

Inhaltsverzeichnis

19 Gruppen und Permutationen	117
19.1 Definition	117
19.2 Beispiele	118
19.3 Rechnen in Gruppen	118
19.4 Untergruppen	120
19.5 Erzeugen	121
19.6 Homomorphismen	122
19.7 Isomorphismen	123
19.8 Zykelzerlegung von Permutationen	124
19.9 Signum einer Permutation	125
20 Determinanten	126
20.1 Regeln	126
20.2 Eindeutigkeit und Berechnung	127
20.3 Cramersche Regel	127
20.4 Produktsatz.	128
20.5 Permutationsmatrizen	128
20.6 Explizite Formel	128
20.7 Existenz	129
20.8 Transponieren und Zeilenumformungen	129
20.9 Entwicklung	130
20.10Adjugierte Matrix	130
20.11Existenz: alternativ	130
20.12Transponieren: alternativ	131
21 Lineare Gleichungssysteme	132
21.1 Geraden in der Ebene	132
21.2 Ebenen im Raum	133
21.3 Lösungsraum eines Gleichungssystems	134
21.4 Umformungen	134
21.5 Beispiel	136
21.6 Stufenform	137
21.7 Fang-Cheng alias Gauss-Algorithmus	137
21.8 Scholia	138
21.9 Numerische Probleme *	139
21.10Dualraum und duale Basis	140
21.11Reziproke Basis	141
21.12Affine Teilräume	142
21.13Dualitäten	143
22 Eigenwerte und Eigenvektoren von Abbildungen	143
22.1 Definition	143
22.2 Ansatz	144
22.3 Beispiel	144
22.4 Gekoppelte Schwingung	144
22.5 Charakteristische Gleichung	145

22.6	Vielfachheiten	146
22.7	Unabhängigkeit von Eigenvektoren	146
22.8	Diagonalisierbarkeit	146
22.9	Tricks	147
22.10	Matrixpotenzen	147
23	Direkte Summen und Produkte	148
24	Klassifikation ebener Abbildungen	150
24.1	Determinante	150
24.2	Komplexe Eigenwerte	150
24.3	Orthogonale Abbildungen	150
24.4	Ebene orthogonale Abbildungen	151
24.5	Klassifikation ebener linearer Abbildungen	151
24.6	Differenzgleichungen und Matrixiteration	153
25	Jordan-Normalform	157
25.1	Elementarmatrizen	157
25.2	Koordinatentransformation	158
25.3	Basistransformation von Abbildungen	159
25.4	Einseitige bzw. Ungekoppelte Transformation.	160
25.5	Invariante Teilräume und Blockzerlegung	160
25.6	Jordan-Blöcke	160
25.7	Jordan-Matrizen	161
25.8	Verschiebung	162
25.9	Normalform nilpotenter Matrizen	162
25.10	Hauptvektoren und verallgemeinerte Eigenräume	162
25.11	Beispiel	163
25.12	Kleiner Dreh	165
25.13	Matrix-Algorithmus und Existenz-Beweis zur JNF	165
25.14	Potenzen von Dreiecksmatrizen	169
25.15	Zerlegung	170
25.16	Satz von Cayley-Hamilton	171
26	Jordan-Basen für nilpotente Endomorphismen	172
26.1	Jordan-Rang und -Unabhängigkeit.	172
26.2	Jordanische Ergänzung	173
26.3	Algorithmus im nilpotenten Fall	174
26.4	Großer Dreh	175
26.5	JNF-Existenzbeweis für Strukturmathematiker	177
27	Quadratische Formen und Hauptachsen	178
27.1	Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher	178
27.2	Flächen zweiter Ordnung	179
27.3	Bilineare Formen	179
27.4	Transformation	180
27.5	Metrik	180
27.6	Trägheitstensor	181

27.7	Definitheit	181
27.8	Hauptachsentransformation	182
27.9	Ausartung	183
27.10	Klassifikation	184
27.11	Geometrisches Beispiel	184
27.12	Trägheitssatz	184
27.13	Zerlegung	185
27.14	Symmetrischer Gauss	185
27.15	Definitheitskriterium	186
28	Rund um quadratische Formen	187
28.1	Cholesky-Zerlegung	187
28.2	Kennfläche bestimmt Form	188
28.3	Jacobiverfahren	188
28.4	Matrixphilosophie	189
28.5	Flächenträgheitsmomente	190
28.6	Zerlegung von Abbildungen	194
28.7	Bild einer Kennfläche	194
29	Unitäre und euklidische Räume	196
29.1	Skalarprodukte	196
29.2	Ungleichungen	198
29.3	Orthonormalbasen	198
29.4	Adjungierte Matrix	198
29.5	Unitäre und Orthogonale Matrizen	199
29.6	Orthogonales Komplement	199
29.7	Orthogonale Projektion	199
29.8	Orthonormalisierung	200
29.9	Orthogonale Zerlegung	200
29.10	Bestapproximierende Lösung	200
29.11	QR-Zerlegung	201
29.12	Beispiel	202
30	Sesquilineare Formen	203
30.1	Sesquilineare Formen	203
30.2	Beispiele	204
30.3	Gram-Matrix	204
30.4	Rang	204
30.5	Transformation	204
30.6	Adjungierte Form	206
30.7	Hermitesche Formen	206
30.8	Quadratische Formen	207
30.9	Diagonalisierung hermitescher Formen	207
30.10	Trägheitssatz	209
30.11	Definitheit	209
30.12	Definitheitskriterium	209
30.13	Orthosymmetrische Formen	210

30.14	Normale Matrizen	210
31	Spektraltheorie normaler Formen	211
31.1	Komplexifizierung	211
31.2	Eigenvektoren	212
31.3	Normale Formen	212
31.4	Eigenräume normaler Formen	212
31.5	Lexikographische Ordnung und Extrema	213
31.6	Normale Formen in Dimension 2	214
31.7	Spektralsatz	215
32	Spezialfälle und Anwendungen des Spektralsatzes	216
32.1	Reelle Matrizen	216
32.2	Charakteristische Gleichung	216
32.3	Algorithmus für Übungsaufgaben	217
32.4	Algebraisches Beispiel	217
32.5	Hermitesche Formen	218
32.6	Singulärwertzerlegung	218
32.7	Quadratwurzel	221
32.8	Quanten	221
31	Spektraltheorie normaler Formen	225
31.5	Lexikographische Ordnung und Extrema	225
31.6	Diagonalisierung orthosymmetrischer Formen	225
31.7	Spektralsatz	226
32	Spezialfälle	227
32.1	Reelle Matrizen	227
33	Assoziation von Formen und Endomorphismen	227
33.1	Verwechslung	227
33.2	Assoziation von Formen zu Endomorphismen	228
33.3	Adjungierte Endomorphismen	228
33.4	Normale Endomorphismen	228
33.5	Invariante Teilräume	229
33.6	Orthogonalprojektion	229
33.7	Orthogonale Zerlegung	230
34	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	230
34.1	Isometrie von Formen	230
34.2	Isometrien	231
34.3	Orthogonale Abbildungen	232
34.4	Singulärwertzerlegung	232
34.5	Pseudoinverse	233
34.6	Normalform unitärer Matrizen	233
34.7	Reellifizierung	234
34.8	Eigenwerte reeller Matrizen	235
34.9	Normalform normaler reeller Matrizen	235

34.10	Spur	236
34.11	Orthogonale Abbildungen im Raum	236
34.12	Polarzerlegung	238
34.13	Reelle Jordansche Normalform	238
34.14	Schur'sches Lemma	239
35	Pauli-Matrizen *	241
35.1	Spur Null	241
35.2	Pauli-Matrizen	241
35.3	Skalarprodukt	241
35.4	Spin	242
35.5	Vektorprodukt	242
35.6	Produkt von Operatoren	242
35.7	Quaternionen	243
35.8	Überlagerung	243
36	Relativität *	244
36.1	Vorbemerkungen	244
36.2	Längengleichheit	244
36.3	Kegel	245
36.4	Galileisch bewegte Räume	246
36.5	Galileische Raumzeit	247
36.6	Galilei-Abbildungen	248
36.7	Kegel der Erreichbarkeit	249
36.8	Einstein-Basen	251
36.9	Minkowski-Raum	251
36.10	Lorentz-Abbildungen	252
36.11	Lorentz-Matrizen	253
36.12	Resumee	255
36.13	Traumzeit	256
36.14	Methoden der Verwirrung	257

Lineare Algebra II, TUD SS 5

19 Gruppen und Permutationen

19.1 Definition

Definition. Eine *algebraische Struktur* vom Typ $(2, 1, 0)$ kann angegeben werden durch eine (Grund)Menge G , eine zweistellige Operation $(x, y) \mapsto x \cdot y = xy$ auf G (Multiplikation), eine einstellige Operation $x \mapsto x^{-1}$ auf G (Inversion) und eine Konstante e in G . Es handelt sich um ein *Gruppe*, wenn für alle x, y, z in G

$$\begin{array}{ll}
 (G1) & x(yz) = (xy)z \quad \text{Assoziativität} \\
 (G2) & xe = x = ex \quad \text{Neutralement} \\
 (G3) & xx^{-1} = e = x^{-1}x \quad \text{Inversion}
 \end{array}$$

Eine Gruppe G heisst *abelsch* oder *kommutativ* wenn $xy = yx$ für alle $x, y \in G$.

19.2 Beispiele

- Hauptbeispiel. Die bijektiven Abbildungen einer Menge M in sich bilden bzgl. Hintereinanderausführung \circ als Multiplikation, Umkehrung als Inversion und identischer Abbildung id_M als Neutralement eine Gruppe S_M , die *symmetrische Gruppe* auf M . Man schreibt S_n falls $M = \{1, \dots, n\}$. S_n hat $n!$ Elemente. Nur S_1 und S_2 sind kommutativ.
- Die invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K bilden bzgl. der Matrixmultiplikation, der Inversion und der Einheitsmatrix als Neutralement eine Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe* $\text{GL}(n, K)$. Nur $\text{GL}(1, K)$ ist kommutativ.
- \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} bilden jeweils mit Addition, Subtraktion und Null eine kommutative Gruppe.
- Die Vektoren des Raums bilden mit der vektoriellen Addition, Umkehrung und dem Nullvektor eine kommutative Gruppe. Allgemeiner: die Vektoren eines Vektorraums.
- Die n -Spalten (=Tupel) von Elementen aus einem Körper K (z.B. \mathbb{R}) bilden mit der komponentenweisen Addition, Subtraktion, und der Nullspalte eine kommutative Gruppe K^n .
- $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bilden jeweils mit Multiplikation, Inversion und Eins eine kommutative Gruppe. Allgemeiner: die multiplikative Gruppe $K^\times = K \setminus \{0\}$ eines Körpers ist kommutativ.

19.3 Rechnen in Gruppen

- (1) Klammern in Produkten sind entbehrlich
- (2) $x = e \Leftrightarrow \exists y. xy = y \Leftrightarrow \exists y. yx = y$
- (3) $x = a^{-1} \Leftrightarrow xa = e \Leftrightarrow ax = e$
- (4) $(a^{-1})^{-1} = a$
- (5) $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdot \dots \cdot a_1^{-1}$ (*Socke-Schuh*)
- (6) Aus $ax = ay$ bzw. $xa = ya$ folgt $x = y$ (*Kürzungsregel*)
- (7) Für alle a, b gibt es genau ein x mit $ax = b$ (*eindeutige Lösung*)
- (8) Für alle a, b gibt es genau ein x mit $xa = b$ (*eindeutige Lösung*)
- (9) Aus $ab = ba$ folgt $a^{-1}b = ba^{-1}$
- (10) $ab = ba$ genau dann, wenn $aba^{-1}b^{-1} = e$
- (11) $a = b \Leftrightarrow ab^{-1} = e \Leftrightarrow a^{-1}b = e$

Beweis. (1) klar nach Assoziativgesetz. (2) Aus $xy = y$ folgt $e = yy^{-1} = xyy^{-1} = xe = x$. (3) Aus $xa = e$ folgt $a^{-1} = ea^{-1} = xaa^{-1} = xe = x$. (4) sofort aus (3). (5) $a_n^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = a_n^{-1} \cdot \dots \cdot a_2^{-1} \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \dots = a_n^{-1} \cdot a_n = e$. Nun benutze (3). (6) Gilt $ax = b = ay$, so $x = ex = a^{-1}ax = a^{-1}b = a^{-1}ay = ey = y$. (7) Es gibt z mit $az = e$, wähle $x = zb$. Rest als Übung. \square

Produkte und Potenzen werden wie üblich rekursiv definiert

$$\prod_{i=1}^0 a_i = e, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot a_{n+1}$$

Dabei kommt es auf die durch die Auflistung a_1, \dots, a_n gegebene Reihenfolge wesentlich an.

$$a^0 = e, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a, \quad a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

Für Gruppen gelten die Potenzgesetze

$$a^{-z} = (a^z)^{-1}, \quad a^{z+w} = a^z \cdot a^w, \quad a^{zw} = (a^z)^w \quad \text{für } z, w \in \mathbb{Z}$$

Satz 19.1 *Sei eine Menge M mit einer assoziativen Multiplikation (eine Halbgruppe). Gibt es ein Neutralelement e (d.h. es gilt (G2) und man hat ein Monoid), so ist dieses eindeutig bestimmt und auf der Menge*

$$G = M^\times = \{x \in M \mid \text{es gibt } y \text{ mit } xy = yx = e\}$$

der invertierbaren Elemente oder Einheiten gibt es genau eine Inversion $x \mapsto x^{-1}$ so, dass G mit der Einschränkung der Multiplikation und Neutralelement e eine Gruppe wird.

Korollar 19.2 *Eine Gruppe ist schon durch ihre Multiplikation eindeutig bestimmt.*

Bemerkung. Einseitig invertierbare Elemente müssen nicht invertierbar sein - z.B. im Monoid aller Selbstabbildungen einer unendlichen Menge X gibt es Abbildungen f die surjektiv (\Leftrightarrow es gibt g mit $f \circ g = \text{id}$) aber nicht injektiv (\Leftrightarrow es gibt h mit $h \circ f = \text{id}$) sind bzw. umgekehrt. Bei endlichen X ist jedoch erfreulicherweise f injektiv genau dann wenn f surjektiv. Analog gibt es zu einer $n \times n$ -Matrix A über einem Körper K genau dann ein X mit $AX = E$, wenn es ein Y mit $YA = E$ gibt (und wir wissen dann $X = Y = A^{-1}$). Auch hier ist wieder der entscheidende Grund die Endlichkeit der 'Dimension'.

Beweis des Satzes. Erfüllt auch e' die Eigenschaft eines Neutralelement, dh. $e'x = x = xe'$, so folgt $e = ee' = e'$, indem man die Neutralität zuerst von e' , dann von e benutzt. Die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation folgt mit der Socke-Schuh-Regel. Die Eindeutigkeit der Inversion folgt sofort aus (3) oben. \square Man sollte dieses Ergebnis nicht mit folgendem (weniger wichtigen aber schwerer zu beweisenden) verwechseln

Satz 19.3 *Sei G eine Menge mit einer assoziativen Multiplikation und gebe es ein Element e so, dass $ae = a$ für alle $a \in G$ und für alle $a \in G$ gibt es $x \in G$ mit $ax = e$. Dann ist G eine Gruppe.*

19.4 Untergruppen

Eine Untergruppe U einer Gruppe G wird bestimmt durch eine Teilmenge U von G derart, dass

$$e \in U, \quad a, b \in U \Rightarrow a \cdot b \in U, \quad a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U.$$

U ist dann auf natürliche Weise eine Gruppe - mit der Einschränkung der Operationen von G - und kommutativ wenn's G ist.

Beispiele

- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}^\times \subseteq \mathbb{R}^\times \subseteq \mathbb{C}^\times$
- $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}$
- $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \subseteq C_m \subseteq S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^\times$ für $n \mid m$
- Eine vektorielle Ebene ist Untergruppe der Gruppe der Vektoren des Raums.
- Ist G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_M aller bijektiven Selbstabbildungen von M und $N \subseteq M$, so ist $H = \{\phi \in G \mid \phi(N) = N\}$ eine Untergruppe von G .
- Die bijektiven linearen Abbildungen des K -Vektorraums V in sich bilden die *allgemeine lineare* Untergruppe $\text{GL}(V, K)$ von S_V .
- Die linearen Abbildungen ϕ mit $\det(\phi) = 1$ bilden die *spezielle lineare* Untergruppe $\text{SL}(V, K)$ von $\text{GL}(V, K)$.
- Die orthogonalen Abbildungen eines euklidischen Vektorraums V (z.B. \mathbb{R}^n) in sich bilden die *orthogonale* Untergruppe $\text{O}(V)$ von $\text{GL}(V, \mathbb{R})$
- Die orthogonalen Abbildungen mit $\det \phi = 1$ bilden eine Untergruppe von $\text{O}(V)$ und $\text{SL}(V, \mathbb{R})$, die *Drehgruppe* $\text{SO}(V)$.
- Die Ähnlichkeitsabbildungen bilden eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf der Punktmenge
- Die Bewegungen bilden eine Untergruppe der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen - die *Bewegungsgruppe* des Raumes bzw. der Ebene
- Die hat die Untergruppe der *orientierungstreuen* Bewegungen ϕ mit $\det \phi_0 = 1$.
- Die Bewegungen mit Fixpunkt O bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe.
- Die Symmetrien einer Figur F bilden eine Untergruppe der Bewegungsgruppe des Raumes bzw. der Ebene, die (volle) *Symmetriegruppe* der Figur F . Die Drehungen darin bilden die Untergruppe der *Drehsymmetrien* von F .

Nur für die Bewegungsgruppe ist was zu zeigen. Ist ϕ Bewegung, so $d(\phi^{-1}P, \phi^{-1}Q) = d(\phi(\phi^{-1}P), \phi(\phi^{-1}Q)) = d(P, Q)$, also ist auch die Inverse Bewegung. Sind ϕ und ψ Bewegungen, so auch $\psi \circ \phi$ da $d(\psi(\phi P), \psi(\phi Q)) = d(\psi P, \phi Q) = d(P, Q)$. \square

19.5 Erzeugen

Lemma 19.4 *Ist G eine Gruppe und $a \in G$ fest, so erhält man eine Untergruppe $\{a^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Es gilt entweder $a^z \neq a^w$ für alle $z \neq w$ oder es gibt ein kleinstes $n > 0$ mit $a^n = e$ und es gilt dann*

$$a^z = a^w \Leftrightarrow z \equiv w \pmod{n} \text{ d.h. } n \text{ teilt } w - z$$

Diese Untergruppe heisst die von a erzeugte zyklische Untergruppe von G .

Beweis. Die Untergruppeneigenschaft folgt sofort aus den Potenzregeln. Gilt $a^z = a^w$ für ein Paar $z \neq w$ so oBdA $w > z$ und dann $a^m = a^w(a^{-z} = a^z(a^z)^{-1} = e$ mit $m = w - z > 0$. Wähle also $n > 0$ minimal mit $a^n = e$, insbesondere $n \leq m$. Wäre n kein Teiler von m , so $0 < r = m - dn < n$ für ein d und dann $a^r = a^m a^{-dn} = e(a^n)^{-d} = e^{-d} = e$ - ein Widerspruch. \square

- *Beispiel.* In der orthogonalen Gruppe der Ebene erzeugt jede Drehung um einen ‘rationalen Winkel’ $\frac{2m\pi}{n}$ mit teilerfremden m, n eine n -elementige zyklische Untergruppe. Jede Drehung um einen irrationalen Winkel erzeugt eine unendliche zyklische Untergruppe.

Prinzip 19.5 *Sei G eine Gruppe und E Teilmenge von G . Dann erhält man die kleinste E enthaltende Untergruppe, das Erzeugnis von E , als*

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \{e\} \cup \{a_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n} \mid a_i \in E, \varepsilon_i = \pm 1\} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^n a_i^{z_i} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \neq a_{i+1}, z_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Ist $G = \overline{E}$, so ist G von E erzeugt und E eine Erzeugendenmenge von G .

‘Beweis’ durch algebraisches Geschwätz. Wir zeigen dass \overline{E} Untergruppe ist: Hat man $a, b \in \overline{E}$, etwa $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ mit $a_i \in E$ oder $a_i = x_i^{-1}$ mit $x_i \in E$ und $b = b_1 \cdot \dots \cdot b_m$ mit $b_j \in E$ oder $b_j = y_j^{-1}$ mit $y_j \in E$, so $ab = c_1 \cdot \dots \cdot c_l$ mit $l = n + m$ und $c_k = a_i \in E$ oder $c_k = b_j \in E$ oder $c_k = x_i^{-1}$ mit $x_i \in E$ oder $c_k = y_j^{-1}$ mit $y_j \in E$, also $ab \in \overline{E}$. Und nach der Socke-Schuh-Regel gilt $a^{-1} = c_1 \cdot \dots \cdot c_n$ mit $c_i = a_{n+1-i}^{-1}$ und $a_{n+1-i} \in E$ oder $a_{n+1-i} = x_{n+1-i}^{-1}$ mit $x_{n+1-i} \in E$ also $c_i = (x_{n+1-i}^{-1})^{-1} = x_{n+1-i} \in E$ und somit $a^{-1} \in \overline{E}$. Und ist $a \in E$ so $a = a_1 \in \overline{E}$. Andererseits folgt mit Induktion über n , dass jedes Element der angegebenen Form zu jeder Untergruppe $B \supseteq E$ gehört. Dann kann man Potenzen zu gleicher Basis zusammenfassen und solche der Form a^0 weglassen. Das neutrale Element ergibt sich als Produkt über die leere Folge d.h. $n = 0$. \square

Beispiele.

- $\text{GL}(n, K)$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt.
- $\text{SL}(n, K)$ wird von den elementaren Scherungsmatrizen erzeugt.
- $\text{O}(n)$ wird von den Spiegelungsmatrizen erzeugt
- $\text{SO}(3)$ wird von den Drehmatrizen zu zwei vorgegebenen Achsen erzeugt.

- Die Bewegungsgruppe wird von den Spiegelungen erzeugt.
- Die Gruppe der orientierungserhaltenden Bewegungen wird den Drehungen um einen festen Punkt und den Verschiebungen in einer vorgegebenen Richtung erzeugt.

19.6 Homomorphismen

Ein *Homomorphismus* von einer algebraischen Struktur A in eine algebraische Struktur B , beide vom Typ $(2, 1, 0)$, ist eine Abbildung $\phi : A \rightarrow B$ so, dass für alle $a, b \in A$

$$\phi(a \cdot_A b) = \phi(a) \cdot_B \phi(b), \quad \phi(a^{-1_A}) = (\phi(a))^{-1_B}, \quad \phi(e_A) = e_B$$

Beispiele.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $x \mapsto e^{xi} = \cos x + i \sin x$
- $\det : \text{GL}(n, K) \rightarrow K^\times$

Proposition 19.6 *Sei A eine Gruppe und sei auf B eine Multiplikation gegeben. Sei $\phi : A \rightarrow B$ eine Abbildung mit $\phi(a \cdot_A b) = \phi(a) \cdot_B \phi(b)$ für alle $a, b \in A$. Ist $\phi : A \rightarrow B$ surjektiv, so ist B Gruppe. Ist B Gruppe, so ist $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus.*

Beweis. Ist ϕ surjektiv, so überträgt sich das Assoziativgesetz und $\phi(e)$ ist neutral. Auch ist $\phi(a^{-1})$ Inverses zu $\phi(a)$, also ist B nach Satz 19.1 eine Gruppe. Sei nun B Gruppe. Wir wenden (2) und (3) auf B an: Da $\phi(e_A) \cdot_B \phi(e_A) = \phi(e_A \cdot_A e_A) = \phi(e_A)$ folgt $\phi(e_A) = e_B$ und, da $\phi(a^{-1_A}) \cdot_B \phi(a) = \phi(a^{-1_A} \cdot_A a) = \phi(e_A) = e_B$, folgt $\phi(a^{-1_A}) = (\phi(a))^{-1_B}$. \square

Lemma 19.7 *Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist das Bild $\phi(U)$ einer Untergruppe U von A eine Untergruppe von B und das Urbild $\phi^{-1}(V) = \{x \in A \mid \phi(x) \in V\}$ einer Untergruppe V von B eine Untergruppe von A - insbesondere der Kern $\text{Kern}(\phi) = \{x \in A \mid \phi(x) = e_B\}$.*

Beweis als Übung. \square

Lemma 19.8 *Ein Gruppen-Homomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ ist injektiv genau dann, wenn e_G das einzige Element von G ist mit $\phi(x) = e_H$, d.h. wenn $\text{Kern}(\phi) = \{e\}$.*

Beweis. Ist $\phi(x) = \phi(y)$ so, $\phi(xy^{-1}) = e$ und aus $xy^{-1} = e$ folgt $x = y$. \square

Ist ϕ injektiv, so heisst ϕ auch eine *Einbettung*.

Beispiel: \mathbb{C}^\times ist in $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ eingebettet via

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

19.7 Isomorphismen

Ein Homomorphismus ϕ von A nach B ist ein *Isomorphismus*, wenn $\phi : A \rightarrow B$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ein Homomorphismus von B nach A . Die Strukturen A und B sind dann zueinander *isomorph*, wir schreiben $A \cong B$.

Prinzip 19.9 (Isomorphie) *Ist $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ ein Ausdruck in der Sprache der Gruppen und ist ϕ ein Isomorphismus von A auf B und sind a_1, \dots, a_n in A , so gilt $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ in A genau dann, wenn $\Phi(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$ in B gilt. Insbesondere ist B genau dann eine (abelsche) Gruppe, wenn A eine ist.*

Beweis. Z.B. ist $b \in B$ so $b = \phi(a)$ für ein $a \in A$ und $b \cdot_B e_B = \phi(a) \cdot_B \phi(e_A) = \phi(a \cdot_A e_A) = \phi(a) = b$.

Proposition 19.10 *Jeder bijektive Homomorphismus zwischen algebraischen Strukturen ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Für die Umkehrabbildung ψ gilt $\phi(\psi(c) \cdot \psi(d)) = \phi(\psi(c)) \cdot \phi(\psi(d)) = c \cdot d = \phi(\psi(c \cdot d))$, also $\psi(c) \cdot \psi(d) = \psi(c \cdot d)$ wegen der Injektivität von ϕ . \square

Beispiele.

