1. Übung zur Geometrie für Lehramt   TUD SS 2010

Wir haben die folgenden Axiome:
(E0) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 2 verschiedene Punkte
(E0') Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte
(E1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade
(E2) Zu jeder Geraden g und Punkt P gibt es genau eine Parallele durch P
(E3) Es gibt 3 nicht kollineare Punkte
(E4) Aus $PQ \approx UV \approx RS$, $P \neq Q$ und $P \vee Q \neq R \vee S$ folgt $PQ \approx RS$.
Hier bedeutet $PQ \approx RS$, dass $P = Q$ und $R = S$ oder $P = R$ und $Q = S$ oder alle 4 paarweise verschieden und $P \vee Q \parallel R \vee S$ und $P\ veeR \parallel Q \vee S$.

Aufgabe 1. Inwieweit sind die Axiome (E0-E4) in den folgenden beiden Beispielen erfüllt?

a Gegeben sei ein Tetraeder. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Eckpunkte, $\mathbb{G}$ die Menge der Kanten und I die Inzidenz-Relation 'liegt auf'.

b Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Punkte P auf der Oberfläche der Einheitskugel im Raum, $\mathbb{G}$ die Menge der Großkreise g, d.h. der Schnitte von $\mathbb{P}$ mit Ebenen durch das Zentrum der Kugel. Sei $P\,I\,g \Leftrightarrow P \in g$.

Aufgabe 2. Leiten Sie aus (E0) und (E1-3) her:

a Sind $g \parallel h$ und $k \nparallel g$ so $k \nparallel h$ und es gilt $g \cap k = h \cap k$ genau dann wenn $g = h$.

b Ist P, Q, R ein Dreieck, so sind die Geraden $P \vee Q$, $P \vee R$, $Q \vee R$ paarweise verschieden und keine 2 parallel.

c Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade nicht durch diesen Punkt

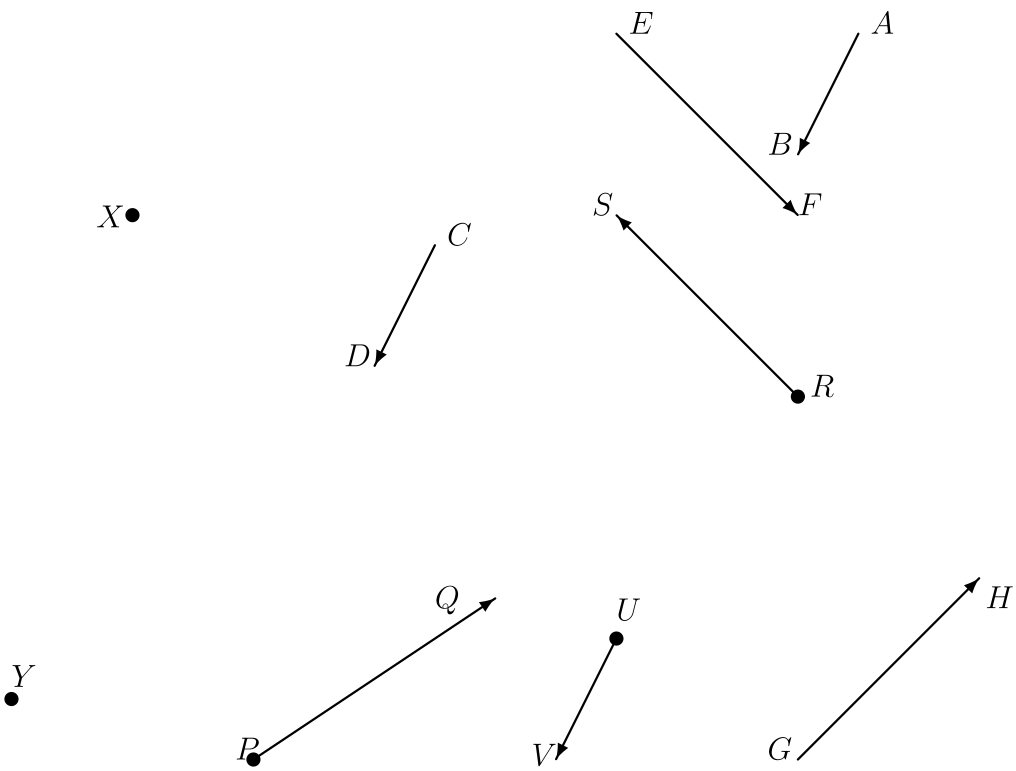
Aufgabe 3. Erlaubte Hilfsmittel sind Lineal und Geodreieck - aber nicht zum Messen von Längen oder Winkeln. In der Skizze seien

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}, \ \ \vec{b} = \overrightarrow{RS}, \ \ \vec{c} = \overrightarrow{UV}$$

a Prüfen Sie, welche Pfeile jeweils den gleichen Vektor bzw. den entgegengesetzten bestimmen (sollen)

b Bestimmen Sie die Punkte $K = (\vec{c} - \vec{b}) + (\vec{a} + X))$ und $L = (-\vec{b}) + (\vec{a} + (\vec{b} + X))$

c Bestimmen Sie die Punkte $M = \vec{a} + (\vec{a} + Y)$ und $N = (\vec{b} + \vec{b}) + R)$



Aufgabe 4. Leiten Sie aus (E0'-4) her: Ist g eine Gerade und $\vec{v}$ ein Vektor, so ist $\{\vec{v} + X \mid X \in g\}$ eine zu g parallele Gerade. Hinweis: Wählen Sie $P \in g$ fest und betrachten Sie die Parallele h zu g durch $\vec{v} + P$.

Aufgabe 5. Leiten Sie aus (E0'-3) her:

a Durch jeden Punkt gehen unendlich viele Geraden.

b Jede Gerade hat unendlich viele Parallelen

c Zu je endlich vielen Geraden gibt es einen Punkt, der auf keiner dieser Geraden liegt.

Aufgabe 6. Verifizieren Sie die Axiome (E0) und (E1-E4) für die folgenden drei Beispiele mit $P\, I\, g \Leftrightarrow P \in g$. Hinweis: Sie können sich Arbeit sparen, wenn Sie überlegen, welche Beispiele man hier wie in ein anders subsummieren kann.

a $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{G}$ die Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$

b Sei K ein Körper, $\mathbb{P} = K^2$ die Menge der Punkte und die Geraden von der Form $\{(x, ax + b) \mid x \in K\}$ oder $\{(c, y) \mid y \in K\}$ mit $a, b, c \in K$.

c Sei K ein Körper, V ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathbb{P} = V$ und $\mathbb{G} = \{\vec{p} + U \mid \vec{p} \in V,\, U \subseteq V \text{ Untervektorraum},\ \dim U = 1\}$.