3. Übung zur Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

Aufgabe 1. Seien P, Q, R und S Punkte der affine Ebene so, dass die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ gleich sind. Beweise, dass auch die Vektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{QS}$ gleich sind.

1. Anders gesagt, beweise der folgenden formalen Satz.

$$\text{Für alle } P, Q, R, S \in \mathbb{P} \text{ gilt:} \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$$

   (Hinweis: Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ lässt sich auf zwei Weisen als Summe schreiben.

2. Zeichne eine Figur, die diesen Sachverhalt erklärt.

Aufgabe 2. Sei g eine Gerade g, die durch Auszeichnung zweier verschiedener Punkte 0 und 1 zur Zahlengerade gemacht wurde - die Punkte r auf g sind also Skalare. Gemäß der Definitionen der Vorlesung:

1. In Fig. ist r ein Skalar auf g und $\vec{v}$ ein Vektor, der nicht parallel zu g ist. Bestimme das skalare Vielfache $r\vec{v}$ durch Zeichnung.

2. In Fig. haben g und $\vec{v}$ dieselbe Richtung. Bestimme das skalare Vielfache $r\vec{v}$ durch Zeichnung.

3. In Fig. sind r und s Skalare auf g. Bestimme das Produkt $r \cdot s$ durch Zeichnung.

4. In Fig. ist r Skalar auf g. Bestimme durch Zeichnung einen s auf g mit $rs = 1$.

Aufgabe 3. Seien g bzw. g' Zahlengeraden bzgl. 0 und 1 bzw. $0'$ und $1'$. Es geht darum zu zeigen, dass es eine bijektive Abbildung $\phi : g \to g'$ mit $\phi(0) =)$ und $\phi(1) = 1'$ gibt so, dass $\phi(r + s) = \phi(r) +' \phi(s)$ für alle $r, s \in g$ gilt, wobei $+$ die Addition auf der Zahlengeraden g und $+'$ die Addition auf g' bezeichnet. Kurz, ϕ ist ein Isomorphismus von der Zahlengeraden g auf die Zahlengerade g bzgl. der Addition.

1. Führe den Beweis, falls $g \neq g'$ und $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{0'1'}$.

2. Führe den Beweis falls $0 = 0'$ und $g \neq g'$.

3. (Zu Hause) Benutze die Aufgabenteile 1 und 2, um die Aussage für alle Paare von Zahlengeraden zu beweisen. Hinweis: Überlege, dass die Hintereinanderausführung von Isomorphismen ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. Die Gerade g sei durch Auszeichnung von 0 und 1 zur Zahlengerade gemacht. In der Vorlesung wurden die folgenden Gesetze bewiesen für alle r, s, $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

1. $1\vec{v} = \vec{v}$.

2. $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$.

3. $(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$.

4. $r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$.

Leiet daraus die folgenden Gesetze für das Rechnen mit Skalaren her

1. $(r+s)t = rt + st$.

2. $r(st) = (rs)t$.

Aufgabe 5. Letzte Woche haben wir eine Methode gelernt, um Vektoren zu halbieren. In dieser Übung beweisen wir, dass diese Methode korrekt ist.

1. Zeichne zwei Punkte P und Q, die nicht gleich sind, einen Punkt R', der nicht auf $P \vee Q$ liegt, und einen Punkt R so, dass $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{R'R}$. Wie kann man einen Punkt Q' zeichnen so, dass $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{Q'Q}$?

2. Beweise, dass diese Methode korrekt ist - vorausgesetzt dass $P \neq R$. (Hinweis: Betrachte den Schnittpunkt S von $Q \vee R$ und der Parallelen zu $P \vee R$ durch Q'. Dann kann man z.B. Aufgabe 1. benutzen.)