- Die Logarithmusfunktion $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$
- Jede Einbettung ist ein Isomorphismus auf das Bild.
- Durch die Vorgabe einer Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eines K -Vektorraums V wird ein Isomorphismus von der Gruppe K^n auf die Gruppe der Vektoren von V bestimmt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

- Durch die Vorgabe einer Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eines K -Vektorraums V wird ein Isomorphismus von der Gruppe $\text{GL}(n, K)$ der invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ auf die Gruppe $\text{GL}(V, K)$ der bijektiven linearen Abbildungen von V in V bestimmt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \phi \quad \text{mit} \quad \phi(\vec{e}_j) = \sum_i a_{ij} \vec{e}_i$$

Dabei wird die Untergruppe $\text{SL}(n, K)$ isomorph auf die Untergruppe $\text{SL}(V, K)$ abgebildet.

- Ist der Vektorraum V euklidisch und die Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ orthonormal, so wird dabei die Untergruppe $\text{O}(n)$ der orthogonalen Matrizen isomorph auf die Untergruppe $\text{O}(V)$ abgebildet und die Untergruppe $\text{SO}(n)$ der Drehmatrizen auf $\text{SO}(V)$.
- Die Bewegungen der Ebene bzw. des Raumes mit Fixpunkt O bilden eine zur orthogonalen Gruppe des Vektorraumes isomorphe Untergruppe der Bewegungsgruppe. Hat man eine Figur mit Schwerpunkt O , so ist die Symmetriegruppe isomorph zu einer Untergruppe der orthogonalen Gruppe

- Die Drehgruppe eines regelmässigen n -Ecks ist isomorph zur Untergruppe C_n von \mathbb{C}^\times der n -ten *Einheitswurzeln*

$$C_n = \{e^{\frac{2k\pi}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1\}$$

Lemma 19.11 *Die (Dreh)Symmetriegruppen ähnlicher Figuren sind isomorph*

Beweis. Sei ϕ eine Ähnlichkeitsabbildung von F_1 auf F_2 . Dann ist ein Isomorphismus von der Symmetriegruppe von F_2 auf die von F_1 gegeben durch

$$\Phi(\sigma) = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$$

In der Tat, sei $\phi(P) = \vec{v}_0 + \phi_0(r\vec{x}) + O$ und $\sigma(Q) = \vec{w}_0 + \sigma_0(\vec{y}) + O$. Dann $\Phi(\sigma)(P) = \phi^{-1}(\vec{w}_0 + \sigma_0(\vec{v}_0) + \sigma_0(\phi_0(r\vec{x}))) + O = \phi_0^{-1}(r^{-1}(-\vec{v}_0 + \vec{w}_0 + \sigma_0(\vec{v}_0) + \sigma_0(\phi_0(r\vec{x}))) + O = \vec{u}_0 + \psi_0(\vec{x})$ mit und orthogonaler Abbildung $\psi_0 = \phi_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ \phi_0$ mit $\det \psi_0 = \det \sigma$. Ausserdem $\Phi(\sigma)(F_1) = \phi^{-1}(\sigma(\phi(F_1))) = \phi^{-1}(\sigma(F_2)) = \phi^{-1}(F_2) = F_1$. Dass Φ ein Isomorphismus der Ähnlichkeitsgruppe in sich ist, zeige man als Übung. \square

Nun dürfen wir endlich von *der* Symmetriegruppe des regelmässigen n -Eckes genannt *Diedergruppe* D_n , der Symmetriegruppe des Würfels usw. sprechen.

19.8 Zykelzerlegung von Permutationen

Sei M eine endliche Menge und $\sigma \in S_M$. Eine Teilmenge B von M ist eine *Bahn* von σ , wenn gilt

- $\sigma^z(a) \in B$ für alle $a \in B$ und $z \in \mathbb{Z}$
- zu allen $a, b \in B$ gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $\sigma^z(a) = b$ - äquivalent $\sigma^{-z}(b) = a$.

Jedes Element $a \in M$ gehört zu genau einer Bahn und diese ist bestimmt als $\{\sigma^z(a) \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Eine Permutation $\sigma \in S_M$ ist ein *Zyklus* der Länge $l+1$ auf der Teilmenge $B \subseteq \{1, \dots, n\}$, wenn B eine Bahn von σ ist und $\sigma(x) = x$ für $x \notin B$. Anders ausgedrückt, wenn es b und l gibt mit

$$B = \{b, \sigma(b), \dots, \sigma^l(b)\}, \quad |B| = l+1 \quad \text{und} \quad \sigma(x) = x \quad \text{für} \quad x \notin B$$

Dann kann man σ in *Zyklenschreibweise* (wie alles von Rechts nach Links) schreiben als

$$\sigma = [b \leftarrow \sigma^l(b) \leftarrow \dots \leftarrow \sigma(b) \leftarrow b] = (\sigma^l(b) \dots \sigma(b)b)$$

Warnung. Viele Autoren wollen bei den Zykeln zeigen, dass sie auch von Links nach Rechts schreiben können - oder sind einfach inkonsequent, gedankenlos oder autoritätsgläubig. Aber nicht mit uns!

Proposition 19.12 *Für $\sigma \in S_M$ liefern die Bahnen B_1, \dots, B_m von σ die Zykelzerlegung von σ*

$$\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 \quad \text{mit dem Zykeln} \quad \sigma_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } x \in B_i \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Triviale Bahnen, d.h. $|B_i| = 1$, können weggelassen werden.

Beweis der Zerlegung ist trivial. Die Vertauschungsaussage folgt aus dem trivialen Lemma.

Lemma 19.13 *Ist $M = M_1 \cup M_2$ und $\sigma_i \in S_M$ mit $\sigma_i(M_i) = M_i$ und $\sigma_i|_{M_j} = \text{id}_{M_j}$ für $j \neq i$, so gilt $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.*

Beweis: $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(x) = \sigma_1(x)$ falls $x \in M_1$ und $= \sigma_2(x)$ falls $x \in M_2$. \square

19.9 Signum einer Permutation

Für $\sigma \in S_M$ definieren wir das *Vorzeichen* oder *Signum* durch

$$\text{sign } \sigma = \prod_{i=1}^m -1^{l_i-1}$$

wobei die l_1, \dots, l_m die Längen der Bahnen B_1, \dots, B_m von σ sind. σ heisst *gerade*, falls $\text{sign } \sigma = 1$, andernfalls *ungerade*. Eine *Transposition* ist eine Permutation τ mit

$$\tau = (ab) \text{ wobei } \tau(a) = b \neq \tau(b) = a, \tau(x) = x \text{ sonst}$$

und ihre eigene inverse. Es gilt $\text{sign } \tau = -1$.

Proposition 19.14 *sign ist ein Homomorphismus von S_M auf die Gruppe $\{1, -1\}$. Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Dabei ist die Anzahl dieser Transpositionen modulo 2 eindeutig bestimmt, und zwar gerade genau dann, wenn $\text{sign } \sigma = 1$.*

Der Kern von sign ist eine Untergruppe von S_n , die *alternierende Gruppe* A_n der geraden Permutationen. Die Gruppe $\{1, -1\}$ kann als Untergruppe von K^\times aufgefasst werden, wobei K ein beliebiger Körper mit $1+1 \neq 0$ ist. Zum Beweis folgendes Lemma:

Lemma 19.15 *Seien G und H Gruppen, G erzeugt von E , wobei $b^{-1} \in E$ für alle $b \in E$. Eine Abbildung $\phi: G \rightarrow H$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ für alle $a \in G$ und $b \in E$.*

Beweis: Jedes $b \in G$ lässt sich als $b = \prod_{i=1}^k b_i = b_1 \dots b_k$ mit $b_i \in E$ schreiben. Durch Induktion über k folgt für alle $a \in G$: $\phi(a \cdot \prod_{i=1}^k b_i) = \phi((a \cdot \prod_{i=1}^{k-1} b_i) \cdot b_k) = \phi(a \cdot \prod_{i=1}^{k-1} b_i) \cdot \phi(b_k) = \phi(a) \cdot \phi(\prod_{i=1}^{k-1} b_i) \cdot \phi(b_k) = \phi(a) \cdot \phi(\prod_{i=1}^k b_i)$. \square .

Beweis der Prop. Zyklen können wir wie folgt darstellen

$$(b_l \dots b_2 b_1 b_0) = (b_l b_0) \circ \dots \circ (b_2 b_0) \circ (b_1 b_0)$$

Also können wir nach der Zykelzerlegung jede Permutation als Produkt von Transpositionen schreiben und nun das Lemma anwenden. Sei also $\sigma = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1$ eine Zerlegung in Zykeln mit den Bahnen B_1, \dots, B_m mit $|B_i| > 1$ und τ eine Transposition mit Bahn $B = \{a, b\}$. Wir haben zu zeigen, dass $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = -\text{sign } \sigma$. Nur die folgenden 4 Fälle können auftreten, in jedem folgt die Aussage direkt aus der angegebenen Zykelzerlegung für $\sigma \circ \tau$.

Fall 1: $B \cap B_i = \emptyset$ für alle i . Zykelzerlegung $\sigma \circ \tau = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1 \circ \tau$

Fall 2: $B \subseteq B_i$ für genau ein i . Sei $\sigma_i = (b_l \dots b_0)$ und $a = b_h, b = b_k, j < k$. Die Zykelzerlegung von $\sigma \circ \tau$ entsteht aus der von σ , indem σ_i ersetzt wird durch

$$\sigma_i \circ \tau = (b_l b_k b_{h-1} \dots b_0) \circ (b_{k-1} \dots b_h)$$

Fall 3: $|B \cap B_i| = 1$ für genau ein i , etwa $a = b_h$. Hier wird σ_i ersetzt durch

$$\sigma_i \circ \tau = (b_l b_h b b_{h-1} \dots b_0)$$

Fall 4: $|B \cap B_i| = 1 = |B \cap B_j|$ für eindeutig bestimmtes $\{i, j\}$ mit $i \neq j$. Etwa $a = b_h, \sigma_j = (c_r \dots c_0), b = c_k$. Hier wird $\sigma_j \circ \sigma_i$ ersetzt durch

$$\sigma_j \circ \sigma_i \circ \tau = (b_l \dots b_{h+1} c_{k-1} \dots c_r \dots c_k b_h \dots b_0)$$

Korollar 19.16 Sei $\tau \in S_n \setminus A_n$ ein fest gewählte Permutation. Dann ist $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eine Bijektion von A_n auf $S_n \setminus A_n$.

Beweis. $\text{sign } \sigma \circ \tau = 1 \cdot -1 = -1$, also $\sigma \circ \tau \notin A_n$. Die Umkehrabbildung ist $\rho \mapsto \rho \circ \tau^{-1}$.

Korollar 19.17 $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ist eine Bijektion von S_n auf sich und $\text{sign } \sigma^{-1} = \text{sign } \sigma$.

Beweis. Die Abbildung ist selbstinvers und die zweite Behauptung folgt aus $\text{sign } \sigma^{-1} \cdot \text{sign } \sigma = \text{sign } (\sigma^{-1} \circ \sigma) = \text{sign id} = 1$.

20 Determinanten

20.1 Regeln

Seien der Körper K und eine natürliche Zahl n gegeben. Eine (normierte) *Determinantenform* ist eine Abbildung \det , die jeder $n \times n$ -Matrix A

$$A = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n)$$

über K einen Skalar

$$|A| = \det A = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

aus K zuordnet so, dass die folgenden Regeln gelten:

$$(D1) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$$

$$(D2) \det(\mathbf{a}_1, \dots, r\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = r \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$$

d.h. \det ist linear in jeder Spalte. Eine Determinante mit zwei benachbarten gleichen Spalten ist Null:

$$(D3) \det(\dots, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots) = 0.$$

$$(D4) \det E_n = 1.$$

Ob's sowas gibt, wissen wir vorerst nicht, ziehen aber munter unsere Folgerungen über "die Determinante".

Eine Determinante mit zwei gleichen Spalten ist Null:

$$(D3^+) \det(\dots, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}, \dots) = 0.$$

(D5) Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen addiert;

(D6) Die Determinante ändert das Vorzeichen, d.h. man muss mit -1 multiplizieren, wenn man zwei Spalten vertauscht.

Beweis: Wir zeigen zunächst (D5) und (D6) für den Fall, dass die j -te und k -te Spalte benachbart sind.

$$\begin{aligned} \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, r\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k, \dots) &=_{(D1)} \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, r\mathbf{a}_j, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &=_{(D2)} r \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) =_{(D3)} 0 + \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) \\ &= \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_j, \dots) \\ &=_{(D5)} \det(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k, \dots) + \det(\dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_j, \dots) \\ &=_{(D1)} \det(\dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_j, \dots) =_{(D3)} 0. \end{aligned}$$

Hat man (D6) für benachbarte Spalten, so folgt (D3⁺) aus (D3) durch Induktion über den Positions-Abstand der zwei gleichen Spalten

$$\det(\dots \mathbf{a} \dots \mathbf{b} \mathbf{a} \dots) = -\det(\dots \mathbf{a} \dots \mathbf{a} \mathbf{b} \dots) = 0$$

Und dann folgen (D5) und (D6) mit obigem Beweis allgemein. \square

20.2 Eindeutigkeit und Berechnung

Satz 20.1 Zu gegebenem n und K gibt es höchstens eine normierte Determinantenform. Man berechnet $\det A$ durch Umformen nach (D5) und (D6) auf Dreiecksform (mit Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel) und dann Produkt über die Diagonale. Es gilt $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

Beweis. Durch (elementare) Spaltenumformungen nach (D5) und (D6) kann man A in eine Matrix A' in unterer Stufenform mit $\det A' = \det A$ oder $\det A' = -\det A$ überführen - und man weiß, welcher Fall vorliegt. Hat A' eine Spalte $\mathbf{0}$, so $\det A' = 0$ nach (D2). Andernfalls handelt es sich wegen der Stufenform um eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii} \neq 0$ und man hat nach (D2) $\det A' = a'_{11} \cdot \dots \cdot a'_{nn} \det A''$, wobei A'' untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen 1 ist. Weitere Umformung nach (D5) überführt A'' in E_n , also $\det A'' = \det E_n = c$.

Nach Gauß-Jordan ist A genau dann invertierbar, wenn A' eine (strikte) untere Dreiecksmatrix ist, d.h. $\det A = \det A' \neq 0$.

Korollar 20.2 Eine Abbildung von $K^{n \times n}$ in K , die (D2), (D5) und (D6) erfüllt, ist durch ihren Wert an der Stelle E_n schon eindeutig bestimmt.

20.3 Cramersche Regel

Ist $\det A \neq 0$, so erhält man die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ durch

$$x_j = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) / \det A.$$

Beweis. $\mathbf{b} = \sum x_i \mathbf{a}_i$, also nach (D5) durch Subtraktion der $x_i \mathbf{a}_i$, $i \neq j$,

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, x_j \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = x_j \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

20.4 Produktsatz.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Beweis. Sei A fest, B variabel. Die Abbildung $\mathbf{b} \mapsto A\mathbf{b}$ erfüllt (M1) und (M2), also erfüllen beide Abbildungen

$$B \mapsto \det AB \quad \text{und} \quad B \mapsto \det A \cdot \det B$$

die Bedingungen (D1-3) und $E_n \mapsto \det A$. Daher stimmen nach Kor.20.2 sie überein. \square

Wir vermerken die wichtigen Spezialfälle

Korollar 20.3

$$\det(rA) = r^n \det A, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad \det(S^{-1}AS) = \det(A).$$

20.5 Permutationsmatrizen

Ist $\sigma \in S_n$ so ist die *Permutationsmatrix* $P_\sigma \in K^{n \times n}$ dadurch definiert, dass in AP_σ die j -te Spalte von A durch die $\sigma(j)$ -te ersetzt wird. Also entsteht AP_σ aus A , indem die $\sigma(\tau(j))$ -te Spalte in die Position $\tau(j)$ rückt, und daraus $AP_\sigma P_\tau$, indem die Spalte von der Position $\tau(j)$ in die Position j weiterrückt. Somit

$$P_{\sigma\sigma\tau} = P_\sigma \cdot P_\tau$$

P_σ ist *elementar*, wenn σ Transposition ist.

Korollar 20.4 Die Permutationsmatrizen bilden eine via $\sigma \mapsto P_\sigma$ zu S_n isomorphe Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, K)$. Jede Permutationsmatrix P_σ hat $\det P_\sigma = \mathbf{sign} \sigma = \pm 1$ und ist Produkt elementarer Vertauschungsmatrizen.

20.6 Explizite Formel

Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathbf{sign} \sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Für $n = 3$ heisst das die *Sarrus'sche Regel*. Ist $1 + 1 = 0$ in K so verstehen wir $\mathbf{sign} \sigma$ einfach als $1 = -1 \in K$.

Beweis. Sei N^N die Menge aller Abbildungen von N nach N . Mit (D1,2) erhält man sofort folgende Gleichung und daraus die Behauptung mit (D3).

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i_1, \dots, i_n = 1, \dots, n} a_{i_1 1} \cdot \dots \cdot a_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \\ &= \sum_{\phi \in N^N} \prod_{j=1}^n a_{\phi(j), j} \det(\mathbf{e}_{\phi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\phi(n)}). \end{aligned}$$

20.7 Existenz

Wir können die Determinante durch die Explizite Formel definieren und die Axiome (D1)-(D4) nachprüfen.

Zu (D1) mit $j = 1$: Sei $c_{i1} = a_{i1} + b_{i1}$ und $c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ für $j > 1$. Dann

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) c_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot c_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) (a_{\sigma(1)1} + b_{\sigma(1)1}) \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) b_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} = \det A + \det B \end{aligned}$$

Zu (D2) mit $j = 1$: Sei $c_{i1} = r a_{i1}$ und $c_{ij} = a_{ij}$ für $j > 1$. Dann

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) c_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot c_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) r a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot c_{\sigma(n)n} \\ &= r \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot c_{\sigma(n)n} = r \det A \end{aligned}$$

Zu (D3). Sind z.B. die ersten beiden Spalten gleich, so gilt mit $\tau = (21)$

$$a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} = a_{\sigma(\tau(1))1} \cdot a_{\sigma(\tau(2))2}, \quad a_{\sigma(j)j} = a_{\sigma(\tau(j))j} \text{ für } j > 1$$

Die $\sigma \circ \tau$, $\sigma \in A_n$ durchlaufen nach Kor.19.16 gerade einmal S_n und es gilt $\text{sign } \sigma = 1$, $\text{sign } \sigma\tau = -1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{(\sigma \circ \tau)(1)1} \cdot a_{(\sigma \circ \tau)(2)2} \cdot \dots \cdot a_{(\sigma \circ \tau)(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} (a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} - a_{(\sigma \circ \tau)(1)1} \cdot a_{(\sigma \circ \tau)(2)2} \cdot \dots \cdot a_{(\sigma \circ \tau)(n)n}) = 0 \end{aligned}$$

(D1) ist trivial: in allen Produkten, ausser dem zu $\sigma = \text{id}$, taucht ein Faktor 0 auf. \square

20.8 Transponieren und Zeilenumformungen

Satz 20.5 $\det A = \det A^t$ und die Regeln (D1)- (D6) gelten entsprechend für Zeilenumformungen

Korollar 20.6 $\det(S^t A S) = (\det S)^2 \det A$

Beweis. Sei $B = A^t$, d.h. $b_{ij} = a_{ji}$. Da die $\sigma(j)$ mit $j = 1, \dots, n$ die Menge $\{1, \dots, n\}$ gerade einal durchlaufen, haben wir

$$\begin{aligned} (\text{sign } \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} &= (\text{sign } \sigma) \cdot a_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)} \\ &= (\text{sign } \sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} \end{aligned}$$

mit Kor.19.17 und weiterhin

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) \cdot b_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot b_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} (\text{sign } \sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} = \det A \end{aligned}$$

20.9 Entwicklung

Als zweckmässige Notation führt man ein: Der *Minor* $A^{k\wedge l}$ ist die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man aus A durch Weglassen der k -ten Zeile und l -ten Spalte erhält. Dann hat man die Entwicklung nach der j -ten Spalte bzw. der i -ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{i\wedge j}, \quad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{i\wedge j}$$

Die Faktoren $(-1)^{i+j}$ merkt man sich am besten nach der 'Schachbrettregel'

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Beweis für Spaltenentwicklung - Zeilen durch Transponieren. Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ die Spalten von A und j fest. Dann $\mathbf{a}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nj}\mathbf{e}_j$, also wegen (D1-2)

$$\det A = a_{1j} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + \dots + a_{nj} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{a}_n)$$

wobei jeweils die j -te Spalte ersetzt wurde. Durch Subtraktion des a_{ik} -fachen der j -ten Spalte von jeweils der k -ten werden alle Einträge der i -ten Zeile 0, ausser der 1 in der j -ten Spalte. Durch $i+j$ Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen bringen wir diese 1 in die linke obere Ecke und haben

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A^{i\wedge j} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det A^{i\wedge j}.$$

Für den letzten Schluss benutzen wir wieder die Eindeutigkeit, hier für $n-1$ und die Abbildung

$$B \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}, \quad B \in K^{(n-1) \times (n-1)}$$

20.10 Adjungierte Matrix

$$(adA)A = (\det A)E_n \quad \text{mit } adA = ((-1)^{i+j} \det A^{i\wedge j})^t$$

Beweis. Die Berechnung des j -ten Diagonalelements von $(adA)A$ entspricht gerade dem Entwickeln nach der j -ten Spalte. Um zu sehen, dass in Position j, k mit $k \neq j$ eine Null steht, betrachte man die Matrix B , die aus A entsteht, wenn man die k -te Spalte durch die j -te ersetzt - und selbige beibehält. Dann ist $A^{i\wedge k}$ gleich $B^{i\wedge j}$ bis auf eine (für alle i gleiche) Vertauschung und man erhält den Eintrag bis auf das Vorzeichen als die Entwicklung von B nach der j -ten Spalte, was aber wegen zweier gleicher Spalten Null ergibt. \square

20.11 Existenz: alternativ

. Im Falle $n=1$ sei $\det A = a_{11}$. Sei nun \det für $n-1$ schon definiert. Definiere für $n \times n$ Matrizen $\det A$ durch die Entwicklung nach der ersten Zeile. Beim Nachweis von (D1-2) betrachten wir festes j und Matrizen A, B, C mit Spalten $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k = \mathbf{c}_k$

für alle $k \neq j$, also $A^{1\wedge j} = B^{1\wedge j} = C^{1\wedge j}$. Gilt $\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j$, so folgt mit Induktion $\det C^{1\wedge k} = \det A^{1\wedge k} + \det B^{1\wedge k}$ für $k \neq j$ und man berechnet

$$\begin{aligned} \det C &= (-1)^{1+j}(a_{1j} + b_{1j}) \det C^{1\wedge j} + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} a_{1k} \det C^{1\wedge k} \\ &= (-1)^{1+j}(a_{1j} \det A^{1\wedge j} + b_{1j} \det B^{1\wedge j}) + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A^{1\wedge k} + B^{1\wedge k}) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det A^{1\wedge j} + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} a_{1k} \det A^{1\wedge k} \\ &\quad + (-1)^{1+j} b_{1j} \det B^{1\wedge j} + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} b_{1k} \det B^{1\wedge k} \\ &= \det A + \det B \end{aligned}$$

Gilt $\mathbf{c}_j = r\mathbf{a}_j$, so gilt nach Induktion $\det C^{1\wedge k} = r \det A^{1\wedge k}$ für $k \neq j$ und somit

$$\begin{aligned} \det C &= (-1)^{1+j} r a_{1j} \det C^{1\wedge j} + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} a_{1k} \det C^{1\wedge k} \\ &= (-1)^{1+j} r a_{1j} \det A^{1\wedge j} + \sum_{k \neq j} (-1)^{1+k} a_{1k} r \det A^{1\wedge k} = r \det A \end{aligned}$$

Hat A zwei gleiche Spalten $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_l$, $l = k + 1$, so gilt das auch für alle $A^{1\wedge j}$ mit $j \neq k, l$, also $\det A^{1\wedge j} = 0$. Die Minoren $A^{1\wedge k}$ und $A^{1\wedge l}$ stimmen überein und treten mit demselben Vorfaktor $a_{1k} = a_{1l}$ aber entgegengesetztem Vorzeichen in der Entwicklung auf. Also $\det A = 0$.

Schliesslich $\det E_n = (-1)^2 \det(E_n)^{1\wedge i} + \sum_{j \neq i} 0 \det(E_n)^{1\wedge j} = \det E_{n-1} = 1$.

20.12 Transponieren: alternativ

Beweis. Wir betrachten jeweils eine (D2), (D5), bzw. (D6) entsprechende Zeilenumformung $A \mapsto z(A)$, d.h. $z(A)$ entsteht aus A indem

- (a) die i -te Zeile mit s multipliziert wird (i und s fest)
- (b) das s -fache der i -ten Zeile zur l -ten addiert wird ($i \neq l$ und s fest)
- (c) die i -te und die l -te Zeile vertauscht werden ($i \neq l$ fest)

Wir behaupten, dass die Abbildung $A \mapsto \det(z(A))$ jeweils (D2), (D5) und (D6) erfüllt. Dazu genügt es zu beobachten, dass in allen drei Fällen

$$\begin{aligned} z(\mathbf{a}_1, \dots, r\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) &= (z(\mathbf{a}_1), \dots, rz(\mathbf{a}_j), \dots, z(\mathbf{a}_n)) \\ z(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, r\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k, \dots) &= (\dots, z(\mathbf{a}_j), \dots, rz(\mathbf{a}_j) + z(\mathbf{a}_k), \dots) \\ z(\dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots) &= (\dots, z(\mathbf{a}_j), \dots, z(\mathbf{a}_k), \dots) \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass für jede Umformung z nach (a), (b) bzw. (c) die Abbildung $A \mapsto \det(z(A))$ mit einer (passenden) der Abbildungen

$$A \mapsto s \det(A), \quad A \mapsto \det(A), \quad A \mapsto -\det(A)$$

übereinstimmt. Letztere erfüllen offensichtlich (D2), (D5) und (D6). Wegen Kor.20.2 haben wir daher die Übereinstimmung nur an der Stelle E_n nachprüfen. Das ist aber nicht schwer.

