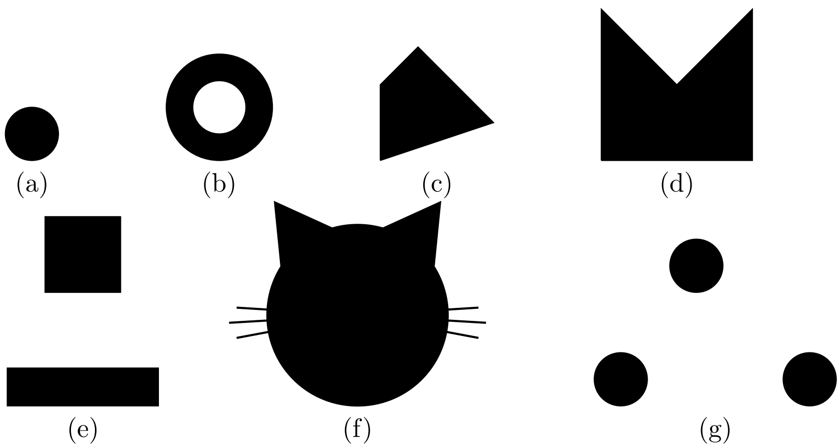
6. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Im Folgenden betrachten wir Ebene bzw. Raum mit den (elementaren) Axiomen (E1-3) bzw. (R1-10) für die Inzidenz sowie (Z0-4) für die Zwischenrelation. Bei (Z4) ist eine Voraussetzung nicht festgehalten worden: das Dreieck und die Gerade müssen in einer Ebene liegen!

Aufgabe 1. Gegeben ein Dreieck A, B, C, ein Punkt $P \in]A, B[$ und die Parallele h zu $g = A \vee B$ durch durch P. Wo liegt der Schnittpunkt h mit $A \vee C$ und warum?

Aufgabe 2. Gegeben vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, P auf einer Geraden l. Zeige: Gilt $P \in]A, B[$ und $P \in]B, C[$ so gilt $P \notin]A, C[$. Hinweis: Wähle $S \notin l$ und zeichne eine Figur, die der Voraussetzung entspricht.



Aufgabe 3. Gegeben sei eine Menge M in der Ebene. Die folgende Definition ergänzt die Menge M um alle Punkte, die zwischen alle zwei Punkten von M liegen

$$Z(M) \overset{def}{=} \bigcup_{P,Q \in M} [P, Q]$$

1. Begründe $M \subseteq Z(M)$ für alle M.
2. Sei PQR eine Dreieck. Bestimme $Z(\{P\})$, $Z(\{P, Q\})$, $Z(\{P, Q, R\})$ und $Z([P, Q])$.
3. Zeichne das Bild $Z(M)$ für die Figuren a-f.
4. Ist $Z(M)$ immer konvex? Bestimme $Z(M)$, wenn M konvex ist.
5. Begründe: M ist konvex genau dann, wenn $Z(M) = M$.

   Wir haben nun gesehen, dass $Z(M)$ nicht immer konvex ist, d.h. dass ein Schritt im Allgemeinen nicht genügt. Also wenden wir Z zweimal an

   $$Z^2(M) = Z(Z(M)) = (Z \circ Z)(M)$$

6. Zeichne die Bilder $Z^2(M)$ der Figuren a-f. Welche sehen konvex aus?
7. Begründe $M \subseteq Z^2(M)$ für alle M.

8. Vergleiche $Z^2(M)$ und $Z^2(M')$ falls $M \subseteq M'$.
9. Begründe $Z^2(M) = M$ für konvexe M
10. Seien M eine Menge und KO eine konvexe Obermenge. Begründe $Z^2(M) \subseteq KO$.
11. Ist $Z^2(M)$ immer konvex, falls M eine Teilmenge des Raumes ist?
12. In der Vorlesung wurde die *konvexe Hülle* $KH(M)$ von M als die Vereinigung aller $Z^n(M)$ definiert und gezeigt, dass sie die kleinste konvexe Menge ist, die M enthält. Wurden dabei spezifisch geometrische Tatsachen und Argumente benötigt? Kennt Ihr ähnliche Begriffe und Ergebnisse?
13. Ist $P \in KH(M)$, so gibt es immer eine endliche Teilmenge M' von M mit $P \in KH(M')$.
    (a) Welche Argumente dienen zum Beweis? Illustriere durch Skizzen.
    (b) Inwiefern ist dieses Faktum von Nutzen, wenn man für die Ebene $KH(M) = Z^2(M)$ zeigen möchte?

Aufgabe 4. Hier sind zuätzlich die Axiome von Desargues und Pappus vorausgesetzt - d.h. wir können Vektoren und Skalare benuzten.

1. Sei M eine konvexe Menge und $\vec{v}$ ein Vektor. Zeige, dass auch $\{\vec{v} + P \mid P \in M\}$ konvex ist.
2. Sei M eine konvexe Menge und $O \in M$. Zeige dass auch $\{2\vec{v} + O \mid \vec{v} + O \in M\}$ konvex ist.

Aufgabe 5.

1. Ist M konvex, so gilt $KH(M \cup \{A\}) = Z(M \cup \{A\})$
2. $KH(\{A, B, C, D\} = Z([A, B] \cup [C, D])$
3. Zeige: $KH(M \cup M') = Z(M \cup M'$ falls M und M' konvex sind.

Aufgabe 6. Eine Menge M heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $P_0 \in M$ so gibt, dass $[P_0, P] \subseteq M$ für alle $P \in M$. Gib einen direkten Beweis dafür, dass für eine sternförmige Menge M in der Ebene die konvexe Hülle $KH(M)$ sich als $Z^2(M)$ ergibt.