4. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Im Raum seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ drei unabhängige Vektoren. Formal gesagt

$$\forall r, s, t \in K,\ r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0$$

In welchen den folgenden Fälle sind die Vektoren unabhängig? Schreibt einen Beweis.

- $\vec{a}$, $-\vec{b}$ und $-\vec{c}$.
- $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$.
- $u\vec{a}$, $u\vec{b}$ und $u\vec{c}$, gegeben einen beliebigen Skalar u.
- $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$.

Aufgabe 2. In der folgenden Figur ist ein Koordinatensystem $\alpha = (O_\alpha, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ eingezeichnet

a) Bestimmt aus der Figur die Koordinaten $\vec{z}^\alpha$ des Vektors $\vec{z} = \overrightarrow{XY}$ und die Koordinaten X^α des Punktes X und Y^α des Punktes Y.

b) Der Vektor $\vec{w}$ bzw. der Punkt Q habe die Koordinaten

$$\vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Koordinaten bezüglich α von $2\vec{w}$, $\vec{w} + \vec{z}$ und $\vec{w} + Q$.

c) Das Koordinatensystem β sei gegeben durch den Urspung $O_\beta = Y$ und die Basis $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = -2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

1. Zeichne das Koordinatensystem β in der Figur ein.
2. Der Vektor $\vec{u}$ habe im neuen System β die Koordinaten $\vec{u}^\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten $\vec{u}^\alpha$ im alten System α und zeichne $\vec{u}$ in der Figur ein.
3. Der Punkt P habe im neuen System β die Koordinaten $P^\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten P^α im alten System α und zeichne P in der Figur ein.

Aufgabe 3. Man sagt, dass zwei Ebenen im (3-dimensionalen affinen) Raum parallel sind, entweder, wenn sie gleich sind oder, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben. Seien zwei Ebenen gegeben, die nicht parallel sind. Welche Aussage kann man über die Gestalt der Schnittmenge machen? Leitet diese aus den Axiomen des Raumes her.

Aufgabe 4. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren des Vektorraums V.
Sei $U = \{r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in K\}$. Seien P und Q zwei Punkte des Raums so, dass $Q \notin U + P$.

- Gilt $P \in U + Q$?
- Wie bestimmt man die Schnittmenge von $U + P$ und $\{r\vec{c} \mid r \in K\} + Q$ wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ unabhängig sind? Bestimmt die Koordinaten der Punkte in der Schnittmenge bezüglich des Koordinatensystems $\alpha = (O, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, wenn

  $$\vec{a} = \vec{v}_1,\ \vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{c} = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3,\ P = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + O,\ Q = 4\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + O$$

- Welche Arten von Schnittmengen können auftreten, wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind?

Aufgabe 5. Diese Aufgabe handelt von einer Gegend und Zeit, wo die Kirchen noch im Dorf und die Kühe glücklich sind. Im Dorfe Trats wohnt die Professorin Katja L. für Mathematikdidaktik. Sie hat erfahren, dass im benachbarten Dorf Leiz ein Bauer besonders gute Milch verkauft. In dieser so vorbildlichen Gegend gibt es von jedem Dorf einen Ortsplan im Maßstab 1:1000. Frau Professorin L. hat sich diese Pläne sowohl von Trats wie von Leiz besorgt. Für beide Dörfer hat der Ortsplan das Format 30 mal 30 cm. In Trats liegt die Kirche bedenklicher Weise an der Südwestecke des Dorfes, in Leiz ist die Kirche sowohl nach Süden wie nach Westen auf dem Plan 10 cm von Ortrand entfernt. Die Wohnung von Prof.L. ist im Plan 20 cm in östlicher und 10 cm in nördlicher Richtung von der Kirche eingetragen. Der Bauer ist naturgemäß etwas näher an der Kirche, in Plan liegt sein Hof 15 cm in östlicher und 2 cm in nördlicher Richtung von der Kirche.

Frau Prof.L. möchte nun auf direktem Weg zum Bauern und überlegt sich, in welcher Richtung sie loslaufen soll. Dazu benutzt sie die Bistumskarte im Maßstab 1:10000, in der alle Kirchen verzeichnet sind. In dieser liegt die Kirche von Leiz 6 cm in östlicher und 3,5 cm in nördlicher Richtung. In welcher Richtung muss Frau Prof.L. gehen? Wie weit ist der Weg? Vorausgesetzt, man kann direkt gehen.

Aufgabe 6. Fortsetzung von Aufgabe 2 für Tüftler. Wir versuchen umgekehrt, vom alten System α in das jeweils neue umzurechnen.

d) die Koordinaten O^η des Punktes O und Y^η des Punktes Y
in dem Koordinatensystem $\eta = (Y, \vec{b}, \vec{a})$.

e) die Koordinaten O^γ des Punktes O und X^γ des Punktes X
in dem Koordinatesystem $\gamma = (O, \vec{a}, \overrightarrow{OY})$.

f) die Koordinaten X^δ des Punktes X
in dem Koordinatensystem $\delta = (\vec{a} + O, \overrightarrow{OY}, 3\vec{a} + 2\vec{b})$.