Somit haben wir für $A \mapsto \det(A)$ die (D2), (D5) und (D6) entsprechenden Regeln für Zeilenumformungen bewiesen. Es folgen (D2), (D5) und (D6) für $A \mapsto \det(A^t)$. Für E_n erhalten wir 1 und haben daher $\det(A^t) = \det(A)$ nach Kor.20.2. \square

21 Lineare Gleichungssysteme

21.1 Geraden in der Ebene

Hat man in der Ebene ein Koordinatensystem $\alpha : O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ gewählt, so kann man Geraden durch Koordinatengleichungen beschreiben. Sind a_1, a_2 , nicht beide 0, und b im Skalarenkörper fest gewählt, so bilden die Punkte

$$X \quad \text{mit} \quad X^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

eine Gerade g . Mithilfe des Matrizenprodukts sieht's so aus

$$g = \{X \mid (a_1 \ a_2) \cdot X^\alpha = b\}$$

Und jede Gerade g kann man so beschreiben - dabei sind die a_1, a_2, b bis auf einen gemeinsamen Faktor $c \neq 0$ eindeutig bestimmt. Die Geraden durch O sind gerade die mit $b = 0$. Die Gerade g' mit Koordinatengleichung $a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = b'$ ist zu g parallel genau dann, wenn es ein $c \neq 0$ gibt mit $a'_1 = ca_1$ und $a'_2 = ca_2$.

Zum Beweis gehen wir davon aus, dass Geraden durch Parameterdarstellungen beschrieben werden und betrachten zunächst die Ursprungsgeraden mit Parameterdarstellung

$$g = \{X = r\vec{v} + O \mid r \in \mathcal{S}\} \quad \text{mit Richtungsvektor } \vec{v} \neq \vec{0}$$

Mit

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \vec{v}^\alpha \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

erhält man eine Koordinatengleichung für g und umgekehrt aus der Koordinatengleichung einen Richtungsvektor. In der Tat

$$X \in g \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{S}. X = r\vec{v} + O \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{S}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^\alpha = r\vec{v}^\alpha = r \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{S}. x_1 = ra_2 \wedge x_2 = -ra_1 \Leftrightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

In der Tat, ist $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ so wähle man

$$r = -\frac{x_2}{a_1} \text{ falls } a_1 \neq 0, \quad r = -\frac{x_1}{a_2} \text{ falls } a_2 \neq 0$$

- eines von beiden tritt ein, das $\vec{v} \neq \vec{0}$ vorausgesetzt war.

Die Richtungsvektoren von g sind nun gerade die $c\vec{v}$ mit $c \neq 0$, entsprechend den Koordinatengleichungen $ca_1 x_1 + ca_2 x_2 = 0$.

Die Parallele h zu g durch P hat die Parameterdarstellung

$$h = \{X = r\vec{v} + P \mid r \in \mathcal{S}\}$$

Mit

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad X^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PX}^\alpha = X^\alpha - P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} X \in h &\Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{S}. \overrightarrow{PX} = r\vec{v} \Leftrightarrow a_1(x_1 - p_1) = a_2(x_2 - p_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1x_1 + x_2x_2 = a_1p_1 + a_2p_2 \Leftrightarrow (a_1 \ a_2) \cdot X^\alpha = (a_1 \ a_2) \cdot P^\alpha \end{aligned}$$

Ist eine Koordinatengleichung gegeben

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad \text{und} \quad a_1p_1 + a_2p_2 = b$$

so beschreibt sie diese Gerade. Solche p_1, p_2 kann man immer finden: Ist $a_1 \neq 0$, so wähle man p_2 beliebig und

$$p_1 = \frac{1}{a_1}(b - a_2p_2)$$

21.2 Ebenen im Raum

Entsprechendes gilt für Ebenen ε im Raum: Jede Ebene im Raum wird durch eine, bis auf einen Faktor c eindeutig bestimmte Koordinatengleichung beschrieben

$$X^\alpha \in \varepsilon \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad \text{wobei nicht alle } a_i = 0$$

und jede solche Gleichung beschreibt eine Ebene. Ist die Gleichung gegeben, so bestimme man unabhängige Vektoren \vec{v}, \vec{w} und Punkt P mit

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \vec{v}^\alpha = 0, \quad (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \vec{w}^\alpha = 0, \quad (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \vec{P}^\alpha = 0$$

um eine Parameterdarstellung von ε zu erhalten

$$\varepsilon = \{r\vec{v} + s\vec{w} + P \mid r, s \in \mathcal{S}\}$$

Ist z.B. $a_1 \neq 0$, so kann man z.B. v_3, w_2, p_3 beliebig wählen und

$$\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1}a_3v_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1}a_2w_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}(b - a_3p_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist die Parameterdarstellung gegeben, d.h.

$$\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

so finde man eine nichtriviale Lösung a_1, a_2, a_3 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\ a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 &= 0 \end{aligned}$$

und setze

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = b$$

um die Koordinatengleichung für ε zu erhalten

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

21.3 Lösungsraum eines Gleichungssystems

Sei K ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* von m Gleichungen in n Variablen x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten in K wird angegeben in der Form

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{mit } A \in \text{Mat}(m, n, K), \mathbf{b} \in K^m$$

Sein *Lösungsraum* ist

$$\{\mathbf{x} \in K^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist *homogen* und heisst auch das zu A (oder $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gehörige homogene System.

- Der Lösungsraum eines homogenen Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist ein Untervektorraum U von K^n - insbesondere hat man die *triviale Lösung* $\mathbf{0}$. Eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ von U heisst auch ein *Fundamentalsystem* von Lösungen und man hat die *allgemeine Lösung* in der Form

$$\mathbf{x} = r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k \quad \text{mit Parametern } r_i \in K$$

- Der Lösungsraum von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist dann affiner Teilraum von K^n

$$U + \mathbf{s} \quad \text{wobei } \mathbf{s} \text{ beliebige } \textit{spezielle Lösung} \text{ d.h. } A\mathbf{s} = \mathbf{b}$$

d.h. die *allgemeine Lösung* von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist von der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{s}, \quad \mathbf{x}_h \text{ allg. Lsg. des homogenen Systems, } \mathbf{s} \text{ spezielle Lsg.}$$

was immer man sich bei diesem altertümlichen Gerede denken mag. Beweis. Aus $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$ folgen $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und $A(r\mathbf{v}) = rA\mathbf{v} = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Gelte $A\mathbf{s} = \mathbf{b}$. Wenn $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$, dann $A(\mathbf{x}_h + \mathbf{s}) = A\mathbf{x}_h + A\mathbf{s} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Gilt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dann $A(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

21.4 Umformungen

Die l -Zeilen über K bilden einen Vektorraum $K^{l*} = K^{1 \times l}$, der Dimension l - der auf offensichtliche Weise zum Raum K^n der Spalten isomorph ist. Entsprechend den elementaren Umformungen von Listen von Vektoren in diesen Raum hat die elementaren Zeilenumformungen einer $m \times l$ -Matrix.

Der *Rang* der Matrix A bzw. des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist die Dimension des von den Zeilen von A erzeugten Untervektorraums von K^{*m} .

Mit $(A|\mathbf{b})$ notieren wir die um die Spalte \mathbf{b} erweiterte Matrix A .

Satz 21.1 *Entsteht $(C|\mathbf{d})$ aus $(A|\mathbf{b})$ durch elementare Zeilenumformungen und Weglassen oder Hinzufügen von Nullzeilen, so haben die Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ denselben Lösungsraum in K^n und denselben Rang.*

Beweis. Wegen der Umkehrbarkeit der Umformungen genügt es zu zeigen: Ist \mathbf{v} Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und entsteht $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ durch einen Umformungsschritt, so ist \mathbf{v} auch Lösung von $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Werde z.B. zur k -ten Zeile $(A_k|b_k)$ das r -fache der l -ten, $(A_l|b_l)$, addiert. Dann

$$(A_k + rA_l)\mathbf{v} = A_k\mathbf{v} + rA_l\mathbf{v} = b_k + rb_l$$

21.5 Beispiel

Beispiel 1 ist homogenes Gleichungssystem, die nächsten beiden Spalten geben die rechten Seiten für Beispiel 2 und 3 an. Man kann die Lösung aus der Stufenform durch Rücksubstitution bestimmen oder aus der ausgeräumten Stufenform direkt ablesen.

Beispiel 1. Die letzten beiden Gleichungen der Stufenform können weggelassen werden und man kann $x_5 = r$ frei wählen. Aus der dritten Gleichung folgt dann $x_4 = r$ und aus der zweiten weiterhin $x_3 = \frac{7}{2}r$. Man kann nun $x_2 = s$ ebenfalls frei wählen und erhält aus der ersten Gleichung $x_1 = -\frac{3}{2}r - 2s$. Wir haben also unendlich viele Lösungen mit zwei 'Freiheitsgraden', hier ausgedrückt durch die beiden freien Parameter $x_5 = r$, $x_4 = s$. In Spaltenform hat man

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r \\ 0 \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also allgemeine Lösung

$$\mathbf{x} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad r, s \text{ in } K \quad \text{mit } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2. keine Lösung wegen Gleichung $0 = 2$.

Beispiel 3. Im umgeformten System sind die letzten beiden Gleichungen von der Form $0 = 0$, können also weggelassen werden. Wie in Beispiel 1 können wir $x_5 = r$ frei wählen und erhalten dann aus der dritten Gleichung $x_4 = 1 + r$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r$. Nun ist $x_2 = s$ wieder frei wählbar und $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s$ aus der ersten Gleichung. In Spaltenform

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r \\ 1 + r \\ r \end{pmatrix} = \mathbf{a} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} \quad \text{mit } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und \mathbf{v}, \mathbf{w} aus Beispiel 1. Der Lösungsraum des Gleichungssystems bzw. die allgemeine Lösung lässt sich also so angeben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} \quad \text{mit } r, s \text{ in } K.$$

21.6 Stufenform

Ein Gleichungssystem in (oberer) *Stufenform* ist von der Gestalt

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1j_1}x_{j_1} + & \dots & a_{1j_2}x_{j_2} + & \dots & a_{1j_i}x_{j_i} + & \dots & a_{1j_\rho}x_{j_\rho} + & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\
 & & a_{2j_2}x_{j_2} + & \dots & a_{2j_i}x_{j_i} + & \dots & a_{2j_\rho}x_{j_\rho} + & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{ij_i}x_{j_i} + & \dots & a_{ij_\rho}x_{j_\rho} + & \dots & +a_{in}x_n = & b_i \\
 & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{rj_\rho}x_{j_\rho} + & \dots & +a_{rn}x_n = & b_\rho \\
 & & & & & & & & & 0 = b_{\rho+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & 0 = 0
 \end{array}$$

mit Zahlen $a_{ij_i} \neq 0$ rechts neben den Stufenkanten, den *Pivots*. Die entsprechenden Variablen x_{j_i} heissen *Pivotvariable*, die anderen Variablen x_j heissen *Parametervariable* und wir schreiben $j \in \text{Par}$. Die Zahl ρ ist der *Rang* des Systems. Für $\rho = m$ hat man keine Gleichungen $0 = b_l$. Bei *ausgeräumter* Stufenform hat man für alle Pivots

$$a_{ij_i} = 1, \quad a_{kj_i} = 0 \text{ für } k \neq i$$

Die entsprechenden Begriffe für Zeilen einer Matrix A ergeben sich, wenn man sie als Koeffizientenmatrix eines homogenen Systems auffasst. Man spricht dann von *unterer Stufenform* oder *Zeilen-Stufenform*.

21.7 Fang-Cheng alias Gauss-Algorithmus

Gegeben eine Matrix A , sei $n_0 \geq 0$ maximal so, dass die ersten n_0 Spalten von A eine Stufenmatrix bilden mit den Pivotstellen $j_i, i \leq p$. Die Matrixumformung $A \rightsquigarrow A'$ heisst nun ein *Gauss-Schritt*, wenn $n_0 < n$ und einer der folgenden Fälle vorliegt

$$\begin{array}{l}
 Z(p+1) \leftrightarrow Zl], \quad l > p+1, \quad a_{p+1, n_0+1} = 0, \quad a_{l, n_0+1} \neq 0 \\
 Zk := Zk + (-rs^{-1})Z(p+1), \quad k > p+1, \quad a_{p+1, n_0+1} = s \neq 0, \quad a_{k, n_0+1} = r \neq 0
 \end{array}$$

Dabei steht Zl für die l -te Zeile; also werden entweder die Zl und $Z(p+1)$ vertauscht oder zu Zk ein Vielfaches von $Z(p+1)$ addiert. Das kann man durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix T beschreiben: $A' = TA$.

Eine Anwendung des *Gauss-Algorithmus* mit t -Schritten auf eine Matrix A besteht in einer Folge $A_1 = T_1A, \dots, A_t = T_tA_{t-1}$ von Gauss-Schritten. Sie *terminiert* mit A_t , wenn A_t keinen weiteren Gauss-Schritt zulässt.

Satz 21.2 *Jede Anwendung des Gauss-Algorithmus auf eine $m \times n$ -Matrix terminiert nach höchstens $q(m - \frac{1}{2}(q+1))$, $q = \min\{n, m\}$ Schritten mit einer Stufenmatrix.*

Beweis. Induktion über Anzahl der Zeilen von A . Sei eine Anwendung $A_1 = T_1A, \dots, A_t = T_tA_{t-1}$ des Gauss-Algorithmus mit mehr als $q(m - \frac{1}{2}(q+1))$ Schritten gegeben. Nach $h \leq m-1$ Schritten erhält man dabei eine Matrix $A' = A_h$ mit $a'_{i1} = 0$ für alle $i > 1$. Ist $a'_{11} \neq 0$, so lasse man in A_h und den $T_i, i > h$ die erste Zeile und Spalte weg: man erhält eine Anwendung des Gauss-Algorithmus für $(m-1) \times (n-1)$ -Matrizen und einen

Widerspruch zur nach Induktionsannahme maximal möglichen Schrittzahl. Ist $a'_{11} = 0$, so $h = 0$ und $A' = A$ und man erhält ebenso einen Widerspruch durch Weglassen der ersten Spalte. \square

Rechnet man in \mathbb{Q} oder \mathbb{R} , so nimmt man aus numerischen Gründen zusätzliche Vertauschungen vor, muss also auf andere Art das Terminieren sichern.

Korollar 21.3 *Jede Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen in eine ausgeräumte Stufenmatrix überführt werden. (Die ist sogar eindeutig bestimmt.)*

Korollar 21.4 *Der Rang einer $m \times n$ -Matrix A ist die Dimension (Spalten-Rang) des von den Spalten von A erzeugten Untervektorraums von K^n (Spaltenraum).*

Beweis. Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Spalten ändert sich bei Zeilenumformungen nicht, also auch nicht der Spaltenrang. Und für eine ausgeräumte Stufenform wird der Spaltenraum gerade von den Pivotspalten erzeugt. \square

21.8 Scholia

Satz 21.5 *Für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in ausgeräumter Stufenform gilt*

- *Das homogene System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat die allgemeine Lösung \mathbf{x}_h mit*

$$\begin{aligned} x_j &= r_j && \text{Parameter, falls } j \in \text{Par} \\ x_{j_i} &= -\sum_{j_i < j \in \text{Par}} a_{ij} r_j && \text{falls } j_i \text{ Pivot} \end{aligned}$$

- *Ein System $\mathbf{v}_t, t \in \text{Par}$ von $n - \rho$ Fundamentallösungen für $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erhält man, indem man jeweils einen Parameter = 1 setzt, alle anderen = 0. Also hat man einen $n - \rho$ -dimensionalen Lösungsraum.*

$$(\mathbf{v}_t)_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = t \\ -a_{it} & \text{falls } j = j_i < t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- *Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist unlösbar, genau dann, wenn $b_{\rho+1} \neq 0$. Ist $b_{\rho+1} = 0$ so hat man die allgemeine Lösung*

$$\begin{aligned} x_j &= r_j && \text{Parameter, falls } j \in \text{Par} \\ x_{j_i} &= b_i - \sum_{j_i < j \in \text{Par}} a_{ij} r_j && \text{falls } j_i \text{ Pivot} \end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass man durch die angegebenen Spalten $\mathbf{v}_j, j \in \text{Par}$, in der Tat eine Basis des Lösungsraums von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erhält. Fasst man die $n - \rho$ Spalten zu einer Matrix zusammen, so hat man eine Untermatrix $E_{n-\rho}$, also lineare Unabhängigkeit. Und $\mathbf{x} = \sum_{t \in \text{Par}} r_t \mathbf{v}_t$

Satz 21.6 • *Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in n -Variablen ist $n - \text{Rang } A$*

- *Ein homogenes System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn A invertierbar ist.*

- Ein System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist - die Lösung ist dann $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist lösbar genau dann, wenn \mathbf{b} Linearkombination der Spalten von A ist, d.h. wenn $\text{Rang } A = \text{Rang}(A|\mathbf{b})$
- Für eine invertierbare Matrix Q , z.B. eine Permutationsmatrix gilt

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A Q \mathbf{y} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} = Q \mathbf{y}$$

- Gilt $PAQ = LR$ mit invertierbaren P, Q, L so

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad R \mathbf{y} = L^{-1} P \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} = Q \mathbf{y}$$

Letzteres besagt, dass Spaltenvertauschungen legitim sind, wenn sie im Ergebnis berücksichtigt werden. Die LR Zerlegung für Gleichungssysteme erfolgt natürlich mit oberer Stufenmatrix R , unter Dreiecksmatrix L mit 1-Diagonale (leicht zu invertieren) und Permutationsmatrizen P, Q - Q für eventuelle Spaltenvertauschungen. Die Zerlegung ist von Vorteil, wenn mehrere Gleichungssysteme mit demselben A gelöst werden sollen.

21.9 Numerische Probleme *

Rechnet man mit reellen Zahlen nicht exakt, sondern mit numerischen Näherungswerten, so ist das Verfahren zu modifizieren, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Bei der Auswahl der Pivots: man wähle diese betragsmässig möglichst gross, eventuell sogar unter Vertauschung von Variablen (was man natürlich bei der Darstellung des Ergebnisses berücksichtigen muss). Der Grund: man muss ja durch die Pivots dividieren, und bei betragsmässig kleinen Zahlen wirken sich auch kleine Rundungs- oder Messfehler gravierend im Kehrwert aus. Beispiel:

$$(I) 0.0001x + y = 1, \quad (II) x + y = 1.9999$$

Die exakte Lösung ist $x = 1, y = 0.9999$. Rechnet man aber $(II') = (II) - 10000(I)$ und daraus $y \approx 1$, so erhält man $x \approx 0$, also eine deutliche Abweichung von der richtigen Lösung. Vertauscht man die Gleichungen, $(I') = (II)$ und $(II') = (I)$ und rechnet dann $(II'') = (II') - 0.0001(I')$ so erhält man näherungsweise $y \approx 1$ und dann aus (I') auch $x \approx 1$.

Es gibt aber auch (schlecht konditionierte) Probleme, bei denen das nicht hilft, z.B. die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden mit annähernd gleicher Steigung in der Ebene (schleifender Schnitt). Beispiel

$$(I) x + y = 2, \quad (II) x + 1.0001y = 2.0001$$

Die exakte Lösung ist $y = 1, x = 1$. Eine leichte Störung der Daten kann jedoch das Ergebnis dramatisch verändern. Ersetzt man (II) durch $x + 1.0001y = 2.0002$, so ist die exakte Lösung $y = 2, x = 0$. Ersetzt man (II) durch $x + y = 2.0001$, so gibt es überhaupt keine Lösung. Ersetzt man (II) durch $x + y = 2$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

21.10 Dualraum und duale Basis

Ein *Tensor erster Stufe* oder Linearform auf einem K -Vektorraum V ist eine K -lineare Abbildung ϕ von V in den K -Vektorraum K , d.h. es ϕ ist ein Vektörlifresser und es gilt für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $r \in K$

$$\phi(\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\vec{v}) + \phi(\vec{w}), \quad \phi(r\vec{v}) = r\phi(\vec{v})$$

Die Linearformen bilden einen Untervektorraum des Funktionenraums K^V und damit einen K -Vektorraum V^* , den *Dualraum* zu V :

$$(\phi + \psi)(\vec{v}) = \phi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}), \quad (r\phi)(\vec{v}) = r(\phi(\vec{v})) \quad \omega(\vec{v}) = \vec{0}$$

Sei nun $\alpha : \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine Basis von V . Dann gibt es zu jeder Linearform ϕ auf V eindeutig bestimmte a_1, \dots, a_n in K so, dass

$$\phi(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \text{ für alle } x = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \text{ in } V.$$

Nämlich $a_j = \phi(\vec{e}_j)$. Umgekehrt wird durch gegebene a_1, \dots, a_n in K auf diese Weise auch eine Linearform definiert. Somit erhält man einen Isomorphismus zwischen V^* und dem Zeilen-Vektorraum K^{n*}

$$\phi \mapsto \phi_\alpha = (\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_n))$$

$$\phi(\vec{x})^\alpha = \phi_\alpha \vec{x}^\alpha = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Die Entsprechung zwischen der Basis α von V und der kanonischen Basis von K^n

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$$

wird dabei ergänzt durch die Entsprechung zwischen der zu α *dualen Basis* α^* von V^* und der kanonischen Basis von K^{n*}

$$\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^* \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$$

wobei \vec{e}_j^* die j -te Koordinatenform bzgl. α ist

$$\vec{e}_j^* \left(\sum_i x_i \vec{e}_i \right) = x_j$$

Somit: Die zu der Basis $\alpha : \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ von V *duale* Basis $\alpha^* : \vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*$ (auch als $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ notiert) ist bestimmt durch die Bedingungen

$$\vec{e}_j^*(\vec{e}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Sei nun $\beta : \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ eine weitere Basis von V und ${}_\alpha T_\beta$ die Transformationsmatrix mit $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Für die Koordinaten ϕ_α und ϕ_β der Tensoren $\phi \in V^*$ bzgl. der dualen Basen α^* und β^* erhält man aus

$$\phi(\vec{x}) = \phi_\alpha \vec{x}^\alpha = \phi_\alpha {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$$

$$\phi_\beta = \phi_\alpha \alpha T_\beta$$

also $\phi_\alpha = \phi_\beta^{-1}$. Anders ausgedrückt:

Die Koordinaten von β^* bzgl. α^* stehen in den Zeilen von ${}_\alpha T_\beta^{-1}$

Das kann man auch so einsehen: Ist $A = {}_\alpha T_\beta$, d.h. stehen in den Spalten von A die Koordinaten der Vektoren \vec{a}_j aus β , und in den Zeilen von B die Koordinaten der \vec{a}_i^* , so folgt $BA = E$ sofort aus den Dualitätsbedingungen

$$\vec{a}_i^*(\vec{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

21.11 Reziproke Basis

Für den Raum \mathcal{V} der Vektoren sei Längeneinheit und Orientierung festgelegt und dadurch Skalar-, Vektor- und Spat-Produkt definiert. Für ein unabhängiges Tripel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ von Vektoren ist das *reziproke* (in der Physik: *duale*) Tripel definiert durch

$$\vec{a}_1' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{a}_2' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1, \quad \vec{a}_3' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Ist durch die Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ein (Kristall)Gitter $\{\sum_i z^i \vec{a}_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$ gegeben, so stehen steht der Vektor \vec{a}_j' auf der Gitterebenschar senkrecht, die die beiden anderen Basisvektoren \vec{a}_i, \vec{a}_k als Richtungsvektoren hat. Der Abstand benachbarter Gitterebenen dieser Schar ist die Höhe der primitiven Zelle (Spat), also Volumen/Grundfläche = $1/|\vec{a}_j'|$.

Satz 21.7 Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine ON-Basis und

$$F : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}, \quad F(\vec{e}_i^*) = \vec{e}_i$$

der dadurch gegebene Isomorphismus. Dann gilt

$$\phi(\vec{x}) = \langle F(\phi) \mid \vec{x} \rangle \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{V}^*$$

Weiterhin gilt für jede Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ von \mathcal{V}

$$F(\vec{a}_i^*) = \vec{a}_i'$$

d.h. die duale Basis wird mit der reziproken Basis identifiziert. Stehen in den Spalten von A die Koordinaten der \vec{a}_i , so in $A^{-t} = (A^{-1})^t$ die der \vec{a}_j' - bzgl. der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und es gilt

$$A^{-t} A = E$$

also

$$\langle \vec{a}_i' \mid \vec{a}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}, \quad \det(\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3') = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}$$

Weiterhin $\vec{a}_i'' = \vec{a}_i$; sowie $\vec{a}_i' = \vec{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) genau dann, wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ON-Basis ist.

Beweis. Die erste Gleichung ist linear in allen Argumenten, also genügt es, sie für \vec{e}_j und \vec{e}_i^* nachzuprüfen

$$\vec{e}_j^*(\vec{e}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases} = \langle \vec{e}_j | \vec{e}_i \rangle = \langle F(\vec{e}_j^*) | \vec{e}_i \rangle$$

Es folgt

$$\langle F(\vec{a}_j^*) | \vec{a}_i \rangle = \vec{a}_j^*(\vec{a}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases}$$

also $F(\vec{a}_j^*) = r_j \vec{a}_j'$ und dann

$$1 = \langle r_j \vec{a}_j' | \vec{a}_j \rangle = \frac{r_j}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = r_j$$

Die Zeilen von A^{-1} enthalten die Koordinaten der \vec{a}_j^* und somit der $F(\vec{a}_j^*)$; d.h. die Spalten von A^{-t} enthalten die Koordinaten der \vec{a}_j' . \square

21.12 Affine Teilräume

Einem linearen Gleichungssystem entspricht in Sinne des Dualraums ein System $\Phi(\vec{x}) = \mathbf{b}$ von Gleichungen $\phi_i(\vec{x}) = b_i$:

$$\Phi(\vec{x}) = \mathbf{b} : \Leftrightarrow \begin{array}{l} \phi_1(\vec{x}) = b_1 \\ \vdots \\ \phi_m(\vec{x}) = b_m \end{array} \Leftrightarrow A\vec{x}^\alpha = \mathbf{b} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} \phi_{1\alpha} \\ \vdots \\ \phi_{m\alpha} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Satz 21.8 Die Lösungsräume $\{\vec{x} \in V \mid \Phi(\vec{x}) = \mathbf{b}\}$ linearer Gleichungssysteme sind gerade die affinen Teilräume von V .

