10. Übung Geometrie für Lehramt

Aufgabe 1. Sei $\alpha : O, \vec{a}, \vec{b}$ Koordinatensystem der Ebene und $P = 2\vec{a} + 3\vec{b} + O$. Bestimme die homogenen Koordinaten von P.

Aufgabe 2. Im Raum sei eine Kugel mit Zentrum O gegeben. Sie $\mathbb{S}$ die Kugeloberfl ache.

$$\mathbb{P} = \{\{P, P'\} \mid P, P' \in \mathbb{S}, \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}\}$$

Sei $\mathbb{G}$ die Menge der Großkreise auf $\mathbb{S}$. Sei $\{P, P'\}$ inzident mit dem Großkreis k genau dann, wenn $\{P, P'\} \subseteq k$.

1. Zeigen Sie, dass man so eine projektive Ebene erhält
2. Wählen Sie einen Großkreis k_∞ und geben Sie anschauliche Modelle an, die zu der affinen Ebene $\mathbb{P} \setminus k_\infty$ isomorph sind.

Aufgabe 3 Sei $\alpha : O, \vec{a}, \vec{b}$ Koordinatensystem der Ebene, $P = -\vec{a} + O$ und $Q = 2\vec{a} - \vec{b} + O$. Bestimme für die Gerade g durch P und Q eine Parameterbeschreibung in homogenen Koordinaten.

Aufgabe 4 Sei α ein Koordinatensytem des 3-D Raumes. Betrachte die Ebene ϵ, dessen Parameterdarstellung wie unten ist.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Seien P, Q, R, Z die Punkte, sodass

$$P^\alpha = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad Q^\alpha = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad R^\alpha = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad Z^\alpha = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

Sei π die Projektion auf die Ebene ϵ mit Zentrum Z.

1. Berechne $\pi(P)$.
2. Sei l die Gerade durch Q und R. Berechne eine Paramterdarstellung für $\pi(l)$

Aufgabe 5. In der euklidischen Ebene sei $\vec{n} \neq \vec{0}$, O ein Punkt, und $c \in K$. Zeige

1. $g = \{\vec{x} + O \mid \langle n \mid x \rangle = c\}$ ist eine Gerade
2. Ist $\|\vec{n}\} = 1$, so ist c der Abstand der Geraden g von O, d.h. $|c| = \min\{|PO| \mid P \in g\}$

3. Ist $\|\vec{n}\| = 1$ und $c \geq 0$ (dann heißt die Gleichung $\langle n \mid x \rangle = c$ die *Hessesche Normalenform* für g) , so ist für jeden Punkt $Q = \vec{y} + O$ der Abstand von g bestimmt als $|\langle n \mid y \rangle - c|$. Welche geometrische Bedeutung hat das Vorzeichen von $\langle n \mid y \rangle - c$?

Aufgabe 6. Bezüglich eines Koordinatensytems α der Ebene seinen der Vektor $\vec{b}$ und die Punkte P, Q durch ihre Koordinaten gegeben:

$$\vec{b}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei g die Gerade mit der Parameterdarstellung $\{\lambda\vec{b} + Q : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Gib die Hesseche Normalform von g an, und berechne den Abstand von g zum Punkt P und den Fußpunkt des Lotes durch P auf g.

2. Sei h die gerade gegeben durch $h = \{x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + O \mid 3x_1 - 2x_2 = 24\}$. Gib h in ihrer Parameterdrastellung an und berechne den Shnittpunkt mit g. In welchem Winkel Schneiden sie sich?