5. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Wir setzen alle bis. Kap.7 eingeführten Axiome für Raum bzw. Ebene voraus. Alle Argumente sollen sich direkt auf diese Axiome oder auf die daraus hergeleiteten Sätze stützen - dabei darf man aber Skizzen benuzten, um auf die richtige Idee zu kommen bzw. seine Ideen anderen zu erklären.

Aufgabe 1. Seien P und Q zwei beliebige verschiedene Punkte. Wir wollen beweisen, dass es zwischen P und Q einen Punkt gibt.

1. Sei R ein dritter Punkt auf $P \vee Q$. Welche Fälle müssen wir betrachten?
2. Angenommen $Q \in]P, R[$ und es ist S ein Punkt, der nicht auf $P \vee Q$ liegt. Zeigt, dass es einen Punkt zwischen P und S gibt.
3. Zeigt, dass es einen Punkt zwischen P und Q gibt.

Aufgabe 2. Seien A, B und C drei Punkte, sodass $B \in]A, C[$.

1. Zeigt $]A, C[\subseteq]A, B[\cup \{B\} \cup]B, C[$. (Hinweis: Betrachte einen Punkt D, der nicht auf $A \vee C$ liegt, und die Parallele zu $B \vee D$.)
2. Zeigt $]A, B[\cup]B, C[\subset]A, C[$. (Hinweis: man kann eine passende Zahlengerade und die Eigenschaften der anordneten Körper benutzen.)
3. Was folgt daraus?

Aufgabe 3.

1. Seien P, Q und R drei beliebige Punkte der Ebene und g eine Gerade, die $[P, Q]$ schneidet. Zeige, dass g auch $[P, R]$ oder $[Q, R]$ schneidet.
2. Für eine natürliche Zahl n größer oder gleich 3 seien n Punkte $(P_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ und eine Gerade g gegeben, die eine der Strecken $[P_k, P_{k+1\, mod\, n}]$ schneidet. Zeigt, dass es eine Zahl l gibt, sodass $l \neq k$ und g auch die Strecke $[P_l, P_{l+1\, mod\, n}]$ schneidet. (Hinweis: durch Induktion in bezüglich n. Die Bedeutung von $k \mod$ ist 0, falls $k = n$, anderfalls ist es k.)

Aufgabe 4. Betrachte die Ebene. Eine konvexe Menge ist eine Menge M, sodass gegeben beliebige Punkte P und Q von M jeder Punkt zwischen P und Q auch ein Element von M ist. Formal gesagt, eine Menge M ist konvex falls die folgende Formel erfüllt ist:

$$\text{für alle } P, Q \in M \text{ gilt } \;]P, Q[\subseteq M$$

1. Gegeben zwei verschiedene Punkte P und Q, sind $\{P\}$, $\{P, Q\}$, $[P, Q]$ und $P \vee Q$ konvex?
2. Gibt es eine kleinste (bzw. größte) konvexe Menge in der Ebene?
3. Ist die Vereinigungsmenge von zwei Geraden immer konvex?
4. Welche Mengen (in Schwarz) sind konvex in den Figuren a-g?
5. Ist die Schnittmenge von zwei konvexen Menge immer konvex?
6. Sei I eine beliebige Menge (die muss nichts mit der Ebene etwas zu tun haben). Sei $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von konvexen Mengen. Ist $\bigcap_{i \in I} K_i$ konvex?