Beweis. Die eine Richtung ist klar wegen des Isomorphismus' auf K^n . Für die umgekehrte Richtung folgende Prozedur des Rollentauschs

- Sei der affine Teilraum $U + \vec{a}$ gegeben durch \vec{a} und ein Erzeugendensystem $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ von U
- Löse das folgende System von k Gleichungen in den Unbekannten a_1, \dots, a_n (wenn's der Psyche hilft, so transponiere alles)

$$(a_1, \dots, a_n) \vec{v}_1^\alpha = 0, \dots, (a_1, \dots, a_n) \vec{v}_k^\alpha = 0$$

- Wähle die ϕ_1, \dots, ϕ_m so, dass die Koordinatenzeilen $\phi_{1\alpha}, \dots, \phi_{m\alpha}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden
- Setze $b_i = \phi_i(\vec{a})$
- Dann $U + \vec{a} = \{\vec{x} \in V \mid \phi_1(\vec{x}) = b_1, \dots, \phi_m(\vec{x}) = b_m\}$

Sei nun $\beta : \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ eine weitere Basis von V und ${}_\alpha T_\beta$ die Transformationsmatrix mit $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Dann hat man

$$\boxed{A\vec{x}^\alpha = \mathbf{b} \Leftrightarrow A {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta = \mathbf{b}}$$

d.h. die Matrix A des Gleichungssystems geht bzgl. der neuen Koordinaten über in $A {}_\alpha T_\beta$ während die 'rechte Seite' \mathbf{b} unverändert bleibt.

21.13 Dualitäten

Aus etwas abstrakterer Sicht können wir der Verhältnis Zeilenraum zu Spaltenraum bzw. Dualraum zu Vektorraum, so sehen: Wir haben K -Vektorräume W und V und eine binäre Relation \perp zwischen W und V , so dass für alle $\phi, \phi_1, \phi_2 \in W$, $v, v_1, v_2 \in V$ und $r_1, r_2 \in K$

$$\phi_1 \perp v \wedge \phi_2 \perp v \Rightarrow r_1\phi_1 + r_2\phi_2 \perp v, \quad \phi \perp v_1 \wedge \phi \perp v_2 \Rightarrow \phi \perp r_1v_1 + r_2v_2$$

In den Beispielen haben wir

$$(a_1, \dots, a_n) \perp \mathbf{x} \Leftrightarrow \sum_i a_i x_i = 0, \quad \text{bzw. } \phi \perp \vec{v} \Leftrightarrow \phi(\vec{v}) = 0$$

Definieren wir nun für $\Phi \subset W$ und $X \subseteq V$ den jeweiligen *Orthogonalraum* durch

$$\Phi^\perp = \{v \in V \mid \forall \phi \in \Phi. \phi \perp v\}, \quad X^\perp = \{\phi \in W \mid \forall v \in X. \phi \perp v\}$$

so gilt trivialerweise

$$\Phi \subseteq \Psi \Rightarrow \Psi^\perp \subseteq \Phi^\perp, \quad X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp, \quad \Phi \subseteq X^\perp \Leftrightarrow X \subseteq \Phi^\perp$$

und es folgt leicht

$$\begin{array}{ll} \Phi \subseteq \Phi^{\perp\perp} & X \subseteq X^{\perp\perp} \\ \Phi \subseteq \Psi \Rightarrow \Phi^{\perp\perp} \subseteq \Psi^{\perp\perp}, & X \subseteq Y \Rightarrow X^{\perp\perp} \subseteq Y^{\perp\perp} \\ \Phi^{\perp\perp\perp\perp} = \Phi^{\perp\perp} & U^{\perp\perp\perp\perp} = U^{\perp\perp} \end{array}$$

Schliesslich sind Φ^\perp und U^\perp Untervektorräume von V bzw. W und für Untervektorräume Φ, Ψ von W und X, Y von V gilt

$$(\Phi + \Psi)^\perp = \Phi^\perp \cap \Psi^\perp, \quad (X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$$

Unsere Beispiele (und auch die noch anstehenden) haben folgende Eigenschaft

(*) $\infty > \dim W = \dim V = \dim \Phi + \dim \Phi^\perp = \dim U + \dim U^\perp$ für Untervektorräume

Bemerkung 21.9 Für eine Dualität mit (*) ist $\Phi \mapsto \Phi^\perp$ eine bijektive Abbildung vom System der Untervektorräume von W auf das von V und $U \mapsto U^\perp$ ist die Umkehrabbildung. Insbesondere gilt

$$\Phi^{\perp\perp} = \Phi, \quad U^{\perp\perp} = U \quad \text{für Untervektorräume}$$

Beweis. Wegen (*) gilt $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$. Da $U \subseteq U^{\perp\perp}$ folgt Gleichheit. Entsprechend für die Φ . Damit ist Bijektivität klar.

22 Eigenwerte und Eigenvektoren von Abbildungen

22.1 Definition

Sei V ein K -Vektorraum ϕ ein Endomorphismus, $\vec{v} \in V$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent

- $\phi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$
- $(A - \lambda E)\vec{v}^\alpha = \mathbf{0}$ mit $A = \phi_\alpha$ bzgl. einer/jeder Basis α

- Für jede Basis $\beta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j = \vec{v}, \dots, \vec{v}_n$ ist $\lambda \mathbf{e}_j$ die j -te Spalte von $A' = \phi_\beta$

Ist $\vec{v} \neq \vec{0}$ so heisst \vec{v} ein *Eigenvektor* (EV) von ϕ und λ ein *Eigenwert* (EW). Ist λ ein Eigenwert, so hat man den *Eigenraum* (ER) E_λ von ϕ zum EW λ und die *geometrische Vielfachheit* $\dim E_\lambda$

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid \phi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass ϕ auf dem Eigenraum eine Streckung um den Skalar λ ist. Insbesondere ist jeder Eigenraum von ϕ ein ϕ -invarianter Teilraum : $\phi(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

Hat man eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ gegeben, so hat man die analogen Bezeichnungen bezogen auf $V = K^n$ und $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Man beachte aber die Abhängigkeit dieser Begriffe vom Körper K - die Matrizen der Drehungen der Ebene (um Winkel $\neq 180^\circ, 360^\circ$ haben keine reellen EW und EV, wohl aber komplexe.

22.2 Ansatz

Die Koordinatenspalten (bzgl. einer Basis) \mathbf{v} der EV zum EW λ sind die von $\mathbf{0}$ verschiedenen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Die Existenz einer nichttrivialen Lösung bedeutet nach Satz 21.6 dass $(A - \lambda E)$ nicht invertierbar ist. Es stellt sich also die Aufgabe, die λ mit dieser Eigenschaft zu berechnen. Dazu ist, zumindest theoretisch, die Determinante geeignet.

22.3 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche λ hat

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

eine nichttriviale Lösung? Nur dann, wenn mindestens ein Diagonaleintrag Null ist, d.h. $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$. Hier hat man die eindimensionalen Lösungsräume

$$U_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

22.4 Gekoppelte Schwingung

Für die gekoppelte Schwingung zweier Massen m_1 und m_2 and zwei Federn mit Konstanten c_1, c_2 hat man für die Auslenkungen y_1, y_2 die Differentialgleichungen

$$m_1 y_1'' = -c_1 y_1 + c_2 (y_2 - y_1), \quad m_2 y_2'' = -c_2 (y_2 - y_1).$$

Wählt man $m_1 = m_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ so hat man

$$\mathbf{y}'' = A\mathbf{y} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz

$$y_i = b_i \cos \omega t, \quad \text{also } \mathbf{y} = \cos \omega t \mathbf{b}$$

führt zu

$$\mathbf{y}'' = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{b}, \quad A\mathbf{b} = -\omega^2 \mathbf{b}.$$

Mit $\lambda = -\omega^2$ kommen wir auf das Gleichungssystem für b_1, b_2

$$\begin{aligned} (-5 - \lambda)b_1 + 2b_2 &= 0 \\ 2b_1 + (-2 - \lambda)b_2 &= 0 \end{aligned}.$$

Dieses hat eine nichttriviale Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix $(-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = 0$, also $\lambda_1 = -1$ oder $\lambda_2 = -6$. Damit erhalten wir $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \sqrt{6}$. Für den Vektor \mathbf{b} erhält man dann aus dem Gleichungssystem

$$\mathbf{b}_1 = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw. } \mathbf{b}_2 = r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da eine Summe von Lösungen des Differentialgleichungssystems wieder eine ist, hat man dann Lösungen der Form (und man kann zeigen, dass das schon alle sind)

$$\mathbf{y} = r_1 \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cos \sqrt{6}t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

22.5 Charakteristische Gleichung

Satz 22.1 Sei ϕ bezüglich einer Basis α durch die Matrix A gegeben. Dann sind die EW von ϕ bzw. A gerade die zu K gehörigen Nullstellen λ_i der Charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Beweis. Die Existenz einer nichttrivialen Lösung von $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bedeutet nach Satz 21.6, dass A nicht invertierbar ist, also nach Satz 20.1 dass $\det(A - \lambda E) = 0$.

$\det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom in der Unbestimmten λ

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

vom Grade n in der Variablen λ und hängt nach Kor.20.3 nur von der linearen Abbildung ϕ , nicht von der Basis ab - da $\det(S^{-1}AS - \lambda E) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det(A - \lambda E)$. Wir sprechen vom *charakteristischen Polynom* von ϕ bzw. A .

22.6 Vielfachheiten

Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwerts λ_1 von A ist die Dimension des Eigenraums U_{λ_1} , die *algebraische Vielfachheit* von λ_1 ist die Zahl m derart, dass λ_1 genau m -fache Nullstelle des Polynoms $\det(A - \lambda E)$ ist, dh. $\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^m q(\lambda)$ mit $q(\lambda_1) \neq 0$.

Satz 22.2 *Geometrische Vielfachheit \leq algebraische Vielfachheit.*

Beweis: Sei $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_k$ Basis von U_{λ_1} . Diese kann man zu einer Basis β von $V = K^n$ ergänzen. Sei $\phi : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix A bezüglich der kanonischen Basis. Bezüglich β hat ϕ eine Matrix A' so, dass in den ersten k Spalten gerade die $\lambda_1 e_j$, $j = 1 \dots k$ stehen. Die Basistransformation liefert $\det(A - \lambda E) = \det(A' - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^k \det \tilde{A}$, wobei \tilde{A} die $(n - k) \times (n - k)$ Untermatrix in der rechten unteren Ecke von A' ist. Also ist λ_1 mindestens k -fache Nullstelle von $\det(A - \lambda E)$.

22.7 Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Satz 22.3 *EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ von ϕ zu lauter verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind linear unabhängig. Insbesondere gibt es höchstens $n = \dim V$ verschiedene EW zu ϕ*

Beweis durch Induktion über k . Sei angenommen, dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ unabhängig sind und (1): $0 = \sum_{i=1}^k r_i \vec{v}_i$. Dann $0 = \lambda_k \sum r_i \vec{v}_i = \sum r_i \lambda_k \vec{v}_i$ und $0 = \phi(\sum r_i \vec{v}_i) = \sum r_i \phi(\vec{v}_i) = \sum r_i \lambda_i \vec{v}_i$. Durch Subtraktion folgt $0 = \sum r_i (\lambda_k - \lambda_i) \vec{v}_i$. Da hier der k -te Summand 0 ist, folgt aus der Unabhängigkeit der $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$, dass $r_i (\lambda_k - \lambda_i) = 0$ für $i < k$. Da $\lambda_k \neq \lambda_i$, folgt $r_i = 0$ für $i < k$ und dann aus (1), dass $r_k \vec{v}_k = 0$. Wegen $\vec{v}_k \neq 0$ hat man also auch $r_k = 0$.

22.8 Diagonalisierbarkeit

ϕ bzw. A ist *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ gibt, bezüglich deren ϕ durch eine Diagonalmatrix A' beschrieben wird - $A' = S^{-1}AS$, wobei die Transformationsmatrix S die Spalten $\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n$ hat. Dies bedeutet, dass $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ eine Basis von EV \vec{v}'_i jeweils zum EW λ_i ist, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die (nicht notwendig verschiedenen) Diagonaleinträge von A' sind.

Satz 22.4 *ϕ bzw. A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $n = \dim V$ die Summe $n = \sum_{i=1}^k d_i$ der geometrischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ist. Eine hinreichende Bedingung ist $k = n$, d.h. dass ϕ bzw. A mindestens (also genau) $n = \dim V$ verschiedene Eigenwerte hat.*

Beweis. Wähle für jeden Eigenraum eine Basis und liste diese Vektoren auf als $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ in der Reihenfolge der Eigenwerte auf. Wir haben $m = n$ wegen der Voraussetzung über die Vielfachheiten. Wir behaupten, dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ unabhängig sind. In der Tat, sei $\sum_i r_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Addieren wir Vektoren aus demselben Eigenraum zusammen, so bekommen wir $\sum_{i=1}^k \vec{w}_i = \vec{0}$ und mit Satz 22.3 $\vec{w}_i = \vec{0}$. Ist $\vec{w}_i = r_l \vec{v}_l + \dots + r_{l+d_i} \vec{v}_{l+d_i}$, so folgt $r_i = 0$ für $i = l, \dots, l + d_i$, da $\vec{v}_l, \dots, \vec{v}_{l+d_i}$ Basis von U_{λ_i} . Also sind die $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ unabhängig und bilden somit eine Basis von V . \square

22.9 Tricks

Übungs- und Klausuraufgaben sind meist mit der guten Absicht gestellt, dass sich die EW leicht bestimmen lassen.

Trick Nr.1: Wenn man das Polynom $\det(A - \lambda E)$ ausrechnet, sollte man nicht unbedacht ausmultiplizieren, sondern erst mal sehen, ob man nicht eine Zerlegung der Form $p(\lambda)q(\lambda)$ finden kann. Die EW sind dann die Nullstellen von $p(\lambda)$ und die von $q(\lambda)$.

Trick Nr.2: Soll man die (komplexen) Nullstellen von $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ bestimmen und sind die a_i ganze Zahlen, so probiere man, ob nicht ein ganzzahliger Teiler von a_0 Nullstelle ist.

Trick Nr.3: Hat man den Verdacht, dass α Nullstelle von $p(x)$ ist, so finde man eine Zerlegung $p(x) = q(x)(x - \alpha)$ durch Polynomdivision oder nach dem Horner Schema.

22.10 Matrixpotenzen

Die Potenzen einer linearen Abbildung ϕ bzw. Matrix $A = \phi_\alpha$ sind rekursiv definiert

$$\phi^0 = I, \phi^{n+1} = \phi \circ \phi^n, \quad A^0 = E, A^{n+1} = A \cdot A^n$$

Dann $A^n = (\phi^\alpha)^n$ und jeder Eigenvektor \vec{v} von ϕ^α zum Eigenwert λ ist auch Eigenvektor von ϕ^n zum Eigenwert λ^n - mit Induktion

$$\phi^{n+1}(\vec{v}) = \phi(\phi^n(\vec{v})) = \phi(\lambda^n \vec{v}) = \lambda^n \phi(\vec{v}) = \lambda^n \lambda \vec{v} = \lambda^{n+1} \vec{v}$$

Ist ϕ invertierbar, so haben ϕ und $\phi^n, n > 0$ dieselben Eigenvektoren.

Für diagonalisierbare Matrizen $A = \phi_\alpha$ kann man leicht Potenzen ausrechnen. Mit der Transformationsmatrix $S = {}_\alpha T_\beta$ und Diagonalmatrix $D = \phi_\beta$ ist $D^n = (\phi^n)_\beta$ also $A^n = (\phi^n)_\alpha = S^{-1} D^n S$

$$S^{-1} A S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = S D^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Alternativ: Beweis durch Induktion. $A^0 = E = S^{-1} E S, A^1 = A = S D S^{-1}$ und $A^{n+1} = A \cdot A^n = S D S^{-1} S D^n S^{-1} = S D D^n S^{-1} = S D^{n+1} S^{-1}$.

Anwendung: Stochastische Matrizen. Gegeben sei ein System, dessen Komponenten zwei Zustände haben können. Bezeichnen a_k und b_k die Anteile der beiden Zustände zum k .ten Zeitpunkt, und sind p und q die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Element vom 1. in den 2. bzw. vom 2. in den 1. Zustand wechselt, so kann man den Übergang durch eine Matrix beschreiben

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$$

Gesucht ist dann zu gegebenen Anfangswerten a_0, b_0

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Man bemerkt

$$A = E + B \quad \text{mit } B = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix}$$

und transformiert B auf Diagonalgestalt. Das charakteristische Polynom ist

$$(-p - \lambda)(-q - \lambda) - pq = \lambda^2 + (p + q)\lambda$$

also hat B Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(p + q)$$

Zugehörige Eigenvektoren ergeben sich aus den Gleichungssystemen

$$(B - \lambda_1 E)\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (B - \lambda_2 E)\vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= S^{-1}ES + S^{-1}BS = E + S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - p - q \end{pmatrix} \\ A^n &= S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - p - q)^n \end{pmatrix} S^{-1} = S \left(E + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 + (1 - p - q)^n \end{pmatrix} \right) S^{-1} \\ &= E + \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 + (1 - p - q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^n = E + \frac{1 - (1 - p - q)^n}{p + q} B \quad \text{für } A = E + B \text{ mit } B = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix}$$

Für $p + q < 1$ ($0 \leq p, q \leq 1$ ist vorausgesetzt) liegt Konvergenz gegen einen stabilen Zustand vor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \left(E + \frac{1}{p+q} B \right) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

23 Direkte Summen und Produkte

Sei V ein K -Vektorraum mit Untervektorräumen U_1, \dots, U_m .

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m \mid u_i \text{ in } U_1, \dots, u_m \text{ in } U_m\}$$

ist der von der Vereinigung der Untervektorräume U_1, \dots, U_m erzeugte Untervektorraum von V , d.h. der kleinste Untervektorraum, der alle U_1, \dots, U_m umfasst, und heisst deren *Summe*. Ebenso ist der Schnitt

$$U_1 \cap \dots \cap U_m = \{v \in V \mid v \in U_1, \dots, v \in U_m\}$$

ein Untervektorraum. Man rechnet nämlich sofort nach, dass es sich wirklich um Untervektorräume handelt.

Satz 23.1 Für gegebene Untervektorräume U_1, \dots, U_m und U eines Vektorraums V sind äquivalent:

- (1) $U = U_1 + \dots + U_m$ und jede Liste von Vektoren $u_1 \neq 0$ in $U_1, \dots, u_m \neq 0$ in U_m ist linear unabhängig.
- (2) Für jedes u aus U gibt es genau eine Darstellung $u = u_1 + \dots + u_m$ mit u_i in U_1, \dots, u_m in U_m .
- (3) Jede (eine) Vereinigung von Basen der U_1, \dots, U_m ist Basis von U .
- (4) $U = U_1 + \dots + U_m$ und $(U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_m) \cap U_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.
- (5) $U = U_1 + \dots + U_m$ und $(U_1 + \dots + U_{k-1}) \cap U_k = 0$ für $1 < k \leq m$.
- (6) im Falle $\dim V < \infty$: $\dim U = \dim U_1 + \dots + \dim U_m$.

Wir sagen dann, die Summe sei *direkt* und schreiben

$$U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m.$$

Korollar 23.2 Ist V unitär/euklidisch und gilt $U_i \perp U_j$ für alle $i \neq j$ so ist die Summe $U_1 + \dots + U_n$ direkt - man spricht auch von orthogonaler Summe

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Aus $u = \sum u_i = \sum u'_i$ folgt $0 = \sum v_i$ mit $v_i = u_i - u'_i$, dabei braucht man natürlich nur über die $v_i \neq 0$ zu summieren. Gäbe es solche, so hätte man eine nichttriviale Darstellung von 0 in Widerspruch zu der in (1) vorausgesetzten Unabhängigkeit.

(2) \Rightarrow (1): Sind die $u_i \neq 0$ und $0 = \sum r_i u_i$, so ergibt $0 = 0 + \dots + 0$ und die vorausgesetzte Eindeutigkeit, dass alle $r_i u_i = 0$ und somit $r_i = 0$.

(2) \Rightarrow (3): In einer Linearkombination u der Vereinigung der Basen ergeben sich nach (2) die Teilsummen u_i zu den Basiselementen aus U_i eindeutig, und zu diesen dann die Koeffizienten.

(3) \Rightarrow (1): Man ergänze jeweils u_i zu Basis von U_i .

(2) \Rightarrow (4): z.B. $i = 1$. Aus $u_1 = 0 + u_2 + \dots + u_m$ folgt $u_1 = 0$.

(4) \Rightarrow (5): trivial. (5) \Rightarrow (1): Sei $0 = \sum r_i u_i$ mit $u_i \neq 0$. Induktiv setzen wir voraus, dass $r_i = 0$ für $i > k$. Dann $-r_k u_k = r_1 u_1 + \dots + r_{k-1} u_{k-1}$ in $(U_1 + \dots + U_{k-1}) \cap U_k$, also $r_k u_k = 0$ und $r_k = 0$.

(3) \Rightarrow (6) trivial. (6) \Rightarrow (3): Die Vereinigung der Basen ist ein Erzeugendensystem mit $\dim U$ vielen Elementen, also minimales Erzeugendensystem.

Zum Korollar: $U_i \perp \sum_{j \neq i} U_j$, also $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$.

Nach dem Muster der Räume K^n können wir die Vektorräume U_1, \dots, U_m auch "extern" zu einem neuen Vektorraum, dem *direkten Produkt*, zusammenfassen:

$$U_1 \times \dots \times U_m = \{(u_1, \dots, u_m) \mid u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\}.$$

Durch komponentenweises Rechnen erhalten wir einen K -Vektorraum.

Korollar 23.3 Die Summe $U = U_1 + \dots + U_m$ ist genau dann direkt, wenn

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto u_1 + \dots + u_m$$

ein Isomorphismus von $U_1 \times \dots \times U_m$ auf U ist.

Korollar 23.4 Die Summe von Eigenräumen (zu verschiedenen Eigenwerten einer Matrix A oder Abbildung $\phi : V \rightarrow V$) ist direkt. A bzw. ϕ ist genau dann diagonalisierbar, wenn V (direkte) Summe der Eigenräume ist.

24 Klassifikation ebener Abbildungen

24.1 Determinante

Korollar 24.1 Für eine lineare Abbildung ϕ hängt $\det \phi_\alpha$ nicht von der Basis α ab.

Wir definieren dies als die *Determinante* $\det \phi$ der Abbildung. Die anschauliche Bedeutung in der Ebene ist die Fläche der Bildes des Einheitsquadrats, in Raum das Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Die Determinante ist somit der "Vergrößerungsfaktor". Beweis. Transformationsformel und Kor.20.3.

24.2 Komplexe Eigenwerte

Wir betrachten nun den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und den \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^n . Für eine Matrix $A = (a_{ik})$ sei $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ die konjugierte. Die Matrix über \mathbb{C} ist *reell*, wenn alle ihre Komponenten reell sind, d.h. wenn $A = \bar{A}$. Diese Notation überträgt sich auch auf Vektoren.

Bemerkung. Der von \mathbf{v} und $\bar{\mathbf{v}}$ aufgespannte \mathbb{C} -Untervektorraum U hat eine Basis aus reellen Vektoren, z.B. wenn \mathbf{v} nicht reell

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2i}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \frac{-i}{2}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \Im(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}) = \Re(\mathbf{v}).$$

Dies ist auch eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraums der reellen Vektoren aus U , der ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist. Beweis: $\mathbf{v} = i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ und $\bar{\mathbf{v}} = -i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Satz 24.2 Ist \mathbf{v} EV der reellen Matrix A zum EW λ , so ist der konjugierte Vektor $\bar{\mathbf{v}}$ EV von A zum konjugierten EW $\bar{\lambda}$.

Die Wirkung von A auf dem zu den beiden EV gehörenden Untervektorraum von \mathbb{R}^n wird, wenn λ die Polardarstellung $\lambda = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ hat, bezüglich obiger Basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ angegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Beweis. $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\mathbf{v} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$.

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}_1 &= A\frac{1}{2i}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2i}(A\mathbf{v} - A\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2i}(\lambda\mathbf{v} - \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2i}[\lambda(i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \bar{\lambda}(-i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)] = \\ &= \frac{1}{2i}[(\lambda + \bar{\lambda})i\mathbf{u}_1 + (\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_2] = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_2 = \Re(\lambda)\mathbf{u}_1 + \Im(\lambda)\mathbf{u}_2 \\ &= r \cos \alpha \mathbf{u}_1 + r \sin \alpha \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}_2 &= A\frac{1}{2}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}[\lambda(i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \bar{\lambda}(-i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)] = \frac{i}{2}(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\mathbf{u}_2 = \\ &= -\Im(\lambda)\mathbf{u}_1 + \Re(\lambda)\mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

24.3 Orthogonale Abbildungen

Satz 24.3 Eine orthogonale Abbildung ϕ hat $\det \phi = \pm 1$ und nur Eigenwerte (in \mathbb{C}) vom Betrag 1.

Beweis. Wir haben $|\phi\vec{v}| = |\vec{v}|$. Ist λ ein reeller EW, so gibt es auch einen reellen EV, d.h. $\phi\vec{v} = \lambda\vec{v}$; nun $|\lambda| \cdot |\phi\vec{v}| = |\vec{v}|$ und somit $|\lambda| = 1$ (so kann man später auch in komplexen Fall argumentieren). Für komplexe λ benutzen wir Satz 24.2: es muss $|r| = 1$ sein, also auch $|\lambda| = 1$.

Ist A die Matrix von ϕ bzgl. einer ON-Basis, so gilt $A^t = A^{-1}$ also $(\det A)^2 = \det A \det A^t = \det A \det A^{-1} = \det A (\det A)^{-1} = 1$ und somit $\det A = \pm 1$, weils reell ist.

