7. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Betrachte eine Kugel im Anschauungsraum, erinnere Dich an Aufgabe 1 der 1. Übung und Dein Schulwissen über den Raum. In der *sphärischen Geometrie* besteht die Punktmenge aus den Punkten der Kugeloberfläche und die "Geraden" sind die Großkreise - Kreise, für die Zentrum O und Radius mit dem der Kugel übereinstimmt. Wir setzen

- $AB \equiv CD$, falls die Strecken AB und CD im Raum dieselbe Länge haben.
- A zischen B und C, falls A, B und C 3 Punkte auf demselben Grosskreis liegen und O nicht im Inneren des Dreicks ABC liegt.

Welche Axiome (Z0)-(Z6) der Zwischenrelation bzw. welche Kongruenzaxiome (siehe unten) sind in diesem Modell erfüllt? Wie sieht es aus, wenn man nur Punkte auf einer offenen Halbkugelfäche (ohne den Äquator!) betrachtet?

Kongruenzaxiome Als neuen Grundbegriff führen wir die *Kongruenz* $PQ \equiv RS$ von Pfeilen ein - wir sagen auch die *Strecken* PQ und RS sind *kongruent*.

$(K1)$ $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile

$(K2)$ $AB \equiv BA$

$(K3)$ Aus $AA \equiv BC$ folgt $B = C$

$(K4)$ Zu Punkten $A \neq B$ und C und Gerade g durch C gibt es genau 2 Punkte D, D' mit $AB \equiv CD \equiv CD'$

$(K5)$ Sind A, B, C 3 kollineare Punkte mit $AB \equiv AC$ so $A \in]B, C[$

$(K6)$ Sind A, B, C bzw. A', B', C' jeweils 3 kollineare Punkte mit $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ und $B \in]A, C[\Leftrightarrow B' \in]A', C'[$, so gilt $AC \equiv A'C'$

$(K7)$ Zu jedem Dreieck ABC und Punkten A', B' mit $AB \equiv A'B'$ gibt es 2 Punkte C', C'' mit $AC \equiv A'C' \equiv A'C''$ und $BC \equiv B'C' \equiv B'C''$

$(K8)$ Für jedes Dreieck ABC und Punkte D, A', B', C, D' mit $D \in A \vee C$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $AD \equiv A'D'$ und $BD \equiv B'D'$ gilt $CD \equiv C'D'$

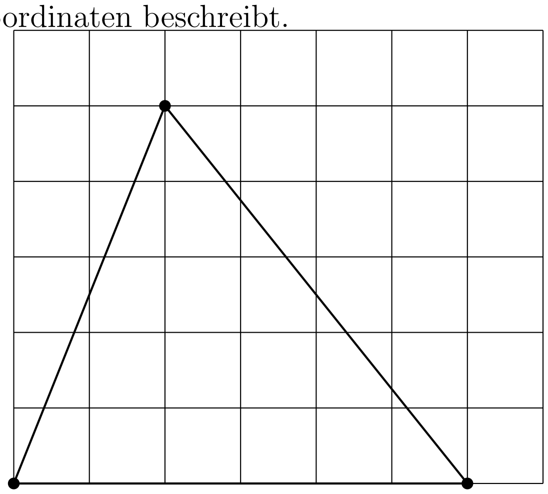
$(K9)$ Sind 4 Punkte mit $AC \equiv AC'$ und $BC = BC'$ gegeben, so trennt die Gerade $A \vee B$ die Punkte C und C'

Aufgabe 2. Wir wissen, wie man geometrisch multipliziert. Wähle eine Zahlengerade und konstruiere auf dieser durch fortlaufende Halbierung die ersten drei Intervalle einer rationalen Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ so, dass jedes $x > 0$ mit $x^2 = 2$ durch diese approximiert wird. Wie ist die Annahme zu rechtfertigen, dass es mindestens ein bzw. höchstens ein $x > 0$ mit $x^2 = 2$ gibt?

Aufgabe 3. Seien drei Punkte A, B und C in der Euklidischen Ebene, deren Koordinaten $(0, 0)$, $(6, 0)$ und $(2, 5)$ sind (bzgl. des Koordinatensystems α aus der Skizze).

- Lies aus der Zeichnung die Koordinaten der Punkte $(6,0)$ und $(0,5)$ im Koordinatensystem $\beta:\ A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ab.
- Sei Q der Punkt, dessen α-Koordinaten $(3,2)$ sind. Welche β-Koordinaten hat Q? Ist Q in $KH(\{A,B,C\})$?
- Bestimme die β- oder α-Koordinaten der Punkte von $KH(\{A,B,C\})$.
- Sei $\vec{v}$ der Vektor, dessen α-Koordinaten $(1,1)$ sind. Bestimme die Skalare r, sodass $r\vec{v}+Q$ in $KH(\{A,B,C\})$ ist.

Hinweis. Alternativ kann man diese Aufgabe behandeln, indem man das Dreieck als Schnitt von 3 abgeschlossenen Halbebenen versteht und diese jeweils durch Ungleichungen an die Koordinaten beschreibt.



Aufgabe 4. Illustriere durch eine Skizze zur geometrischen Multiplikation auf der Zahlengeraden, dass

$$r \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} \to 0 \qquad \text{für } r > 0$$

Welches praktische Problem tritt bei der Inversion sehr kleiner oder sehr großer Skalare auf?

Aufgabe 5. Jetzt beschäftigen wir uns mit dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. Betrachte die Anschauungsebene und erinnere Dich, was *senkrecht* bedeutet und was ein *Kreis* ist. Sei g_0 eine Gerade und H eine dazugehörige Halbebene. Die Punkte Poincaré-Modells sind die Punkte von H. Die "Geraden" des Poincaré-Modells sind die zu g_0 senkrechten Halbgeraden in H sowie die Halbkreise in H, die ihr Zentrum auf g_0 haben. Welche Axiome (E0)-(E3) bzw. (Z0)-(Z4) sind in diesem Modell erfüllt?