9. Übung Geometrie für Lehramt

In Aufgabe 1 und 2 setzen wir alle geometrischen Axiome voraus. Aufgabe 3-5 können und sollen allein mit der Begrifflichkeit und den Axiomen von Vektorräumen mit Skalarprodukt bearbeitet werden.

Aufgabe 1. Gegeben Dreieck ABC, Punkt D in der durch $A \vee C$ und B bestimmten Halbebene sowie P mit $C \in]A, P[$. Erläutern Sie die folgende Aussage und geben Sie eine Herleitung

$$C \vee D \parallel A \vee B \;\Rightarrow\; \angle BAC \equiv \angle DCP \text{ und } \angle ABC \equiv \angle BCD$$

Aufgabe 2. Sei $A = \vec{a} + P$, $B = \vec{b} + P$, $C = \vec{c} + Q$, $D = \vec{d} + Q$. Leiten Sie her

1. $APB \equiv CQD \Leftrightarrow \quad \|\vec{a}\| = \|\vec{c}\|,\ \|\vec{b}\| = \|\vec{d}\|$ und $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{c} \mid \vec{d} \rangle$
2. $$\angle APB \equiv \angle CQD \Leftrightarrow \quad \frac{\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\langle \vec{c} \mid \vec{d} \rangle}{\|\vec{c}\| \cdot \|\vec{d}\|}$$

Aufgabe 3. Der Satz des Pythagoras lautet bekanntlich: Für ein Dreieck ABC gilt

$$A \vee C \perp B \vee C \;\Leftrightarrow\; |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Formulieren Sie diesen Satz in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie ihn her.

Aufgabe 4. Formulieren Sie in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie her: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Aufgabe 5. Der Kathetensatz des Euklid lautet bekanntlich: Für ein Dreieck ABC und Fußpunkt P des Lotes von C auf $A \vee B$ gilt

$$A \vee C \perp B \vee C \;\Leftrightarrow\; |AP| \cdot |AB| = |AC|^2$$

Formulieren Sie diesen Satz in der Begrifflichkeit der Vektorräume mit Skalarprodukt und leiten Sie ihn her.

Aufgabe 6. Wir setzen die Axiome (E0), (E1), (E3) der Inzidenzgeometrie der Ebene voraus sowie die Axiome der Kongruenz und Zwischenbeziehung und das Lemma 7.7 - damit haben wir die Aussagen über die Anordnung auf Geraden.
Zeige: Das Parallelenaxiom ist äquivalent dazu, dass Stufenwinkel an Parallelen kongruent sind.