24.4 Ebene orthogonale Abbildungen

Für $n = 2$ hat eine Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

mit Winkel ω bzgl. einer ON-Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 die komplexen Eigenvektoren

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\bar{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Eigenwerte

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega, \quad e^{-i\omega} = \cos \omega - i \sin \omega$$

In der Tat

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i \cos \omega & -\sin \omega \\ \pm i \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} = e^{\pm i\omega} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit gibt es reelle EW nur für $\omega = z\pi$ mit ganzem z , d.h. für die 0° - und die 180° -Grad Drehung. In allen Fällen gilt $\det \phi = 1$. Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat EV $(i, 1)^t$ zum EW i und EV $(-i, 1)^t$ zum EW $-i$. Die Basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ist hier gerade die kanonische Basis des \mathbb{R}^2 und die Abbildung ist die 90° -Drehung. Bei einer Spiegelung haben wir zwei zueinander senkrechte EV zum EW 1 (Achse) und -1 . Satz 18.9 besagt

Satz 24.4 *Eine orthogonale Abbildung ϕ in der Ebene ist entweder Drehung (falls $\det \phi = 1$ oder Spiegelung an einer Geraden (falls $\det \phi = -1$).*

24.5 Klassifikation ebener linearer Abbildungen

Satz 24.5 *Sei ϕ eine lineare Abbildung der reellen Ebene mit charakteristischem Polynom*

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Die λ_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt und es tritt genau einer der folgenden Fälle ein

(i)	Zentrische Streckung $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	für jede Basis β $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
(ii)	Scherung $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	es gibt Basis β mit $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
(iii)	(verzerrte) Achsenstreckung $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	es gibt Basis β mit $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
(iv)	(verzerrte) Drehstreckung $\lambda_{1/2} = r(\cos \omega \pm i \sin \omega) \notin \mathbb{R}$	es gibt Basis β mit $\phi_\beta = r \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$

- Im Fall (ii) ist der erste, in Fall (iii) sind beide Basisvektoren bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.
- In Fall (i) und (ii) kann man β stets als ON-Basis wählen
- In Fall (iii) kann man β genau dann zur ON-Basis normieren, wenn ϕ selbstadjungiert ist, d.h. wenn bzgl. einer/jeder ON-Basis α gilt

$$\phi_\alpha^t = \phi_\alpha$$

- In Fall (iv) kann man β genau dann zu einer ON-Basis normieren, wenn ϕ normal ist, d.h. wenn bzgl. einer/jeder ON-Basis α gilt

$$\phi_\alpha \phi_\alpha^t = \phi_\alpha^t \phi_\alpha$$

Ist ϕ normal, so hat man zu jeder ON-Basis dieselbe Matrix. Andernfalls ist die Basis β bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu Fall (i) und (iii) siehe Satz 22.4. In Fall (iii) sind die \vec{b}_i Eigenvektoren zu den λ_i mit eindeutig bestimmten Richtungen.

Zu Fall (ii), d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, aber $\phi \neq \lambda_1 \text{id}$. Wähle \vec{a}_1 als Eigenvektor und ergänze zu Basis $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$. Dann haben wir die Matrix

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

und a_{22} ist Eigenwert, also $a_{22} = \lambda_1$. Folglich

$$(\phi - \lambda_1 \text{id})_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a_{12} \neq 0 \text{ und } (\phi - \lambda_1 \text{id})_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $(\phi - \lambda_1 \text{id})^2 = O$, $\phi - \lambda_1 \text{id} \neq O$. Wähle \vec{b}_2 mit $\vec{b}_1 := (\phi - \lambda_1 \text{id})(\vec{b}_2) \neq 0$

Es folgt $(\phi - \lambda_1 \text{id})(\vec{b}_1) = \vec{0}$, d.h. $\phi(\vec{b}_1) = \lambda_1 \vec{b}_1$ und $\phi(\vec{b}_2) = \vec{b}_1 + \lambda_1 \vec{b}_2$

Dann ist \vec{b}_1 ein Eigenvektor, nicht jedoch \vec{b}_2 . Also bilden sie eine Basis β mit ϕ_β wie gewünscht. Um eine ON-Basis zu erhalten wähle $\vec{b}_2 \perp \vec{a}_1$.

Fall (iv) vgl. Satz 24.2. Drehstreckungen sind offensichtlich normal und haben für jede ON-Basis dieselbe Matrix. Reste später allgemeiner.

24.6 Differenzgleichungen und Matrixiteration

Ein *System linearer Differenzgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist eine durch eine lineare Abbildung ψ bzw. ϕ gegebene Bedingung an Vektorfolgen \vec{u}_k mit $k \in \mathbb{N}$

$$\forall k. \vec{u}_{k+1} - \vec{u}_k = \psi(\vec{u}_k) \quad \text{bzw.} \quad \forall k. \vec{u}_{k+1} = \phi(\vec{u}_k) \quad \text{mit} \quad \phi = \psi + \text{id}$$

Die Vektorfolge ist dann durch den Startvektor \vec{u}_0 eindeutig bestimmt. Man beachte die Analogie zu Systemen linearer Differentialgleichungen (kontinuierlicher Zeitparameter)

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \psi(\vec{y}(t))$$

Korollar 24.6 Sei $A = \phi_\alpha \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ diagonalisierbar mit Basis von Eigenvektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 und Eigenwerten λ_1, λ_2 . Gilt für den Startvektor $\vec{u}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ (und solche c_i gibt es dann), so ergibt sich die Lösung der Differenzgleichung als

$$\forall k. \vec{u}_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{v}_2$$

Umgekehrt bestimmen je zwei c_1, c_2 eine Lösung der Differenzgleichung.

Die durch ϕ gegebene Differenzgleichung $\vec{u}_{k+1} = \phi(\vec{u}_k)$ heisst

<i>stabil</i>	falls	$\forall \vec{u}_0. \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{u}_k = 0$
<i>neutral stabil</i>	falls	$\forall \vec{u}_0. \exists C. \forall k. \vec{u}_k \leq C$
<i>unstabil</i>	falls	$\exists \vec{u}_0. \forall C. \exists k. \vec{u}_k > C$

Lemma 24.7 Ist ϕ diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_1, λ_2 oder (verzerrte) Drehstreckung mit Streckfaktor r , so gilt für die zugehörige Differenzgleichung

<i>stabil</i>	<i>falls</i>	$ \lambda_1 , \lambda_2 < 1$	<i>bzw.</i> $ r < 1$
<i>neutral stabil</i>	<i>falls</i>	$ \lambda_1 , \lambda_2 \leq 1$	<i>bzw.</i> $ r \leq 1$
<i>unstabil</i>	<i>falls</i>	$ \lambda_1 > 1 \vee \lambda_2 > 1$	<i>bzw.</i> $ r > 1$

Beispiele Gegeben sei eine ON-Basis α der Ebene und die Matrix ϕ_α einer linearen Abbildung und ein Startvektor.

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \phi_\alpha = \frac{r}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_0^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$ und $r \in \{\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$. In Fig. haben wir für einige dieser Abbildungen die $\vec{u}_k, -10 \leq k \leq 10$ geplottet (hier ist ϕ invertierbar). Der Pfeil gibt die Richtung $k \mapsto k + 1$ an. Beachten Sie die unterschiedlichen Skalen!

Rechts hat man dieselben Matrizen, nur dass jetzt $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ nicht ON-Basis ist sondern bzgl. einer ON-Basis δ gilt

$$\vec{a}_1^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

25 Jordan-Normalform

25.1 Elementarmatrizen

Wir betrachten Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper R . Addition und Multiplikation sind wie üblich definiert. Die $n \times n$ -Matrizen bilden einen (nichtkommutativen) Ring $R^{n \times n}$ mit Einheitsgruppe bestehend aus den invertierbaren Matrizen (wobei die Koeffizienten der Inversen A^{-1} wieder in R sein müssen).

Hat die $m \times n$ Matrix A die Spalten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ und ist $T = (t_{jh})_{n \times n}$, so hat die $m \times n$ -Matrix $A' = AT$ die Spalten

$$\mathbf{a}'_1 = t_{11}\mathbf{a}_1 + \dots + t_{n1}\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}'_n = t_{1n}\mathbf{a}_1 + \dots + t_{nn}\mathbf{a}_n$$

d.h. wir können das ‘Rechtsranmultiplizieren’ von T so verstehen, dass aus den Spalten von A die Spalten der neuen Matrix $A' = AT$ als ‘Linearkombinationen’ gebildet werden. Insbesondere haben wir für festes k bzw. $k \neq l$ und Einheiten $r \in R$

$$\begin{array}{l} \text{Scherung} \\ T = [Sk := Sk + rSl] \end{array} \quad \mathbf{a}'_j = \begin{cases} \mathbf{a}_k + r\mathbf{a}_l & j = k \\ \mathbf{a}_j & j \neq k \end{cases} \quad t_{ij} = \begin{cases} r & i = l, j = k \\ 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{Streckung} \\ T = [Sk := rSk] \end{array} \quad \mathbf{a}'_j = \begin{cases} r\mathbf{a}_k & j = k \\ \mathbf{a}_j & j \neq k \end{cases} \quad t_{ij} = \begin{cases} r & i = j = k \\ 1 & i = j \neq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad r \in R^*$$

$$\begin{array}{l} \text{Vertauschung} \\ T = [Sk \leftrightarrow Sl] \end{array} \quad \mathbf{a}'_j = \begin{cases} \mathbf{a}_l & j = k \\ \mathbf{a}_k & j = l \\ \mathbf{a}_j & \text{sonst} \end{cases} \quad t_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i, j\} = \{k, l\} \\ 1 & i = j \notin \{k, l\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Matrizen T dieser Gestalt heissen *Elementarmatrizen* und Matrixumformungen $A' = AT$ *elementare (Spalten)Umformungen*. Z.B. für die Spaltenumformungen sind $[S2 := S2 + rS1]$, $[S1 := rS1]$, $[S1 \leftrightarrow S2]$

$$\begin{pmatrix} 1 & r & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Elementarmatrizen sind invertierbar und ihre Inversen wieder elementar

$$\begin{aligned} [Sk := Sk + rSl]^{-1} &= [Sk := Sk - rSl] \\ [Sk := rSk]^{-1} &= [Sk := r^{-1}Sk] \\ [Sk \leftrightarrow Sl]^{-1} &= [Sk \leftrightarrow Sl] \end{aligned}$$

In obigen Beispielen

$$\begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Entsprechend bewirkt Multiplikation von links ($A \mapsto SA$) Zeilenumformungen von A , die wir entsprechend notieren. Für die 3 Matrizen T wie oben heisst das (beachte den Rollentausch von k und l im Falle der Scherung)

$$T = [Zl := Zl + rZk], \quad T = [Zk := rZk], \quad T = [Sr \leftrightarrow Zl]$$

25.2 Koordinatentransformation

Oft ist es angesagt, von der alten Basis $\alpha : e_1, \dots, e_n$ eines R -Vektorraums F zu einer neuen Basis $\beta : f_1, \dots, f_n$ überzugehen, z.B. durch Anwendung der elementaren Umformungen. Dann können wir die Transformationsmatrix $\mathcal{S} = {}_{\beta}T_{\alpha}$ als $n \times n$ -Matrix wählen und es gilt

Die Spalten von ${}_{\beta}T_{\alpha}$ sind die Koordinaten der neuen Basis β bgl. der alten α

Welche Beziehung besteht nun zwischen den neuen Koordinaten a^{β} und den alten Koordinaten a^{α} eines 'Vektors' $a \in F$? Durch Einsetzen der Linearkombinationen der f_j aus den e_j erhält man sofort

$$a^{\alpha} = \mathcal{S}a^{\beta}.$$

Nämlich bei obigen Beispielen haben wir für $a = \sum_i a_i^{\beta} f_i$

$$a = (a_1^{\beta} + ra_2^{\beta})e_1 + \sum_{i \neq 1} a_i^{\beta} e_i \quad \text{da } f_2 = e_2 + re_1, f_i = e_i, i \neq 2$$

$$a = ra_1^{\beta} e_1 + \sum_{i \neq 1} a_i^{\beta} e_i \quad \text{da } f_1 = re_1, e_i = f_i, i \neq 1$$

$$a = a_2^{\beta} e_1 + a_1^{\beta} e_2 + \sum_{i \neq 1,2} a_i^{\beta} e_i \quad \text{da } f_1 = e_2, f_2 = e_1, e_i = f_i, i \neq 1, 2.$$

Netterweise sind die Matrizen \mathcal{S} , also können wir auch die neuen Koordinaten durch die alten ausdrücken

$$a^{\beta} = \mathcal{S}^{-1}a^{\alpha}.$$

In den Beispielen entstehen also die neuen Koordinaten aus den alten durch die Zeilenumformungen

$$Z1 := Z1 - rZ2, \quad Z1 := r^{-1}Z1, \quad Z1 \leftrightarrow Z2.$$

Allgemeiner haben wir folgende Entsprechung zwischen *Basistransformation* (d.h. Abänderung der Basis), ausgedrückt durch die zugehörigen *Spaltenumformungen* einerseits, und *Zeilenumformungen* der Koordinatenspalten andererseits

$Si := Si - rSh$	entspricht	$Zh := Zh + rZi$
$Si := rSi$	entspricht	$Zi := r^{-1}Zi$
$Sh \leftrightarrow Si$	entspricht	$Zi \leftrightarrow Zh$

25.3 Basistransformation von Abbildungen

Sei $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sind α, β Basen von V und γ, δ Basen von W so gilt

$$\delta\phi_\beta = \delta T_\gamma \gamma\phi_\alpha \alpha T_\beta = \gamma T_\delta^{-1} \gamma\phi_\alpha \alpha T_\beta$$

und, falls $V = W, \alpha = \gamma, \beta = \delta$,

$$\beta\phi_\beta = \alpha T_\beta^{-1} \alpha\phi_\alpha \alpha T_\beta$$

Beweis. $\delta\phi_\beta \vec{x}^\beta = (\phi(\vec{x}))^\delta = \delta T_\gamma (\phi(\vec{x}))^\gamma = \delta T_\gamma \gamma\phi_\alpha \vec{x}^\alpha = \delta T_\gamma \gamma\phi_\alpha \alpha T_\beta \vec{x}^\beta$

- Anwendung 1. Sei A' bezüglich einer 'günstigen' Basis β bekannt. Man bestimme Matrix A von ϕ bzgl. der Ausgangs-Basis α .
- Anwendung 2. Die Matrix A von ϕ bezüglich der Ausgangs-Basis α sei bekannt, sagt aber wenig über die Struktur. Man bestimme eine 'günstige' Basis β , so dass man der Matrix A' von ϕ bzgl. β geometrische Eigenschaften von ϕ ansehen kann. Bzw. so, dass man das durch A' gegebene, zu A gleichwertige, (Differential)Gleichungssystem lösen kann. Das ist das Thema der Eigenwerttheorie.
- Warnung: Der Gauss-Algorithmus ist in diesem Zusammenhang wenig hilfreich.

25.4 Einseitige bzw. Ungekoppelte Transformation.

Nach dem Gauss-Algorithmus können wir eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ durch Multiplikation mit Elementarmatrizen von links stets auf ausgeräumte Stufenform (Hermite-Normalform) bringen. Durch Multiplikation von rechts erhalten wir schliesslich eine Matrix der Form

$$A' = T A S = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{wobei } k = \text{Rang } A$$

Dieses supertolle Ergebnis heisst in manchen ebensolchen Büchern "Fundamentalsatz der Linearen Algebra". Nur den Rang von A zu kennen, ist aber recht wenig, Hinichtlich der Eigenwerte kennen wir dann nur die geometrische Vielfachheit von 0, nichteinem den Eigenraum dazu. Fassen wir A als die Matrix einer linearen Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ bzgl. Basen α und γ auf, so können wir S und T als Transformationsmatrizen $S = {}_{\beta}T_{\alpha}$ für V bzw. $T = {}_{\gamma}T_{\delta}$ für W auffassen und haben dann A' als die Matrix von ϕ bzgl. der Basen β von V und δ von W auffassen. Daraus können wir die Dimensionsformel ablesen: die hinteren Vektoren von β spannen den Kern von ϕ auf, die vorderen von δ das Bild. Das wr's aber auch.

25.5 Invariante Teilräume und Blockzerlegung

Sei ϕ ein Endomorphismus des K -Vektorraums V . Ein Untervektorraum U von V ist ϕ -invariant, falls $\phi(U) \subseteq U$. Dann ist die Einschränkung $\phi|_U$ ein Endomorphismus von U .

Lemma 25.1 *Sei $\alpha : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ Basis von V und $U = K\vec{v}_{k+1} + \dots + K\vec{v}_{k+m}$. Genau dann ist U ein ϕ -invarianter Teilraum, wenn die Matrix von ϕ bzgl. α folgende Blockgestalt hat*

$$\phi_{\alpha} = \begin{pmatrix} A_{11} & O & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & O & A_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{11} \in K^{k \times k}, A_{22} \in K^{m \times m}$$

Dann ist A_{22} die Matrix von $\phi|_U$ bzgl. der Basis $\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_{k+m}$ von U .

25.6 Jordan-Blöcke

Ein k -Jordanblock zum Eigenwert λ ist eine $k \times k$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sei ϕ eine lineare Abbildung von V in V und λ ein EW von ϕ . Dann bilden $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ aus V eine λ -Jordankette der Länge k mit Kopf \vec{v}_k und Schwanz \vec{v}_1 für ϕ genau dann, wenn k minimal ist mit

$$0 = \phi(\vec{v}_1) - \lambda\vec{v}_1, \vec{v}_1 = \phi(\vec{v}_2) - \lambda\vec{v}_2, \vec{v}_2 = \phi(\vec{v}_3) - \lambda\vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{k-1} = \phi(\vec{v}_k) - \lambda\vec{v}_k$$

bzw. mit $\phi_\lambda(x) = \phi(x) - \lambda x$, d.h. mit $\phi_\lambda = \phi - \lambda id$

$$0 = \phi_\lambda(\vec{v}_1), \vec{v}_1 = \phi_\lambda(\vec{v}_2), \vec{v}_2 = \phi_\lambda(\vec{v}_3), \dots, \vec{v}_{k-1} = \phi_\lambda(\vec{v}_k).$$

$$\begin{array}{cccccccc} \vec{0} & & \vec{v}_1 & & \vec{v}_2 & & \vec{v}_3 & & & & \vec{v}_{k-1} & & \vec{v}_k \\ & \phi_\lambda & & \phi_\lambda & & \phi_\lambda & & & & & & \phi_\lambda & & \end{array}$$

Ist $V = K^n$, $\mathbf{v}_i = v_i^\alpha$ und $A = \phi_\alpha$ so schreibt sich das so

$$\mathbf{0} = (A - \lambda E)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 = (A - \lambda E)\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1} = (A - \lambda E)\mathbf{v}_k,$$

Lemma 25.2 Die Matrix einer Abbildung ϕ von V in V bzgl. einer Basis $\beta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von V ist von der Form

$$\begin{pmatrix} J & + \\ O & + \end{pmatrix}$$

mit einem k -Jordanblock zum EW λ genau dann, wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ eine λ -Jordankette für ϕ ist. Der Schwanz \vec{v}_1 einer λ -Jordankette ist stets ein EV zum EW λ .

25.7 Jordan-Matrizen

Eine *Jordanmatrix* J ist blockdiagonal mit Jordan Kästchen auf der Diagonale.

Korollar 25.3 Die Matrix einer Abbildung ϕ von V in V bzgl. einer Basis β ist eine *Jordan-Matrix* genau dann, wenn β eine Aneinanderreihung von λ -Jordanketten zu EW λ von ϕ ist.

Eine solche Basis heisst eine *Jordan-Basis* von ϕ . Die einzelnen Jordan-Ketten entsprechen dabei den Blöcken und erzeugen invariante Teilräume.

Satz 25.4 Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix so, dass $\det(A - xE) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - x)$ mit $\lambda_i \in K$, d.h. das charakteristische Polynom zerfällt in K in Linearfaktoren (z.B. wenn $K = \mathbb{C}$ - Fundamentalsatz der Algebra). Dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$ so, dass $A' = S^{-1}AS$ *Jordanmatrix* ist, die *Jordansche Normalform*. Diese ist bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt, insbesondere stehen auf der Diagonalen die Eigenwerte gerade entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit und die Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ ist gerade dessen geometrische Vielfachheit.

Beispiel. Für jeden Eigenwert λ sei die geometrische Vielfachheit entweder 1 oder gleich der algebraischen. Für erstere bestimmen wir einen Eigenvektor \mathbf{v}_1 , dann einen Hauptvektor \mathbf{v}_2 mit $(A - \lambda E)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, zu diesem wieder ein \mathbf{v}_3 mit $(A - \lambda E)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$, und so weiter solange bis es nicht mehr geht (das passiert, wenn man $m =$ algebraische Vielfachheit viele Vektoren hat). Auf diese Weise erhält man jeweils eine Jordankette und insgesamt zusammen mit den Basen der restlichen Eigenräume eine *Jordanbasis* - Beweis kommt noch.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ doppelter EW, $\lambda_2 = 3$ einfacher EW. Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_1, \mathbf{v}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_2.$$

Aus $(A - 1E)\mathbf{x} = \mathbf{v}_{11}$ erhält man Hauptvektor

$$\mathbf{v}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

somit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

25.8 Verschiebung

Lemma 25.5 Sei $\mu \in \mathbf{C}$. Dann gilt

$$S^{-1}(A - \mu E)S = S^{-1}AS - \mu E.$$

$$S^{-1}AS \text{ in Jordan-NF} \Leftrightarrow S^{-1}(A - \mu E)S \text{ in Jordan-NF.}$$

Beweis klar. \square

25.9 Normalform nilpotenter Matrizen

Sei K ein beliebiger Körper. Ein Endomorphismus $\phi : V \rightarrow V$ heisst *nilpotent*, wenn es ein k gibt mit $\phi^{k+1} = 0$, die Nullabbildung. Gleichbedeutend: A *nilpotent* d.h. $A^k = O$ mit $A = \phi_\alpha$ für eine/jede Basis α von V . Wählt man k minimal, so

$$V \supset \phi(V) \supset \phi^2(V) \supset \dots \supset \phi^k(V) \supset 0 = \phi^{k+1}(V) \text{ also } k \leq n = \dim V$$

andernfalls hätte man ein $\phi^l(V) = \phi^{l+1}(V) = \phi^k(V) \neq 0$ für alle $k \geq l$.

Satz 25.6 Jeder nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums hat eine Jordan-Basis.

25.10 Hauptvektoren und verallgemeinerte Eigenräume

Sei ϕ Endomorphismus des n -dimensionalen Vektorraums V mit Matrix $A = \phi_\alpha$. Ist λ ein EW von ϕ so heisst

$$V_\lambda = \text{Kern}(\phi_\lambda)^n = \{\vec{x} \in V \mid (A - \lambda E)^n \vec{x} = \mathbf{0}\}.$$

verallgemeinerter Eigenraum oder *Hauptraum* von ϕ zum EW λ . Die Vektoren aus V_λ heissen auch *Hauptvektoren* von ϕ zum EW λ . Offensichtlich gilt

- V_λ wird erzeugt von den λ -Jordanketten

- allgemeiner: das Erzeugnis der Jordan-Kette von Länge $\leq k$ ist

$$V_{\lambda k} = \text{Kern}(\phi_\lambda)^k = \{\vec{x} \in V \mid (A - \lambda E)^k \vec{x} = \mathbf{0}\}$$

Korollar 25.7 *Ist A die Matrix von ϕ bzgl. irgendeiner Basis und β eine Jordanbasis von ϕ , so ist die Anzahl der λ -Jordanketten von Länge $\geq k$ aus β gegeben durch*

$$\dim V - \text{Rang}(A - \lambda E) = \dim E_\lambda \text{ falls } k = 1.$$

$$\text{Rang}(A - \lambda E)^{k-1} - \text{Rang}(A - \lambda E)^k \text{ falls } k > 1$$

Aus diesen Angaben kann man die Jordan-Normalform von A (bis auf Anordnung der Blöcke) eindeutig ablesen.

Beweis. Eine Basis von $V_{\lambda k}$ erhält man, wenn man aus jeder Kette zum EW λ der Jordanbasis die vordersten k Glieder nimmt. Also ist die Anzahl der k -ten Glieder gerade $\dim V_{\lambda k} - \dim V_{\lambda k-1}$. Das Beispiel zeigt zum EW λ Blöcke der Länge 7 (2 mal), 5 (1 mal), 3 (2 mal), 2 (1 mal)

$\vec{0}$

$$E_\lambda =$$

$$V_{\lambda 1} \quad V_{\lambda 2} \quad V_{\lambda 3} \quad V_{\lambda 4} \quad V_{\lambda 5} \quad V_{\lambda 6} \quad V_{\lambda 7}$$

25.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang}(A - 3E) = 2, \text{Rang}(A - 3E)^2 = \text{Rang}(A - 3E)^3 = 1$$

Basis β_3 von $\text{Kern}(A - 3E)^2$: e_1, e_2, e_3

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang}(A - 2E) = \text{Rang}(A - 3E)^2 = 3$$

Basis β_2 von $\text{Kern}(A - 2E)^2$:

$$-e_3 + e_6, -e_2 + e_5, -e_1 + e_4$$

$${}_{\alpha}T_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - {}_{\alpha}T_{\beta}^{-1}A {}_{\alpha}T_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A'|V_3 & O \\ O & A'|V_2 \end{pmatrix}$$

$$A'|V_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A'|V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

J-Basis V_3 : γ_3 : $e_1, e_2, e_3 - e_2$

J-Basis: V_2 : γ_2

$$-e_3 + e_6, -e_2 + e_5, -e_1 + e_4 - (-e_2 + e_5)$$

$${}_{\beta}T_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\alpha}T_{\gamma} = {}_{\alpha}T_{\beta} {}_{\beta}T_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = {}_{\alpha}T_{\gamma}^{-1}A {}_{\alpha}T_{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

25.12 Kleiner Dreh

Lemma 25.8 Sei $\phi : V \rightarrow V$ linear. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ und $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_l$ Jordan-Ketten von ϕ zum EW λ , $l \leq k$ und $\vec{w}_1 = r\vec{v}_1$ mit $r \neq 0$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_l$ unabhängig mit Spann U . Dann ist U ϕ -invarianter Teilraum mit Jordan Basis bestehend aus den zwei λ -Jordan-Ketten

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_2 - r\vec{w}_2, \dots, \vec{w}_l - r\vec{v}_l$$

Beweis, Die neuen Vektoren spannen U auf und sind genau so viele, also Basis. O,B,d.A $\lambda = 0$ wegen Verschiebung. Es gilt

$$\phi(\vec{w}_i - r\vec{v}_i) = \phi\vec{w}_i - r\phi\vec{v}_i = \vec{w}_{i-1} - r\vec{v}_{i-1} \quad (= \vec{0} \text{ falls } i = 2) \square$$

25.13 Matrix-Algorithmus und Existenz-Beweis zur JNF

Hier wird induktiv über das Format vorgegangen. Die Suche nach einer Jordan-Basis erscheint hier als eine systematische Transformation der Matrix. Wir notieren z.B. mit $[Sj := Sj + rSi]$ die Addition des r -fachen der i -ten Spalte zur j -ten Spalte.

