), insbesondere $h \not\parallel g$. Nach (E2) gibt es zu jedem $Q \in h$ eine Parallele k_Q zu g durch Q. Da $g \not\parallel h$ folgt $k_Q \not\parallel h$, also $Q = H \cap k_Q$. Da es unendlich viele $Q \in h$ gibt, gibt es also auch unendlich viele k_Q.

c Sei G die gegebene endliche Menge von Geraden. Nach b) gibt es eine Gerade $h \notin G$. Für $g \in G$ ist $g \cap h$ entweder leer oder 1-elementig, also gibt es nur endlich viele Punkte auf h, die auch auf einer Geraden aus G liegen. Somit gibt es nach (E0') noch unendliche viele weitere Punkte auf h.

Aufgabe 6. Verifizieren Sie die Axiome (E0) und (E1-4) für die folgenden drei Beispiele mit $P\, I\, g \Leftrightarrow P \in g$. Hinweis: Sie können sich Arbeit sparen, wenn Sie überlegen, welche Beispiele man hier wie in ein anders subsumieren kann.

a $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{G}$ die Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$

b Sei K ein Körper, $\mathbb{P} = K^2$ die Menge der Punkte und die Geraden von der Form $\{(x, ax + b) \mid x \in K\}$ oder $\{(c, y) \mid y \in K\}$ mit $a, b, c \in K$.

c Sei K ein Körper, V ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathbb{P} = V$ und $\mathbb{G} = \{\vec{p} + U \mid \vec{p} \in V,\ U \subseteq V \text{ Untervektorraum},\ \dim U = 1\}$.

Lösung. b) kann man in c) subsumieren mit V als dem Vektorraum K^2. a) kann man in b) oder c) subsumieren mit $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ dem zweielementigen Körper und beliebiger Bijektion von $\{1, 2, 3, 4\}$ auf V. Wegen $|K| = 2$ haben Geraden nach b) dann genau 2 Punkte und es gibt genau 6 Geraden - 4 von der ersten und 2 von der zweiten Sorte.

c) sollte man aus LA kennen: $|K| \geq 2$ also hat auch $U \cong K$ minestens 2 Elemente und $\vec{u} \mapsto \vec{p} + \vec{u}$ ist eine Bijektion von U $\vec{p} + U$. Also gilt (E0). Zu $\vec{p} \neq \vec{q}$ hat man den eindimensionalen Untervektorraum $U = \mathsf{Spann}\,(\vec{q} - \vec{p})$ und damit die eindeutig bestimmte Gerade $\vec{p} + U$ durch $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Die Parallele zu $\vec{p} + U$ durch $\vec{r}$ ist durch $\vec{r} + U$ gegegeben und ebenfalls eindeutig. Schließlich sind $\vec{0}, \vec{p}, \vec{q}$ nicht kollineare, falls $\vec{p}, \vec{q}$ linear unabhängig sind. Also gelten (E1-3).

Zu (E4): $\vec{p}\vec{q} \approx \vec{r}\vec{s}$ genau dann, wenn $\vec{p} - \vec{q} = \vec{r} - \vec{s}$ (was zu $\vec{p} - \vec{r} = \vec{q} - \vec{s}$ gleichbedeutend ist) und entweder $\vec{p} - \vec{q}$ und $\vec{p} - \vec{r}$ unabhängig oder einer $= \vec{0}$.

Gelte nun $\vec{p}\vec{q} \approx \vec{u}\vec{v} \approx \vec{r}\vec{s}$ und $\vec{p} - \vec{q}$ und $\vec{p} - \vec{r}$ unabhängig entsprechend der Annahme in Desargues ($\vec{r}$ soll ja nicht auf der Geraden $\vec{p} \vee \vec{q}$ liegen). Es folgt $\vec{p} - \vec{q} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{r} - \vec{s}$ und somit $\vec{p}\vec{q} \approx \vec{r}\vec{s}$.