Wichtig: Spalten- und Zeilentransformationen müssen immer in der Form $A \rightsquigarrow S^{-1}AS$ gekoppelt ausgeführt werden, wobei zu $S = [Sj := Sj + rSi]$ die inverse Matrix $S^{-1} = [Zi := Zi - rZj]$ gehört. Für den Existenzbeweis kann man aber die Details der Spaltenumformungen ignorieren, man braucht nur, dass sie im Prinzip möglich sind und dass sie zusammen mit den zugehörigen Zeilenumformungen das Richtige bewirken.

- ▶ $A := \phi_\alpha, S := E$
- ▶ 1. Eigenwerte. Voraussetzung: $\det(A - xE) = \prod_i (\lambda_i - x)$. Substitution von $\mu - x$ für x ergibt $\det(A - \mu E - xE) = \prod_i (\lambda_i - \mu - x)$.
- ▶ 2. Verschiebung. Sei μ ein EW. Betrachte statt A die Matrix $A := A - \mu E$ bzw. die lineare Abbildung $\phi := \phi - \mu \text{id}$. Diese hat EW 0
- ▶ 3 Eigenvektor. Bestimme zu A einen EV zum EW 0 und ergänze zu Basis β . Transformiere

$$A := {}_\alpha T_\beta^{-1} A {}_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} 0 & + \\ \mathbf{0} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad S := S {}_\alpha T_\beta.$$

- ▶ 4. Rekursion: Beachte: $x \det(\tilde{A} - xE) = \det(A - xE)$ und daraus Zerlegung von $\det(\tilde{A} - xE)$ in Linearfaktoren. Bestimme rekursiv invertierbare Matrix \tilde{U} mit $\tilde{J} := \tilde{U}^{-1} \tilde{A} \tilde{U}$ in Jordan-NF.

$$U := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{U} \end{pmatrix}, \quad A := U^{-1} A U = \begin{pmatrix} 0 & + \\ \mathbf{0} & \tilde{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & + & + \\ \mathbf{0} & J_0 & O \\ \mathbf{0} & O & J_\infty \end{pmatrix}, \quad S := S U.$$

- ▶ J_0, J_∞ in Jordan NF
- ▶ J_0 mit Blöcken zum EW 0 und der erste Block von maximaler Länge
- ▶ J_∞ mit Blöcken zu EW's $\lambda \neq 0$.

- ▶ 5. Ausräumen Da die erste Spalte von A Null ist, können wir gezielt die 1'en und λ 's benutzen, um uns in der ersten Zeile durch Zeilenoperationen Nullen zu verschaffen - die zugehörigen inversen Spaltenoperationen tun auf A ja nichts.

- ▶ 5a. Vorne Ausräumen: Benutze die Einsen aus J_0 um durch Zeilenumformungen in der ersten Zeile Nullen zu erzeugen. Transformiere $Sj := Sj + a_{1,j+1}S1$ falls $a_{j,j+1} = 1$ in einem Block von J_0 .

- ▶ 5b. Hinten Ausräumen: Benutze die EW $\lambda \neq 0$ aus den Jordanblöcken in J_∞ um durch Zeilenumformungen in der ersten Zeile Nullen zu erzeugen. Die 1'er können das be- aber nicht verhindern. Reicht ein Block von $\lambda = a_{kk}$ bis $\lambda = a_{ll}$, so transformiere $Sj := Sj + \frac{a_{lj}}{\lambda}S1$, $a_{1,j+1} := a_{1,j+1} - a_{1j}$ für $j = k \dots, l-1$, $S1 := S1 + \frac{a_{1l}}{\lambda}S1$.

Für das neue A haben wir schliesslich $a_{1j} = 0$ falls Sj nicht erste Spalte eines Blocks aus J_0 . Ausserhalb der ersten Zeile unverändert, insbesondere \tilde{A} in Jordan-Form. Die Transformationen zu den verschiedenen Blöcken sind unabhängig voneinander, können also parallel ausgeführt werden.

- ▶ 6. Kürzen. Eine von den Jordanketten maximaler Länge zum EW 0 wird verlängert, indem man ihr den ersten Basisvektor zuschlägt. Wir haben es so eingerichtet, dass die erste schon so eine ist. Das erspart uns Umsortieren. Konkurrierende Jordanketten (mit Einträgen 1 in der ersten Zeile) werden kürzer gemacht, indem man ein passendes Schwanzstück der glücklichen Jordankette mit einem passenden Skalar durchmultipliziert und von der unglücklichen abzieht so, dass der ehemalige EV zum Nullvektor wird und das zweite Glied zum EV (kleiner Dreh)

- ▶ Seien J_1, \dots, J_m die Jordanblöcke von J_0 , J_k von Grösse n_k . Sei r_k der Eintrag in der ersten Zeile von A , der in der Spalte St_k steht, mit der J_k anfängt. Sei J_h einer unter den Blöcken mit $r_k \neq 0$, der unter diesen maximale Grösse hat. $h = 1$ bei Einhaltung der Konvention in Schritt 4.

- ▶ Transformiere

$$S(t_k + j) := S(t_k + j) - \frac{r_k}{r_h}S(t_h + j) \text{ falls } r_k \neq 0, k \neq h, 0 \leq j \leq n_k - 1$$

d.h. man betrachtet Spalten mit entsprechender Position in J_k und J_h .

- ▶ Wurde die Konvention nicht eingehalten, muessen die Jordan-Ketten richtig zusammensortiert werden.

- ▶ Die Matrix A ist in Jordan-NF. Sie entsteht aus \tilde{J} indem der Block J_h durch einen um eine Zeile und Spalte grösseren Block zum EW 0 ersetzt wird.

- ▶ 7. Rückverschiebung. $J := A + \mu E$, $\beta := \beta$, $S := S$

Damit ist die Ausgangsmatrix A auf Jordan-NF J transformiert: $S^{-1}AS = J$. Die Spalten der Transformationsmatrix S sind die Koordinatenspalten der neuen Basisvektoren aus β bzgl. der Ausgangsbasis α (d.h. die Spalten aus β , wenn die Ausgangsbasis α die kanonische war).

25.14 Potenzen von Dreiecksmatrizen

Lemma 25.9 Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale λ_i und Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ O & A_{22} & A_{23} \\ O & O & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{22} \text{ mit Null-Diagonale}$$

Dann ist $B = A^k$ obere Dreiecksmatrix mit Diagonale λ_i^k und Blockmatrix desselben Formats mit

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ O & B_{22} & B_{23} \\ O & O & B_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{22} \text{ mit 1-te bis } k\text{-te oberer Null-Diagonalen}$$

Insbesondere $B_{22} = O$ falls $A_{22} \in K^{k \times k}$.

Beweis durch Induktion über k . $C = BA$ wird blockweise berechnet

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 B_i A_{kj}, \quad \text{also } C_{ii} = B_{ii} A_{ii}$$

Nun scharf hinsehen. \square

$$\begin{pmatrix} a_1 & + & \dots & + \\ 0 & a_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & + & \dots & + \\ 0 & b_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & + & \dots & + \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & + & + & \dots & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & + & + & + & \dots & + \\ 0 & 0 & + & + & + & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & + \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & + & \dots & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25.15 Zerlegung

Satz 25.10 Sei $\phi : V \rightarrow V$ linear und zerfalle das charakteristische Polynom von ϕ über K in Linearfaktoren. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die verschiedenen EW von ϕ , so

- $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$
- $\dim V_{\lambda_i}$ ist die algebraische Vielfachheit m_i von λ_i
- Die V_{λ_i} und ihre Summen sind invariant unter allen ϕ_μ
- $\phi_\lambda|_{V_\lambda}$ ist nilpotent
- $\phi_\lambda|_{\sum_{\mu \neq \lambda} V_\mu}$ ist bijektiv

Beweis. Nach dem Satz über die Existenz der Jordan-NF dürfen wir annehmen, dass ϕ bzgl. einer passenden Basis durch eine Jordan-Matrix A beschrieben wird. Nach Lemma 25.9 über Block-Zerlegungen bedeutet das die direkte Zerlegung von V in invariante Teilräume V_{ij} zum j -ten Block zum EW λ_i

$$V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_j V_{ij}$$

Nach Verschiebung ist $A = \lambda_i E$ ebenfalls Jordan-Matrix und zwar mit Diagonaleintrag 0 anstelle von λ_i , $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ anstelle von λ_j , $j \neq i$. Ist k_i das größte Format eines Blockz sum EW λ_i , so tritt in $(A - \lambda_i E)^{k_i}$ an die Stelle von Blöcken zu λ_i jeweils ein

Block O , während die anderen Diagonalblöcke in allen $A - \lambda_i E$ und allen Potenzen invertierbar sind. Es folgt

$$V_i = \text{Kern } \phi_{\lambda_i}^n = \text{Kern } \phi_{\lambda_i}^{k_i} = \bigoplus_j V_{ij}, \quad V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$$

und alles weitere. \square

Algorithmus 25.11 *Jordan Normalform einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$*

- ▶ Bestimme $\det(A - xE) = \prod_i (\lambda_i - x)^{m_i}$ mit paarweise verschiedenen EW λ_i
- ▶ Suche für jeden EV λ_i ein minimales k_i mit $\text{Rang}(A - \lambda_i E)^{k_i} = n - m_i$
- ▶ und dann jeweils eine Basis des Lösungsraums von $(A - \lambda_i E)^{k_i} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ - d.h. eine Basis γ_i des Hauptraums V_{λ_i} .
- ▶ $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m$ ist eine Basis von V , $A' = {}_{\alpha}T_{\gamma}^{-1} A {}_{\alpha}T_{\gamma}$ ist blockdiagonal mit Blöcken A_i von Format m_i .
- ▶ A_i sei die Matrix von $\phi|_{V_{\lambda_i}}$ bzgl. γ_i
- ▶ Bestimme (für jedes i) eine Jordan-Basis β_i der nilpotenten Matrix $A_i - \lambda_i E$, die Transformationsmatrix $S_i = {}_{\gamma_i}T_{\beta_i}$ und Jordan-Normalform J_i (nur zur Kontrolle: $J_i = S_i^{-1} A_i S_i$).
- ▶ Zusammengenommen ergeben die β_i eine Jordanbasis von V .
- ▶ Die Jordan-Normalform J von ϕ bzw. A und die Transformationsmatrix $S = {}_{\gamma}T_{\beta}$ sind blockdiagonal aus den J_i bzw. S_i zusammengesetzt.
- ▶ Die endgültige Transformationsmatrix ist ${}_{\alpha}T_{\beta} = {}_{\alpha}T_{\gamma} S$

25.16 Satz von Cayley-Hamilton

Für ein Polynom $p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ und eine quadratische Matrix, können wir die Matrix $p(A) = a_n A^n + \dots a_1 A + a_0 E$ ausrechnen. Bei Basistransformation gilt $p(S^{-1}AS) = a_n (S^{-1}AS)^n + \dots + a_1 S^{-1}AS + a_0 E = a_n S^{-1}A^n S + \dots + a_1 S^{-1}AS + a_0 S^{-1}ES = S^{-1}p(A)S$. Haben wir

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \text{ so } A^k = \begin{pmatrix} B^k & O \\ O & C^k \end{pmatrix} \text{ und } p(A) = \begin{pmatrix} p(B) & O \\ O & p(C) \end{pmatrix}.$$

Satz 25.12 *Für das charakteristische Polynom $\chi(x)$ von A gilt $\chi(A) = O$.*

Beweis. Bei Basistransformation ändert sich χ nicht, also dürfen wir annehmen, dass A in Jordanscher Normalform ist. Für die Matrix J_i mit den Jordankästchen zum Eigenwert λ_i als Diagonalblöcken haben wir $(J - \lambda_i E_{m_i})^{m_i} = O$, d.h. $(x - \lambda_i)^{m_i}(J_i) = O$ und somit auch $\chi(J_i) = O$ da $\chi(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{m_k}$. Also wegen der Blockstruktur $\chi(A) = O$. Mit demselben Argument sehen wir

Satz 25.13 *Für ein Polynom $p(x)$ gilt genau dann $p(A) = O$, wenn das Minimalpolynom $\mu(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{l_k}$ Teiler von $p(x)$ ist. Dabei ist l_i das maximale Format eines Jordankästchens zum EW λ_i .*

26 Jordan-Basen für nilpotente Endomorphismen

Beachte, dass für einen nilpotenten Endomorphismus alle Unterräume Kern ϕ^k und Bild ϕ^k invariant sind.

Lemma 26.1 *Für einen Endomorphismus $\phi : V \rightarrow V$ eines n -dimensionalen Vektorraums sind äquivalent*

- (1) ϕ is nilpotent, d.h. $\phi^{k+1} = 0$ für ein k
- (2) $\phi^n = 0$
- (3) Es gibt Basis β bezüglich deren ϕ durch obere Dreiecksmatrix mit 0-Diagonale beschrieben wird.
- (4) ϕ hat das charakteristische Polynom x^n

Beweis. 2 \Rightarrow 1 trivial. 1 \Rightarrow 3; Wähle k minimal. Wir haben $V \supset \phi(V) \supset \phi^2(V) \supset \dots \supset \phi^k(V) \supset \phi^{k+1}(V) = \{\vec{0}\}$. Wähle die Basis β so, dass man mit einer Basis des Eigenraums $\phi^k(V)$ beginnt und dann jeweils die schon gewählte Basis von $\phi^{i+1}(V)$ zu einer Basis von $\phi^i(V)$ ergänzt. Da die $\phi^i(V)$ alle invariant sind, erhält man für die Matrix B von ϕ bzgl. β die gewünschte Form. 3 \Rightarrow 2: Lemma 25.9. 3 \Rightarrow 4: klar $\det(B - xE) = x^n$. 4 \Rightarrow 3 nach dem Hauptsatz zur JNF. \square

26.1 Jordan-Rang und -Unabhängigkeit.

Sei $\phi : V \rightarrow V$ nilpotent. Wir führen ad hoc einige Bezeichnungen ein: *Jordan-Rang* $JR(\vec{v})$, *Jordan-Kette* $J(\vec{v})$ eines Vektors $\neq \vec{0}$, *Schwanz* $\sigma(\vec{v})$ und *Jordan Spann* $J\text{Spann}$ einer Liste von Vektoren

$$JR(\vec{v}) = \min\{k \mid \phi^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

$$J(\vec{v}) = \phi^{k-1}(\vec{v}), \dots, \phi(\vec{v}), \vec{v} \quad \text{mit } k = JR(\vec{v})$$

$$\sigma(\vec{v}) = \begin{cases} \phi^{k-1}(\vec{v}) & \text{falls } k = JR(\vec{v}) > 0 \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$J\text{Spann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = \text{Spann}(J(\vec{v}_1) \cup \dots \cup J(\vec{v}_m))$$

Es gilt offensichtlich

$$JR(r\vec{v}) = JR(\vec{v}), \quad \sigma(r\vec{v}) = r\sigma(\vec{v}) \quad \text{falls } r \neq 0$$

$$JR(\vec{v}) = JR(\phi(\vec{v})) + 1 \text{ falls } \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \sigma(\vec{v}) = \sigma(\phi(\vec{v})) \text{ falls } \phi(\vec{v}) \neq \vec{0}$$

$$JR(\vec{v}) \leq \max_i \{JR(\vec{v}_i)\} \quad \text{für alle } \vec{v} \in J\text{Spann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ heissen *J-unabhängig*, falls die $\sigma(\vec{v}_1), \dots, \sigma(\vec{v}_m)$ linear unabhängig sind.

Lemma 26.2 *$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sind J-unabhängig genau dann, wenn die Familie $J(\vec{v}_1) \cup \dots \cup J(\vec{v}_m)$ linear unabhängig ist. Diese ist dann disjunkte Vereinigung von Jordanketten.*

Beweis: Induktion über $\max_i JR(\vec{v}_i)$. Sei

$$\sum_i \sum \{r_{ik} \phi^k(\vec{v}_i) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\} = \vec{0}$$

Dann $\phi(\phi^k(\vec{v}_i)) = \vec{0}$ für $k = JR(\vec{v}_i)$ also

$$\sum_i \sum \{r_{ik} \phi^k(\phi(\vec{v}_i)) \mid k \leq JR(\phi(\vec{v}_i))\} = \sum_i \sum \{\phi(r_{ik} \phi^k(\vec{v}_i)) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\} =$$

$= \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ also $r_{ik} = 0$ für $k < JR(\vec{v}_i)$ mit Induktion. Somit

$$\sum_i r_{iJR(\vec{v}_i)} \sigma(\vec{v}_i) = \vec{0}$$

und nach Voraussetzung $r_{iJR(\vec{v}_i)} = 0$. \square

26.2 Jordanische Ergänzung

Sei wieder $\phi : V \rightarrow V$ nilpotent. Wir gehen jetzt davon aus, dass Existenz von Jordanbasen und Eindeutigkeit der Normalform schon gesichert ist. Insbesondere haben wir für jedes $k = 1, 2, \dots, \dim V$ eindeutig bestimmtes

- $J(k) =$ Anzahl der Jordan-Ketten der Länge k in Jordanbasis von ϕ

$$J(k) = \text{Rang} A^{k-1} - \text{Rang} A^k - \sum_{l>k} J(l)$$

Sei JR_{\max} der maximale Jordan-Rang in einer Jordan-Basis und damit der maximal überhaupt mögliche Jordan-Rang (also das minimale k mit $A^k = O$). Dann gilt wegen der Existenz einer Jordan-Basis

- $J(JR_{\max}) = \dim \text{Bild } \phi^{JR_{\max}-1} = \text{Rang} A^k$ wobei k minimal mit $A^k = O$

Eine *Jordan-Teilbasis* $J(\vec{v}_1) \cup \dots \cup J(\vec{v}_m)$ für $\phi : V \rightarrow V$ ist gegeben durch ihre Köpfe $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$, wobei

- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ J-unabhängig
- $JR_{\max} = JR(\vec{v}_1) \geq \dots \geq JR(\vec{v}_m)$
- $\max\{i \mid JR(\vec{v}_i) > JR(\vec{v}_m)\} = \sum\{J(l) \mid l > JR(\vec{v}_m)\}$

d.h. die Köpfe sind J-unabhängig und nach abfallendem Jordan-Rang sortiert, beginnend mit dem maximal möglichen, und jeder Jordan-Rang $l > JR(\vec{v}_m)$ tritt in der maximal möglichen Anzahl $J(l)$ mal auf. Sei $k = JR(\vec{v}_m)$. Der *Exponent* h der Teilbasis ist definiert als

- $h = k$ falls in der Jordan-Teilbasis noch nicht die maximal mögliche Zahl $J(k)$ von Ketten der Länge k auftritt
- andernfalls, sei $h < k$ maximal mit $J(h) > 0$. Sei $h = 0$, wenn es kein solches gibt

Lemma 26.3 Sei $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ eine Jordan-Teilbasis für $\phi : V \rightarrow V$ vom Exponent h . Dann bestimmen die $\phi^{k_i}(\vec{v}_i)$ mit $k_i := JR(\vec{v}_i) - h > 0$, $i = 1, \dots, m$ eine Jordan-Teilbasis für die Einschränkung von ϕ auf $\text{Kern } \phi^h$, und jede zulässige Erweiterung dieser Teilbasis in $\text{Kern } \phi^h$ ergibt auch eine zulässige Erweiterung zu Teilbasis in V .

Beweis: Sei eine Jordan-Basis von V gegeben (und die gibt es), Dann liegt ein Vektor aus V genau dann in $\text{Kern } \phi^h$, wenn die einzigen Koordinaten $\neq 0$ solche bzgl. Basis-Vektoren von Jordan-Rang $\leq h$, also aus $\text{Kern } \phi^h$ sind. Also bilden diese Vektoren eine Jordan-Basis von $\text{Kern } \phi^h$. Bezeichne $J'(l)$ die Anzahl der Ketten von Länge l bzgl. dieser (und damit jede) Jordan-Basis von $\text{Kern } \phi^h$. Dann gilt $J'(h) = \sum_{l \geq h} J(l)$ und $J'(l) = J(l)$ für $l < h$ und die Behauptungen folgen sofort. \square

Satz 26.4 Sei $\phi : V \rightarrow V$ nilpotent und eine Jordan-Teilbasis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ mit $JR(\vec{v}_m) = k$ und Exponent h gegeben. Ist $h = 0$, so liegt schon eine (Jordan-)Basis vor. Andernfalls sei $X \subseteq \text{Kern } \phi^h$ so gewählt, dass X zusammen mit der Jordan-Teilbasis aus dem Lemma den $\text{Kern } \phi^h$ aufspannt. Dann gibt es $\vec{v}_{m+1} \in X$ so, dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m+1}$ Jordan-Teilbasis für $\phi : V \rightarrow V$ ist.

Beweis. Ist $h = 0$, so enthält die Teilbasis zu jeder Länge die maximal mögliche Anzahl Ketten, besteht also aus $\dim V$ vielen Elementen und ist wegen der Unabhängigkeit eine Basis von V .

Sei also $h > 0$. Nach dem Lemma dürfen wir der Einfachheit halber $h = JR_{\max}$ annehmen und sind mit $h = k$ und $m < J(k)$ im ersten Fall. Die $\sigma(\vec{v}_i)$ liegen im Bild ϕ^{h-1} aber dieses hat Dimension $J(h) > m$. Also gibt es \vec{w} in $\text{Bild } \phi^{h-1}$ mit $\vec{w} \notin U := \text{Spann} \{ \sigma(\vec{v}_1), \dots, \sigma(\vec{v}_m) \}$. Wähle \vec{v} mit $\phi^{h-1}(\vec{v}) = \vec{w}$. Nach Voraussetzung $\vec{v} \in \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) + \text{Spann } X$, also

$$\vec{v} = u + \sum_i r_i \vec{x}_i \quad \text{mit } \vec{u} \in \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m), \vec{x}_i \in X$$

Insbesondere $\phi^{h-1}(\vec{u}) \in U$ und $\phi^h(\vec{x}_i) = \vec{0}$ für alle \vec{x}_i . Wäre $\phi^{h-1}(\vec{x}_i) \in U$ für alle \vec{x}_i , so $\vec{w} = \phi^{h-1}(\vec{v}) \in U$, Widerspruch. Also gibt es $\vec{x}_i \in X$ mit $\phi^{h-1}(\vec{x}_i) \notin U$ und mit $\vec{v}_{m+1} := \vec{x}_i$ ist die gesuchte Ergänzung gefunden. \square

Korollar 26.5 Jede Jordan-Teilbasis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ eines nilpotenten Endomorphismus $\phi : V \rightarrow V$ lässt sich zu einer Jordan-Basis ergänzen, die die Struktur eine Jordan-Teilbasis hat. $\phi^l \vec{x} \in \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ für alle $\vec{x} \in V$ und $l \geq JR(\vec{v}_m)$.

Beweis. Die Ergänzung zur Jordan-Basis folgt sofort aus dem Satz. Dann hat man für $\vec{x} \in V$ eine Darstellung $\vec{x} = \vec{u} + \sum_i r_i \vec{x}_i$ mit $\vec{u} \in \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ und \vec{x}_i aus den ergänzenden Basisvektoren, also $JR(\vec{x}_i) \leq JR(\vec{v}_m) \leq l$. Es folgt $\phi^l(\vec{x}) = \phi^l(\vec{u}) + \vec{0} \in \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$. \square

26.3 Algorithmus im nilpotenten Fall

Algorithmus 26.6 Bestimmung einer Jordan-Basis im nilpotenten Fall

- Bestimme minimales k mit $A^k = O$.

- ▶ Suche unter den gegebenen (kanonischen) Basisvektoren von $V = K^n$ die rechte Zahl von $J(k) = \text{Rang}A^{k-1}$ -vielen J -unabhängigen Köpfen \mathbf{v}_i von Jordan-Ketten der (maximalen) Länge k , d.h. $A^{k-1}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$.
- ▶ Hat man eine Jordan-Teilbasis mit der richtigen Anzahl $m = \sum_{l \geq k} J(l)$ von Jordan-Ketten mit Länge $\geq k$ schon erfolgreich bestimmt, so
 - ▶ bestimme $h < k$ maximal mit $J(h) > 0$
 - ▶ ergänze den in $\text{Kern}A^h$ liegenden Teil der Jordan-Teilbasis durch Vektoren aus $\text{Kern}A^h$ zu einer Basis von $\text{Kern}A^h$ (bzw. die ganze Teilbasis zu Basis von V).
 - ▶ wähle aus den neuen Basisvektoren eine Maximalzahl d aus, die nicht in $\text{Kern}A^{h-1}$ liegen und mit den schon vorhandenen Köpfen J -unabhängig sind
 - ▶ füge die zugehörigen Jordan-Ketten zu den schon vorhandenen hinzu. Damit hat man die richtige Anzahl von Ketten der Länge $\geq h$.
- ▶ Bei $h = 0$ ist fertig.

Beweis. Der Algorithmus folgt der Konstruktion, also ist sichergestellt, dass die vorhandene Jordan-Teilbasis zu einer Jordan-Basis ausgebaut werden kann. Nur werden je ein Schritt vom Typ 2 und alle dieek darauf folgenden vom Typ 1 zu einem zusammengefasst. \square

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^3 = O$, $\text{Rang}A^2 = 2$. $A^2\mathbf{e}_5 = 2\mathbf{e}_1$ und $A^2\mathbf{e}_6 = 2\mathbf{e}_2$ sind linear unabhängig, also \mathbf{e}_5 und \mathbf{e}_6 die rechten Köpfe. In den Jordanketten kommen jeweils noch $A\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ und $A\mathbf{e}_6 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$, also hat ihr Spann W die Basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6$, Basisergänzung mit Vektoren aus $\text{Kern}A^2$ z.B. $\mathbf{e}_7, \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_8 - 3\mathbf{e}_5$. Nun $A\mathbf{e}_7 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \in W$ aber $A\mathbf{v} = -3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_7 \notin W$, also ist \mathbf{v} der gesuchte neue Kopf und wir sind fertig. \mathbf{v} bekommen wir auch, indem wir den Dreh auf \mathbf{e}_8 anwenden.

26.4 Großer Dreh

Lemma 26.7 Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ J -unabhängig und zu gegebenem \vec{v} sei l minimal so, dass $\phi^l(\vec{v}) \in U = \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$. Sei dabei $l > 0$ und

$$\phi^l(\vec{v}) = \sum_i \sum_{k \geq l} r_{ik} \phi^k(\vec{v}_i), \quad \vec{v}' := \vec{v} - \sum_i \sum_{k \geq l} r_{ik} \phi^{k-l}(\vec{v}_i)$$

Dann ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}'$ J -unabhängig und $JR(\vec{v}) = l$ und es gilt

$$\text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}) = \text{JSpann}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}')$$

Beweis: $\phi^l(\vec{v}') = \phi^l(\vec{v}) - \sum_i \sum_{k \geq l} r_{ik} \phi^k(\vec{v}_i) = \vec{0}$ und $\phi^{l-1}(\vec{v}') = \phi^{l-1}(\vec{v}) - \sum_i \sum_{k \geq l} r_{ik} \phi^{k-1}(\vec{v}_i) \notin U$ weil sonst $\phi^{l-1}(\vec{v}) \in U$. Also $\sigma(\vec{w}) = \phi^{l-1}(\vec{v}')$ und unabhängig von den $\sigma(\vec{v}_1), \dots, \sigma(\vec{v}_m)$. \square

Der Dreh erlaubt es, die Basisergänzungen für die Kern ϕ^h zu vermeiden.

Algorithmus 26.8 Dreh-Algorithmus im nilpotenten Fall

► *Start: Bestimme minimales k mit $A^k = O$. Setze $m = \text{Rang} A^{k-1}$ und wähle aus den (kanonischen) Basisvektoren \mathbf{e}_j von $V = K^n$ die $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ so aus, dass die Spalten $A^{k-1}\mathbf{v}_i$ von A^{k-1} unabhängig sind. Diese \mathbf{v}_i sind die Köpfe der richtigen Anzahl von Jordan-Ketten der (maximalen) Länge k . Streiche aus der Liste der \mathbf{e}_j auffällige $\mathbf{e}_j \in \text{JSpann}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$*

► *Iteration:*

Sei eine Jordan-Teilbasis durch ihre Köpfe $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ gegeben und $k = JR(\vec{v}_m)$. Sei außerdem die Liste der noch aktiven Basisvektoren \mathbf{e}_j gegeben.

Hat man in der Jordan-Teilbasis insgesamt n Vektoren, d.h. $n = \sum_l l \cdot J(l)$, so ist sie schon eine Jordan-Basis. Fertig! Andernfalls

► *1. Variante*

► *bestimme für jedes \mathbf{e}_j das minimale l_j mit $A^{l_j}\mathbf{e}_j \in \text{JSpann}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$*

► *wähle \mathbf{e}_i mit $l_i > 0$ maximal*

Beobachtung: die l_j bleiben bei der Iteration gleich oder werden kleiner, also muss man zur Bestimmung eines maximalen l_i nicht notwendig alle l_j berechnen

► *bestimme $\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{e}'_i$ mit dem Dreh*

► *streiche \mathbf{e}_j falls $l_j = 0$*

► *2. Variante*

► *setze $h = k$ falls $m < \text{Rang} A^{k-1} - \text{Rang} A^k (= \sum_{l \geq k} J(l))$*

► *sonst bestimme $h < k$ maximal mit $n - \text{Rang} A^h - mh > 0 (\Leftrightarrow J(h) > 0)$*

► *streiche auffällige $\mathbf{e}_j \in \text{JSpann}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$*

► *wähle \mathbf{e}_i so, dass $A^h\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ und $A^{h-1}\mathbf{e}_i \notin \text{JSpann}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$*

► *bestimme $\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{e}'_i$ mit dem Dreh*

Beweis. Der Dreh angewendet auf $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ und jeweils eines der \mathbf{e}_j liefert nach Kor.26.5 eine Menge X von Vektoren von Jordan-Rang $\leq h$, die somit die Teilbasis von Kern A^h zu Erzeugermenge ergänzt. Nach Satz 26.4 gibt es in X einen Kopf, der zur Erweiterung der Teilbasis taugt. \square

Wie testet man, ob eine Spalte \mathbf{v} im Spann einer Liste von Spalten liegt und bestimmt ggf. die Koeffizienten in der Linearkombination? Nun, man schreibt die Liste als Spalten einer Matrix S . Dann bestimmt man mit dem Gaußalgorithmus für Spalten eine invertierbare Matrix R so, dass SR in unterer Stufenform ist (d.h. $(SR)^T$ in Stufenform). \mathbf{v} als Linearkombination der Spalten von S zu schreiben, heisst das Gleichungssystem $S\mathbf{x} = \mathbf{v}$ zu lösen. Äquivalent, mit $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, das System $SR\mathbf{y} = \mathbf{v}$. Hier ergibt sich Lösung bzw. Unlösbarkeit sofort. Nimmt man zu S eine neue Spalte \mathbf{v} hinzu, muss man den Gauß natürlich nicht von vorn rechnen, sondern bestimmt T so, dass $(SR|\mathbf{v})T$ in unterer Stufenform ist und kann dann $(S|\mathbf{v})$ durch folgende Matrix in Stufenform überführen

$$\begin{pmatrix} R & O \\ O & 1 \end{pmatrix}^T$$

26.5 JNF-Existenzbeweis für Strukturmathematiker

Für alle, denen Algorithmen zuwider sind, folgt ein weiterer Beweis. Dazu zeigen wir zunächst die Existenz einer Jordanbasis im nilpotenten Fall. Für eine endliche Teilmenge X von V definiere

$$\Sigma JR(X) = \sum_{\vec{x} \in X} JR(\vec{x})$$

Wir haben $V = \text{JSpann}X$ für ein endliches X , z.B. eine Basis. Wähle X mit $\text{JSpann}X = V$ so, dass $\Sigma JR(X)$ minimal ist. Wir behaupten, dass X J-unabhängig ist und somit die Vereinigung der $J(\vec{x})$ ($\vec{x} \in X$) eine Jordanbasis. Andernfalls hätten wir paarweise verschiedene $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in X$ und eine Linearkombination

$$r_1\sigma(\vec{x}_1) + \dots + r_m\sigma(\vec{x}_m) = \vec{0} \quad \text{mit } r_i \neq 0 \text{ für } i \leq m$$

Wir nummerieren so, dass $h = JR(\vec{x}_1) \leq JR(\vec{x}_i)$ für alle $i \leq m$. Sei \vec{y}_i das Glied der Jordan-Kette $JR(\vec{x}_i)$ mit $JR(\vec{y}_i) = h$. Insbesondere $\phi^{h-1}(\vec{y}_i) = \sigma(\vec{x}_i)$ und $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. Setze

$$\vec{z} = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^m r_i \vec{y}_i = \vec{x} + \sum_{i=2}^m \frac{r_i}{r_1} \vec{y}_i, \quad X' = (X \setminus \{\vec{x}\}) \cup \{\vec{z}\}$$

Dann

$$\phi^{h-1}(\vec{z}) = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^n r_i \phi^{h-1}(\vec{y}_i) = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^n r_i \sigma(\vec{x}_i) = \vec{0}$$

$$JR(\vec{z}) < h = JR(\vec{x}), \quad \Sigma JRX' < \Sigma JRX \text{ und } \text{JSpann}X = \text{JSpann}X'$$

Widerspruch zur Minimalität. \square Wir beweisen nun im allgemeinen Fall die Existenz einer Jordan-Basis durch Induktion. Sei λ ein EW von $\phi : V \rightarrow V$. Wir wenden das Fitting-Lemma (vgl. Hausübung) auf $\psi = \phi - \lambda \text{id}$ an. Dann haben wir eine direkte Zerlegung in ψ -invariante Teilräume $V = U \oplus W$ mit $\psi|U$ nilpotent und $\dim U > 0$. ψ -invariante Teilräume sind offensichtlich auch ϕ -invariant. Wegen Nilpotenz haben wir eine Jordan-Basis β_U für $\psi|U$ und wegen Verschiebung ist das auch eine für $\phi|U$. Wegen $\dim W < \dim V$ haben wir nach Induktion eine Jordan-Basis β_W für $\phi|W$. Zusammengenommen ergeben $\beta_U \cup \beta_W$ eine Jordan-Basis für ϕ . \square

27 Quadratische Formen und Hauptachsen

27.1 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Eine reelle Funktion $f(x_1, x_2) = z$ zweier reeller Variablen x_1, x_2 ordnet jedem Paar reeller Zahlen ein reelle Zahl zu. Beispiel: Jedem Koordinatenpaar von Punkten einer Karte wird die entsprechende Höhe im Gelände zugeordnet. Man kann sich dann den Graphen der Funktion als Fläche im Raum denken - die Geländeoberfläche. Zu einer vorgegebenen Höhe h hat man in der Karte die *Höhenlinie*, angegeben bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems α als

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, f(x_1, x_2) = h\}$$

Ist die Funktion genügend glatt, insbesondere ohne senkrechte oder gar überhängende Abstürze und scharfe Grate, so kann man sie nach Taylor in der Nähe jedes Punktes (p_1, p_2) durch ein Polynom ausdrücken. Insbesondere in der Nähe des Ursprungs

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{i+j \leq N} b_{ij} x_1^i x_2^j \quad \text{für } x_1 \approx 0, x_2 \approx 0$$

Dabei ist im allgemeinen $N = \infty$, häufig darf man jedoch die höheren Potenzen vernachlässigen und kommt mit $N = 1$ bzw. $N = 2$ aus. In letzteren Falle haben wir dann

$$f(x_1, x_2) \approx b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{20}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

Die Koeffizienten erhalten wir durch partielles Ableiten an der Stelle - hier $(0, 0)$

$$b_{00} = f(0, 0), \quad b_{10} = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad b_{01} = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad b_{20} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \quad b_{02} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \quad b_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Im Allgemeinen muss man x_i durch $x_i - p_i$ ersetzen. Hat man in einem Punkt (o.B.d.A. dem Punkte $(0, 0)$) einen (relativen) Extremwert, so muss die Tangentialebene an die Fläche in diesem Punkt horizontal sein, was sich in $b_{10} = b_{01} = 0$ ausdrückt. Ausserdem ist der Wert von b_{00} belanglos. Also geht es um die *quadratische Form*

$$(1) \quad Q(x_1, x_2) = b_{20}x_1^2 + b_{20}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

Die Punkte mit horizontaler Tangentialebene haben stets ein bestimmtes Muster von Höhenlinien und durch Wahl eines geeigneten neuen Koordinatensystems x'_1, x'_2 und reeller Zahlen λ_1, λ_2 kann man immer erreichen, dass das Gelände beschrieben wird durch

$$(2) \quad \tilde{Q}(x'_1, x'_2) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2$$

Berggipfel	Maximum	konzentrische Ellipsen	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
Seegrund	Minimum	konzentrische Ellipsen	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
Sattel		Hyperbelpaar	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
Rinne/Rücken		parallele Geraden	ein $\lambda_i = 0$
Ebene		\emptyset	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Bei einer Wanderung auf einem in der Karte als Kreis um den betreffenden Punkt eingetragenen Weg, wird die maximale bzw. minimale Höhe genau dann erreicht, wenn der Weg eine dieser neuen Koordinatenachsen kreuzt: Ist $\lambda_i \geq \lambda_j$, so wird das Maximum bei der Achse x'_i , das Minimum bei x'_j angenommen.

27.2 Flächen zweiter Ordnung

Beispiele von Kurven zweiter Ordnung hatten wir gerade: die Höhenlinien von quadratischen Formen wie in (1). Bei den Flächen wollen wir uns auch beschränken auf die, die von quadratischen Formen herrühren und sich bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems α beschreiben lassen als

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Q(x_1, x_2, x_3) = c\}$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

Vostellen kann man sich dabei Isothermen bzw. Isobaren, nicht auf einer simplen Wetterkarte, sondern mit Berücksichtigung der Höhe. Um Beispiele diskutieren zu können, nehmen wir erst mal $c > 0$ und

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	Ellipsoid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 < 0$	einschaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < 0$	einschaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 = 0$	elliptischer Zylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$	2 parallele Ebenen

Entsprechend bei Vertauschen der Indices bzw. $c < 0$ (bei den Ellipsoiden bzw. elliptischen Zylindern wird's dann leer). Auch in diesem Falle sind die Koordinatenachsen dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen Maximum bzw. Minimum von $Q(x_1, x_2, x_3)$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ angenommen wird, d.h. wenn man Q als Funktion nur auf der Einheitskugel betrachtet. Euler hat (fast) gezeigt, dass man stets ein Koordinatensystem findet so, dass es genauso wie in den Beispielen aussieht.

27.3 Bilineare Formen

Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Seine Elemente schreiben wir als \vec{v} . Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}) &= \Phi(\vec{v}, \vec{u}) + \Phi(\vec{w}, \vec{u}) & \Phi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) &= \Phi(\vec{u}, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v}, \vec{w}) &= r\Phi(\vec{v}, \vec{w}) & \Phi(\vec{v}, r\vec{w}) &= r\Phi(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Sei $\alpha : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine Basis von V . Dann gibt es eine bijektive Entsprechung zwischen Bilinearformen Φ auf V und Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vermöge

$$\boxed{\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^t A \vec{y}^\alpha, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{n \times n}}$$

(die transponierte Matrix zu X schreiben wir als X^t). $A = \Phi^\alpha$ heisst dann die (*Gram*)-*Matrix* von Φ bzgl. α . Die Form Φ ist *symmetrisch*, d.h.

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x) \text{ für alle } x, y \in V \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A$$

Die zugehörige *quadratische Form* $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}^\alpha)^t A \vec{x}^\alpha = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j && \text{mit } \vec{x}^\alpha = (x_1, \dots, x_n)^t \\ &= \sum_i q_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j && \text{mit } q_{ii} = a_{ii} \text{ und } q_{ij} = 2a_{ij} \end{aligned}$$

und muss dann, wenn man die q_{ij} und die Matrix A angeben will beachten, dass

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2}q_{ij} & \text{falls } i < j \text{ bzw. } j < i \end{cases}$$

Und kann man Φ aus Q zurückgewinnen: $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$. Eine reelle quadratische Form auf \mathbb{R}^n ist natürlich eine reelle Funktion in n Variablen und man veranschaulicht sie durch Niveau-Hyperflächen, für $n = 2$ also durch Höhenlinien.

27.4 Transformation

Ist β eine weitere Basis, so werden die Koordinaten von Vektoren transformiert nach dem Ansatz

$$\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$$

wobei in den Spalten der Transformationsmatrix ${}_\alpha T_\beta$ die Koordinaten der neuen Basisvektoren bzgl. der alten Basis α stehen. Wer hier einen Isomorphismus sehen will, nehme den von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}^\beta \mapsto \vec{x}^\alpha$ - d.h. die Umrechnung der Koordinaten. Für die Basisbeschreibungen der Form gilt dann

$$\boxed{\Phi^\beta = {}_\alpha T_\beta^t \Phi^\alpha {}_\alpha T_\beta}$$

Beweis. $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$, $\vec{y}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta$, also

$$(\vec{x}^\beta)^t {}_\alpha T_\beta^t \Phi^\alpha {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta = ({}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta)^t \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^t \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$$

27.5 Metrik

Physiker sprechen statt von einer symmetrischen Bilinearform auch von einem *symmetrischen Tensor*. Wichtigstes Beispiel ist der *metrische Tensor* $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$. Für ihn gilt

$$\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2$$

Hat \vec{x} Länge 1, so ist $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ gerade die Projektion von \vec{y} auf \vec{x} , aufgefasst als Skalar. Und $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ genau dann, wenn \vec{x} und \vec{y} aufeinander senkrecht stehen. D.h. dieser Tensor definiert die Begriffe Länge, Orthogonalität und Winkel und kann umgekehrt schon aus der Länge definiert werden (wobei es dann auf die Längeneinheit ankommt). Er ist durch seine *positive Definitheit* ausgezeichnet

$$\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}$$

Abstrakt gesehen ist jeder positiv definite symmetrische Tensor genauso gut wie der metrische - wenn es einem nichts ausmacht, in einer Richtung in Meter, in der zweiten in Fuss, in der dritten in Ellen zu messen.

27.6 Trägheitstensor

Wie Sie alle vom Karusellfahren her wissen, ergibt sich das Trägheitsmoment $J(\vec{a})$ eines starren Körpers mit der Massendichte $m(\vec{x})$ (wir benutzen Ortvektoren bzgl. Ursprung O) bzgl. einer durch O gehenden Achse \vec{a} (mit $|\vec{a}| = 1$) als

$$J(\vec{a}) = \int m(\vec{x}) \cdot |\vec{x} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}$$

dabei ist $|\vec{x} \times \vec{a}|$ der Abstand des durch \vec{x} gegebenen Punktes P von der Achse \vec{a} . Statt des Integrals dürfen Sie sich eine Summation über Würfelchen $d\vec{x}$ denken. In der Tat, denkt man sich die Masse M im Schwerpunkt P des Karusellfahrers konzentriert und als \vec{a} die Achse des Karusells, so ist $J(\vec{a}) = M|\vec{x} \times \vec{a}|^2$ und das wird kleiner, wenn P näher zur Achse rückt. Da M und die Energie erhalten bleiben, muss die Winkelgeschwindigkeit zunehmen. Euler hat gezeigt, dass J in der Tat eine quadratische Form ist. Den Tensor, der hinter dem Trägheitmoment steckt, erhält man nämlich ganz einfach als

$$\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \int m(\vec{x}) \cdot \langle \vec{x} \times \vec{a} | \vec{x} \times \vec{b} \rangle d\vec{x}$$

Bezüglich irgendeiner Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat man also für $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{v}_i$

$$J(\vec{a}) = J(\vec{v}_1)a_1^2 + J(\vec{v}_2)a_2^2 + J(\vec{v}_3)a_3^2 + 2d_{12}a_1a_2 + 2d_{13}a_1a_3 + 2d_{23}a_2a_3$$

Hat man eine Orthonormalbasis gewählt und den Ursprung im Schwerpunkt des Körpers, so kann man die d_{ij} als *Deviationsmomente* deuten: sie beschreiben die Ablenkung in Richtung auf die Achse \vec{v}_j bei Rotation um die Achse \vec{v}_i .

Die *Hauptachsen* sind nach Euler (oder J.A. von Segner) diejenigen \vec{a} , für die $J(\vec{a})$ maximal bzw. minimal ist (cum grano salis). Euler hat gezeigt, dass es sowas gibt und dass die auch noch aufeinander senkrecht stehen, also eine Orthonormalbasis bilden. Wenn man eine Basis aus Hauptachsen zugrundelegt, gilt

$$J(\vec{a}) = J(\vec{v}_1)a_1^2 + J(\vec{v}_2)a_2^2 + J(\vec{v}_3)a_3^2 \quad \text{für } \vec{a} = \sum_i a_i \vec{v}_i$$

Die $J(\vec{v}_i)$ heissen *Hauptträgheitsmomente*. Insbesondere tritt bei Rotation um eine Hauptachse keine Deviation auf, am stabilsten ist die Lage bei Rotation auf die Achse mit maximalem Trägheitsmoment.

27.7 Definitheit

Eine quadratische Form Q heisst

$$\begin{array}{ll} \text{positiv definit} & \Leftrightarrow Q(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0} \\ \text{negativ definit} & \Leftrightarrow Q(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}, \\ \text{indefinit} & \Leftrightarrow \text{sonst} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{positiv semi-definit} & \Leftrightarrow Q(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \\ \text{negativ semi-definit} & \Leftrightarrow Q(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall \vec{x} \end{array}$$

Eine symmetrische Matrix heisst *X-definit*, falls sie bzgl. einer (und dann jeder) Basis eine X-definite Form definiert. Natürlich ist A genau dann negativ (semi) definit, wenn $-A$ positiv (semi) definit ist.

27.8 Hauptachsentransformation

Sei V nun auch noch ein euklidischer Raum, d.h. mit einem Skalarprodukt ausgestattet. ON-Basis bedeutet Orthonormalbasis bzgl. dieses Skalarprodukts.

Satz 27.1 *Zu jeder reellen symmetrischen Bilinearform Φ gibt es eine ON-Basis β so, dass Φ^β (reelle) Diagonalmatrix ist.*

Die Basisvektoren \vec{v}_i aus β bzw. die durch sie bestimmten Achsenrichtungen bilden dann ein *Hauptachsensystem* für Q und die Diagonaleinträge $\lambda_i = Q(\vec{v}_i)$ die zugehörigen *Eigenwerte*. Alle zu einem Eigenwert λ gehörigen Hauptachsenvektoren \vec{v}_i (d.h. mit $\lambda_i = \lambda$) spannen den *Eigenraum* E_λ auf. Sind nun die z_i die Koordinaten bzgl. β , so können wir Q in der *Hauptachsenform* schreiben

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 \quad \text{für } \vec{x} = \sum_i z_i \vec{v}_i$$

Korollar 27.2 • *Äquivalent sind*

- Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Minimum nämlich 0,
- alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ (> 0).
- Q ist positiv semidefinit (positiv definit)

• *Äquivalent sind*

- Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Maximum nämlich 0,
- alle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$ (< 0),
- Q ist negativ semidefinit (negativ definit)

In beiden strikten Fällen, und nur in diesen, hat man elliptische Niveau-Hyperflächen.

Korollar 27.3 *Das Maximum von Q unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$ ist der grösste Eigenwert λ_{\max} , das Minimum der kleinste Eigenwert λ_{\min} . Sie werden gerade auf den zugehörigen Eigenräumen angenommen.*

Zusatz 27.4 *Die Eigenwerte und Eigenräume sind eindeutig bestimmt. Vektoren aus Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht. ON-Basen der Eigenräume ergänzen sich zu einem Hauptachsensystem.*

Die Korollare liest man sofort ab. Den Beweis von Satz und Zusatz führen wir über die zugehörige symmetrische Bilinearform Φ und ihre Matrix A . Wir beginnen mit $n = 2$. Sei eine ON-Basis α gegeben. Wir suchen ON-Basis

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \quad \text{mit } \Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

Dazu der Ansatz

$$\vec{v}_1^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^\alpha = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0$$

Also

$$(a_{11} - a_{22})x_1x_2 - a_{12}x_1^2 + a_{21}x_2^2 = 0$$

$$at^2 + bt - a = 0 \quad \text{mit } t = \frac{x_2}{x_1}, \quad a = a_{12} = a_{21}, \quad b = a_{11} - a_{22}$$

$$t_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1}$$

Daraus x_1 und x_2 und die \vec{v}_i durch Normieren. Hat man $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ so ist der Eigenraum die ganze Ebene und auch λ eindeutig, nämlich $\lambda = Q(\vec{x})$ für alle \vec{x} auf dem Einheitskreis. Andernfalls sind λ_1 und λ_2 als maximaler bzw. minimaler Wert von Q auf dem Einheitskreis bestimmt und werden gerade an den Hauptachsen angenommen - weshalb die auch eindeutig sind.

Nun gehts weiter mit Induktion. Mit analytischem Gelaber folgt, dass es auf der Einheitshyperkugel $\{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ irgendwo am heissesten ist, d.h. es ein \vec{v}_1 gibt mit $Q(\vec{v}_1) =: \mu$ maximal. Die darauf orthogonalen Vektoren bilden einen Untervektorraum $U = \vec{v}_1^\perp$ und für die Einschränkung von Φ auf U können wir's schon auch Induktionsannahme. d.h. es gibt ON-Basis $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ von U mit

$$\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j, i, j > 1$$

Für jedes $i > 1$ haben wir aber den von \vec{v}_1, \vec{v}_i aufgespannten 2-dimensionalen Untervektorraum U_i und da haben wir's ehrlich schon gemacht, sogar mit Zusatz. Weil $Q(\vec{v}_1)$ maximal ist und \vec{v}_1, \vec{v}_i ON-Basis von U_i ist's ein Hauptachsensystem für die Einschränkung von Φ auf U_i , also

$$\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 \quad \text{für } i > 1$$

Das war's für den Satz. Offensichtlich ist μ als Maximum eindeutig bestimmt und der zugehörige Eigenraum E_μ wird gerade von den \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$ und $Q(\vec{v}) = \mu$ erzeugt (und ist damit auch eindeutig bestimmt). Weil ein \vec{v} das auch Anteile in anderen Achsenrichtungen hat, den Maximalwert nicht annehmen kann. Hat man nun irgendein Hauptachsensystem, so liegen die Achsen zu Eigenwerten $\lambda_i < \mu$ in dem Raum E_μ^\perp aller zu E_μ orthogonalen Vektoren. Der und die Einschränkung von Φ sind eindeutig bestimmt und es folgt alles weitere mit Induktion. \square

27.9 Ausartung

Die symmetrische Bilinearform Φ bzw. die zugehörige quadratische Form Q heisst *ausgeartet*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

- (1) 0 ist ein Eigenwert
- (2) Es gibt $\vec{v} \neq 0$ mit $\Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$ für alle \vec{x}
- (3) $\det \Phi^\alpha = 0$ für eine/jede Basis α

Beweis. 1 \Rightarrow 2: In einem Hauptachsensystem wähle \vec{v} zum Eigenwert 0. 2 \Rightarrow 3. Bei Basistransformation $\det S^t A S = (\det S)^2 \det A$. 3 \Rightarrow 1: Für ein Hauptachsensystem β ist $\det \Phi^\beta = \prod_i \lambda_i$. \square

Korollar 27.5 *Eine nicht ausgeartete quadratische Form ist pos./neg. definit genau dann, wenn sie pos./neg. semidefinit ist.*

27.10 Klassifikation

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation ergeben sich für $n = 2$, neben dem uninteressanten Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, die folgenden Fälle ($\kappa \neq 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$)

Eigenwerte	Definitheit	Höhenlin	Fläche	offen	lok. Verh.
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	positiv	Ellipse	ellipt. Paraboloid	oben	Min.echt
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	negativ	Ellipse	ellipt. Paraboloid	unten	Max.echt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	indefinit	Hyperbel	hyperbol.Parabol.		Sattelpkt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	pos.semidef. ausg.	Ger.	parabol.Zylinder	oben	Minimum
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	neg.semidef. ausg.	Ger.	parabol.Zylinder	unten	Maximum

Für $\kappa = 0$ hat man Punkt, 2 schneidende Geraden, bzw. Doppelgerade als Höhenlinie.

27.11 Geometrisches Beispiel

Gegeben sei bzgl. einer ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Form

$$Q(\vec{x}) = 2x_2(x_1 + x_3) \quad \text{für } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Gesucht ist unter den Vektoren mit $|\vec{x}| = 1$ einer mit $Q(\vec{x})$ maximal. Bei festem x_2 liegen die $(x_1, x_3)^t$ auf einem Kreis und man hat $x_1 + x_3$ zu maximieren. Aus Symmetriegründen muss dann $x_1 = x_3$ sein. Das gesuchte Maximum ist also $\max 4x_2x_1$ auf dem Kreis $\{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1, x_1 = x_3\}$. Wieder aus Symmetriegründen wird das Maximum bei $x_2 = 1/\sqrt{2}$ angenommen. Ergänzung zu ON-Basis.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3^\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_3) \\ \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}. \quad t := x'_2/x'_3, \quad t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \sqrt{2}, \quad t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{w}_2 + t_1\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 + t_2\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Hauptachsenrichtungen von $\Phi|_{(\mathbb{R}\vec{w}_2 + \mathbb{R}\vec{w}_3)}$. Die Hauptachsen durch Normierung.

$$\vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3^\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{EW } \lambda_i = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_i), \quad \lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Die Kennfläche ist ein hyperbolischer Zylinder.

27.12 Trägheitssatz

Satz 27.6 Zu jeder symmetrischen Bilinearform Φ gibt es eine Basis β so, dass

$$\Phi^\beta = \begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Signatur p, q der Form Φ eindeutig bestimmt. (Sylvester)

Beweis. Mit Diagonalisierung erhält man eine reelle Diagonalmatrix $D = T^t A T$ mit Diagonaleinträgen d_{ii} . Setze $S = T \tilde{D} P$, wobei \tilde{D} Diagonalmatrix mit Einträgen $\tilde{d}_{ii} = 1/\sqrt{|d_{ii}|}$ bzw. 0 ist und P passende Permutationsmatrix. Natürlich kann auch schon vorher permutiert werden.

Zur Eindeutigkeit genügt es, den Fall zu betrachten, dass $A' = S^t A S$ und A Diagonalmatrizen sind, und die ersten p bzw. k Diagonaleinträge 1, die nächsten q bzw. $l-1$ und die restlichen 0 sind. $S^t A = A' S^{-1}$ hat offenbar Spaltenrang $p+q$ und Zeilenrang $k+l$, also $r = p+q = k+l$. Mit der Koordinatentransformation $\mathbf{y} = S^{-1} \mathbf{x}$ gilt

$$|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_r|^2 = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = |y_1|^2 + \dots + |y_k|^2 - |y_{k+1}|^2 - \dots - |y_r|^2.$$

Angenommen $p > k$. Dann wird durch $x_{p+1} = 0, \dots, x_n = 0$ und $y_1 = [S^{-1} \mathbf{x}]_1 = 0, \dots, y_k = [S^{-1} \mathbf{x}]_k = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem von weniger als n Gleichungen in den Variablen x_1, \dots, x_n gegeben, also hat man eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dann folgt aber $|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 = -(|y_{k+1}|^2 + \dots + |y_r|^2) \leq 0$, und damit $x_1 = \dots = x_p = 0$ und doch $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den Fall $p < k$ schliesst man durch Vertauschen der Rollen von A und A' aus.

27.13 Zerlegung

Satz 27.7 *Zu jeder quadratischen Form Q auf V gibt es eine orthogonale Zerlegung*

$$V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0 \text{ und } \lambda_+ > 0 > \lambda_-$$

so, dass $\dim V_+, \dim V_-$ die Signatur von Q ist und

$$Q(\vec{v}) \geq \lambda_+ |\vec{v}|^2 \quad \forall \vec{v} \in V_+, \quad Q(\vec{v}) \leq \lambda_- |\vec{v}|^2 \quad \forall \vec{v} \in V_-, \quad Q(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in V_0$$

Beweis. Seien $V_0 = E_0$ und V_+ bzw. V_- Summe der Eigenräume zu positiven bzw. negativen Eigenwerten. Sei λ_+ der kleinste positive, λ_- der grösste negative Eigenwert. Sind die $\vec{v}_i, (i \in I)$ die Hauptachsenvektoren zu den $\lambda_i > 0$ so

$$Q(\vec{v}) = Q\left(\sum_{i \in I} x_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i \in I} \lambda_+ x_i^2 = \lambda_+ \sum_{i \in I} x_i^2 = \lambda_+ |\vec{v}|^2 \quad \text{für } \vec{v} \in V_+$$

Entsprechend für V_- . \square

27.14 Symmetrischer Gauss

Die Eigenwerte kann man im wirklichen Leben nur numerisch bestimmen - und auch das ist ziemlich aufwendig. Oft braucht man aber nur ihre Vorzeichen und die können wir, dank Sylvester, ablesen, wenn wir SAS^t diagonal haben mit invertierbarem $S = {}_\alpha T_\beta^t$.

Satz 27.8 *Zu jeder reellen symmetrischen Bilinearform Φ auf einem endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum gibt es eine Basis β so, dass Φ^β Diagonalmatrix ist*

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i d_i x_i y_i$$

Zu jedem symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es invertierbares S so, dass $S^t A S$ diagonal

Sind alle Hauptminoren $\det A_{\leq k} \neq 0$, so kann man S als obere Dreiecksmatrix wählen.

Dabei ist der Hauptminor $A_{\leq k}$ die durch die ersten k Zeilen und Spalten gegebene $k \times k$ -Untermatrix von A .

Um ein S zu finden, erinnern wir uns, dass nach Gauss jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatizen ist (solchen die die Zeilenumformungen beschreiben). Wir machen also jeweils eine Zeilenumformung gefolgt von der analogen Spaltenumformung, um die Symmetrie zu erhalten, bis wir am Ziel sind.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symmetrischer Gaußalgorithmus: Man kombiniere das Transformationsschema mit dem Zeilen-Gaußalgorithmus zur Bestimmung einer oberen Stufenform. Man erhält symmetrische A_k , also

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & + \end{pmatrix}, \quad A_{k+1} = T_{k+1} A_k T_{k+1}^t, \quad S_0 = E, \quad S_{k+1} = S_k T_{k+1}^t$$

wobei D_k Diagonalmatrix. Sind alle Hauptminoren $\neq 0$, so gilt stets $a_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$, d.h. man kann die T_{k+1} als untere und somit alle S_k als obere Dreiecksmatrizen wählen.

► Gegeben sei $A_k = \begin{pmatrix} D_k & & O \\ O & \begin{pmatrix} b_{k+1,k+1} & \cdots & b_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k+1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$

- Ist $b_{k+1,k+1} \neq 0$, so bewirke durch Zeilenscherungen, dass die neue $k+1$ -te Zeile von 'A' ausserhalb der Diagonalen nur noch Nullen enthält. Ändere die Werte über der Diagonalen von 'A' so, dass wieder eine symmetrische Matrix entsteht
- Ist $b_{k+1,k+1} = 0$ so suche vorher $i > k+1$ mit $b_{i,i} \neq 0$ und vertausche $k+1$ -te und i -te Zeile in 'A', ebenso für Spalten von 'A'
- Ist $b_{ii} = 0$ für alle $i > k$, so suche vorher $j > i > k$ mit $b_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$. Addiere in 'A' die j -Zeile zur i -ten und die j -te Spalte zur i -ten. Das ergibt i -ten Diagonaleintrag $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$.
- Ist dummerweise immer $b_{ij} + b_{ij} = 0$, so addiere in 'A' das b_{ij} -fache der j -te Zeile zur i -ten Zeile das b_{ij} -fache der j -ten Spalte zur i -ten Spalte. Das ergibt i -ten Diagonaleintrag $2b_{ij}b_{ij} \neq 0$.
- Sind alle $b_{ij} = 0$ für $j > i > k$, so rufe 'Gott sei Dank'

27.15 Definitheitskriterium

Satz 27.9 Für eine symmetrische Matrix A sind gleichwertig:

- A ist positiv definit.

- Es gibt eine invertierbare Matrix W mit $A = WW^t$.
- Die Hauptminoren $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ von A haben $\det A_{\leq k} > 0$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar nach dem Trägheitssatz. Also ist für positiv definites A die Determinante $\det A = \det(W^t W) = \det W^t \det W = |\det W|^2 > 0$. Andererseits sind für positiv definites A alle Hauptminoren $A_{\leq k}$ positiv definit: für die durch $A_{\leq k}$ definierte quadratische Form $Q_{\leq k}$ gilt: $Q_{\leq k}(x_1, \dots, x_k) = Q(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) > 0$ falls ein $x_i \neq 0$. Also $\det A_{\leq k} > 0$ für alle k .

Sei nun (3) vorausgesetzt, insbesondere $a_{11} \neq 0$. Also hat man im symmetrischen Gaußalgorithmus sofort $A \rightsquigarrow B = TAT^t$ und es bleibt nur zu zeigen, dass B wieder die Voraussetzung erfüllt. Man beachte, dass für die Hauptminoren gilt $B_{\leq k} = T_{\leq k} A_{\leq k} T_k^t$ d.h. sie haben Determinante $|\det T_{\leq k}|^2 \det A_{\leq k} > 0$. Ist C der $n-1 \times n-1$ -Minor $C = (b_{ij})_{1 < i, j}$ so ist $C_{\leq k}$ Minor von $B_{\leq k+1}$ und es gilt $\det(B_{\leq k+1}) = a_{11} \det C_{\leq k}$. Also hat C nur positive Hauptminoren und das Verfahren führt zu einer Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen, also schliesslich mit dem Produkt S der Matrizen aus den Einzelschritten zu $SAS^t = E_n$ und $A = WW^t$ mit $W = S^{-1}$.

28 Rund um quadratische Formen

28.1 Cholesky-Zerlegung

Die Matrix W aus obigem Satz kann man sogar als untere Dreiecksmatrix wählen, da der Gaußalgorithmus hier ohne Vertauschungen auskommt. Daher kann man aus dem Ansatz

$$\boxed{R^t R = A \quad R \text{ obere Dreiecksmatrix}}$$

die Zeilen von R der Reihe nach berechnen - genau dann, wenn A positiv definit

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad r_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - (|r_{1k}|^2 + \dots + |r_{k-1,k}|^2)} \\ \blacktriangleright \quad r_{kj} &= \frac{1}{r_{kk}} [a_{kj} - (r_{k1}r_{1j} + \dots + r_{k,k-1}r_{k-1,j})] \end{aligned}$$

Da Dreiecksmatrizen leicht zu invertieren sind, hat man so ein effektives Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit positiv definiter Matrix.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

28.2 Kennfläche bestimmt Form

Satz 28.1 *Eine reelle quadratische Form ist durch ihre Kennhyperfläche eindeutig bestimmt.*

Beweis. O.B.d.A. gibt es ein \vec{x} mit $Q(\vec{x}) > 0$ - sonst nehme man $-Q$ oder man hat $Q = 0$. Nun ist $Q(\vec{x}) = s > 0$ gleichbedeutend zu $Q(\frac{1}{\sqrt{s}}\vec{x}) = 1$. Also ist die Zuordnung $\vec{x} \mapsto Q(\vec{x}) > 0$ schon durch die Kennhyperfläche bestimmt. Man suche nun eine Basis $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ so, dass $Q(\vec{w}_i) > 0$ und $Q(\vec{w}_i + \vec{w}_j) > 0$ für alle i, j . Diese Werte sind, wie gesagt, schon durch die Kennfläche bestimmt und man erhält aus ihnen die $\Phi(\vec{w}_i, \vec{w}_j)$ und damit alle Werte von Φ . Um so eine Basis zu finden, wähle \vec{v}_1 mit $a = Q(\vec{v}_1) > 0$ und ergänze zu Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Für alle $\vec{v} \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt nun $Q(r\vec{v}_1 + \vec{v}) = r^2a + 2rb + c = (r\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{a} + c$ mit $b = \Phi(\vec{v}_1, \vec{v})$ und $c = Q(\vec{v})$. Lässt man r variieren, so erhält man eine nach oben offene Parabel, hat also ein $f(\vec{v}) \in \mathbb{R}$ so, dass $Q(r\vec{v}_1 + \vec{v}) > 0$ für alle $r > f(\vec{v})$. Wähle nun r grösser als alle $f(\vec{v}_i)$ und $f(\vec{v}_i + \vec{v}_j)$. Dann erhält man mit $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ und $\vec{w}_i = r\vec{v}_1 + \vec{v}_i$ eine Basis der gewünschten Art. Nämlich $Q(\vec{w}_1 + \vec{w}_j) = Q((r+1)\vec{v}_1 + \vec{v}_j) > 0$ und $Q(\vec{w}_i + \vec{w}_j) = Q(2r\vec{v}_1 + \vec{v}_i + \vec{v}_j) > 0$ da $2r > f(\vec{w}_i + \vec{w}_j)$. \square

28.3 Jacobiverfahren

Ursprung vieler Verfahren zur Bestimmung der EW einer symmetrischen Matrix A ist das folgende Verfahren von Jacobi. Sei σA die Quadratsumme der $n(n-1)/2$ Einträge oberhalb der Diagonalen: $\sigma A = \sum_{i < j} a_{ij}^2$. Dass A Diagonalmatrix ist, bedeutet gerade $\sigma A = 0$, und dem wollen wir nun durch ein Iterationsverfahren immer näher kommen.

Lemma 28.2 *Zu jeder symmetrischen $n \times n$ -Matrix A_k gibt es eine orthogonale Matrix S_{k+1} , sodass*

$$\sigma A_{k+1} \leq q \sigma A_k \text{ für } A_{k+1} = S_{k+1}^t A_k S_{k+1} \text{ und } q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}.$$

Sei nun $A_0 = A$ und die A_k, S_k induktiv nach dem Lemma bestimmt. Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma A_k = 0$. Die Produktmatrizen $U_k = S_1 \cdot \dots \cdot S_k$ sind ebenfalls orthogonal. Fasst man $n \times n$ -Matrizen als n^2 -Tupel auf, so bilden die orthogonalen Matrizen eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^{n^2} bestehend aus den $(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn})$, die den Gleichungen $\sum_i u_{ij}^2 = 1$ und $\sum_i u_{ij} u_{ik} = 0$ für $j \neq k$ genügen - insbesondere $|u_{ij}| \leq 1$, Also hat die Folge U_k eine konvergente Teilfolge U_{k_l} mit Limes U - und U ist auch orthogonal.

$$\sigma(U^t A U) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sigma(S_{k_l}^t \cdot \dots \cdot S_1^t A S_1 \cdot \dots \cdot S_{k_l}) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} q^{k_l} \sigma A = 0$$

und somit ist $U^t A U$ Diagonalmatrix. Das Dumme ist: Nur der oberste Chef von Herrn Bolzano weiss, welche U_k zu der konvergenten Teilfolge gehören. Nur wenn man n verschiedene EW hat, konvergieren die U_k gegen 'das' Hauptachsensystem.

Beweis des Lemmas. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir A und nehmen an, dass a_{12}^2 das grösste der a_{ij}^2 , $i < j$, ist (andernfalls muss man die Basis umordnen,

d.h. mit einer Permutationsmatrix transformieren). Über den Fall $n=2$ finden wir eine Drehmatrix D_ϕ , sodass

$$D_\phi^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} D_\phi$$

Diagonalmatrix ist und setzen

$$S = \begin{pmatrix} D_\phi & 0 \\ 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

Für $A' = S^t A S$ haben wir $a'_{12} = 0$, $a'_{ij} = a_{ij}$ für $2 < i \leq j$ und

$$a'_{1j} = a_{1j} \cos \phi + a_{2j} \sin \phi, \quad a'_{2j} = -a_{1j} \sin \phi + a_{2j} \cos \phi$$

und damit $\sigma A' = \sigma A - a_{12}^2 \leq \sigma A$.

Man kann zeigen, dass die Diagonalelemente $a_{ii}^{(k)}$ von A_k um weniger als $\sqrt{q^k \sigma A}$ von den in passender Reihenfolge genommenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ abweichen. Dieselbe Schranke gilt für $|A \mathbf{u}_j^k - \lambda_j \mathbf{u}_j^k|$, d.h. die Spalten von U_k verhalten sich im Rahmen der Rechengenauigkeit wie Eigenvektoren, obwohl die Abweichung (gemessen an den Winkeln) von einer tatsächlichen Basis von Eigenvektoren absolut gross sein kann. Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ hat EW/Hauptachsen } -\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = S_1^t A S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ EW/Hauptachsen } -1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad A_2 = S_2^t A_1 S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Dass man hier nach endlich vielen Schritten fertig ist, war ein Glücksfall. Es gibt jedoch eine wichtige Abänderung des Verfahrens (nach Givens), in der man A durch endlich viele Drehungen auf Tridiagonalgestalt transformiert. Von da kann man auf das charakteristische Polynom kommen, und die Nullstellen mit Näherungsverfahren berechnen.

28.4 Matrixphilosophie

Der Gaußalgorithmus und seine gesternte Variante haben die erfreuliche Eigenschaft, innerhalb jeden Körpers, z.B. dem der rationalen Zahlen, ausführbar zu sein. Demgegenüber beruhen Hauptachsentransformation für symmetrische reelle Matrizen ebenso

wie der noch zu behandelnde Spektralsatz für normale Matrizen, die Schursche Transformation auf Dreiecksgestalt und die Jordansche Normalform wesentlich auf den Abschlusseigenschaften von \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Ein direkter Algorithmus wie Gauss (auch wenn man noch solche Schritte wie das Normieren erlaubt) ist ohne vorherige Bestimmung der Eigenwerte nicht möglich, da man sonst ein allgemeines Verfahren zur Nullstellenbestimmung rationaler Polynome in einer Variablen mithilfe der arithmetischen Operationen und Wurzeln hätte, was aber nach Galois und Abel nicht sein kann. Aber auch bei den meisten praktizierten Näherungsverfahren für die Transformationen beruht der Nachweis der Konvergenz auf dem abstrakten Beweis (bzw. der Voraussetzung) der Existenz der Transformation. Daher ist es sinnvoll, begrifflich einfache Existenzbeweise zu studieren und sie durch Übungsalgorithmen besser zu verstehen.

28.5 Flächenträgheitsmomente

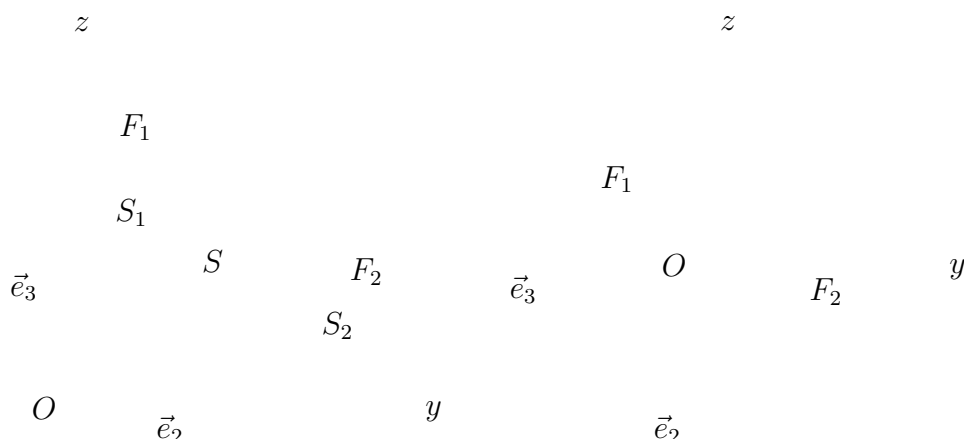
In Lehrbüchern der Technischen Mechanik findet man zum Thema Flächenträgheitsmomente folgende Integrale

$$I_2 = \int_F y^2 \delta A, \quad I_3 = \int_F z^2 \delta A, \quad I_{23} = I_{32} = \int_F yz \delta A$$

Bis auf ewtartige Vertauschung der Achsen heissen die I_2, I_3 auch *axiale Momente*, bis aufs Vorzeichen die I_{23} *Deviationsmomente*. Was wollen uns die Dichter damit sagen? Es geht um einen Balken, der sich längs der x -Achse eines Koordinatensystems ausdehnt, dessen Querschnitte senkrecht zur x -Achse alle durch die selbe Fläche F der y - z -Ebene gegeben sind, und dessen Massendichte ρ konstant ist. Der Ursprung des Koordinatensystems muss dabei im Schwerpunkt der Querschnittsfläche liegen. Die Integrale der Form $\int_F f(y, z) \delta A$ kann man geometrisch als mit Vorzeichen behaftete ‘Volumen’ von $\{(y, z, u) \mid (y, z) \text{ ‘in’ } F, u \text{ zwischen } 0 \text{ und } f(y, z)\}$ deuten, d.h. als ‘Volumen’ des Raumes zwischen F und der durch $u = f(y, z)$ gegebenen Fläche. Bei den Integralen I_2 und I_3 sind diese Flächen parabolische Rinnen längs der z - bzw. y -Achse, bei I_{23} eine Sattelfläche. Man bildet nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} I_2 & I_{23} \\ I_{32} & I_3 \end{pmatrix}$$

und bestimmt die Eigenwerte λ_2, λ_3 und die zugehörige ON-Basis \vec{v}_2, \vec{v}_3 von Hauptachsen. Will man den Balken in einer Ebene mit ON-Basis \vec{e}_1, \vec{a} verbiegen, so braucht man laut Mechanikbuch am meisten/wenigsten Kraft, wenn \vec{a} Hauptachse zum grössten/kleinsten Eigenwert ist. Das wollen wir erst mal an einem Beispiel durchrechnen.



Wir betrachten ein symmetrisches Winkelprofil mit Querschnittsfläche $F = F_1 \cup F_2$, die in einem ungeschickten aber naheliegenden Koordinatensystem beschrieben wird durch

$$F_1 \hat{=} \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4\}, F_2 \hat{=} \{(y, z) \mid 2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$$

Nun brauchen wir erst mal den Schwerpunkt $S = \vec{s} + O$. Den erhält man aus den Flächeninhalten $|F_i|$ und den Schwerpunkten $\vec{s}_i + O$ der F_i

$$\vec{s} = \frac{|F_1|}{|F_1|+|F_2|} \vec{s}_1 + \frac{|F_2|}{|F_1|+|F_2|} \vec{s}_2 \hat{=} \frac{8}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \hat{=} \{(y, z) \mid a \leq y \leq b, a \leq z \leq c\}, F_2 \hat{=} \{(y, z) \mid b \leq y \leq c, a \leq z \leq c\}$$

für Ursprung im Schwerpunkt und $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{F_1} z^2 \delta A + \int_{F_2} z^2 \delta A = \int_a^b \int_a^c z^2 \delta z \delta y + \int_b^c \int_a^c z^2 \delta z \delta y \\ &= \int_a^b \frac{1}{3} [z^3]_a^c \delta y + \int_b^c \frac{1}{3} [z^3]_a^c \delta y = \int_a^b \frac{468}{81} \delta y + \int_b^c \frac{126}{81} \delta y = \frac{1}{81} ([468y]_a^b + [126y]_b^c) = \frac{136}{9} \end{aligned}$$

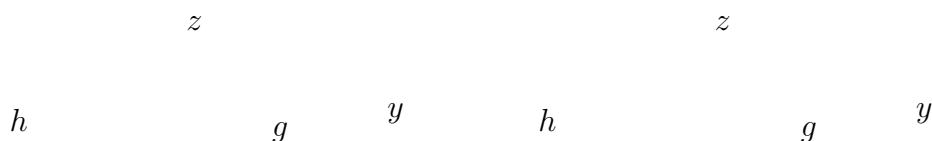
Dasselbe kriegt man aus Symmetriegründen für I_3 heraus. Nun

$$\begin{aligned} I_{23} &= \int_F yz \delta A = \int_a^b \int_a^c yz \delta z \delta y + \int_b^c \int_a^c yz \delta z \delta y = \int_a^b \frac{1}{2} [yz^2]_{z=a}^{z=c} \delta y + \int_b^c \frac{1}{2} [yz^2]_{z=a}^{z=b} \delta y \\ &= \int_a^b -\frac{4}{3} y \delta y + \int_b^c -\frac{8}{3} y \delta y = -\frac{2}{3} [y^2]_a^b - \frac{4}{3} [y^2]_b^c = -\frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} I_2 & I_{23} \\ I_{23} & I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 136 & -16 \\ -16 & 136 \end{pmatrix}$$

Wegen $I_2 = I_3$ haben wir die Hauptachsen $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ und $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$. Es folgt $\lambda_2 = \lambda_3 - 32 < \lambda_3$, also ist $\vec{a} = \vec{v}_2$ die Lösung. Es hätte somit genügt festzustellen, dass aus Symmetriegründen $I_2 = I_3$ und dass $I_{23} < 0$ - was man am Graphen leicht erkennen kann.

Nun zum Verständnis. Wie kind von Karusellfahren weis, ergibt sich das Trägheitsmoment für eine klein gepresste Masse δm als $r^2 \delta m$, wobei r der Abstand vom Schwerpunkt ist. Also bei konstanter Dichte ρ als $r^2 \rho \delta V$ mit einem 'Volumenelement' $\delta V = \delta \vec{x} = \delta x \delta A$. Beim homogenen Balken interessiert also nur $r^2 \delta A$ mit dem Flächenelement δA für Punkte in F .



Die mechanische Bedeutung der Integrale wird klar, wenn wir F als achsenparalleles Rechteck wählen mit Grundseite g in y -Richtung und Höhe h in z -Richtung. Ist g gross und h klein, ist also der Balken ein Brett, eine Latte oder ein Ski, so weis man aus Erfahrung, dass man diese Latte viel leichter in der x - z -Ebene verbiegen kann als in der x - y -Ebene. Das drückt sich darin aus, dass I_3 viel kleiner ist als I_2 . Und $I_{23} = 0$ wegen der Symmetrie.

Klebt man auf beiden Seiten des Bretts auf der Mittellinie noch eine Leiste auf, so ist I_3 immernoch deutlich kleiner als I_2 und $I_{23} = 0$ und es hat sich hinsichtlich des Biegens nicht viel geändert. Die LA soll nun klarmachen, dass es sich dabei schon um den ‘typischen Balken’ handelt. Dazu gilt es zunächst hinter jeder der Matrizen B eine quadratische Form Q bzw. symmetrische Bilinearform Φ zu entdecken. Diese Form ist gegeben auf der Ebene mit ON-Basis \vec{e}_2, \vec{e}_3 (und Vektoren $\vec{x} = y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$) und bestimmt durch die Fläche F . Die Punkte der Fläche kann man durch Vektoren angeben als $\vec{x} + O$; dabei soll der Ursprung O der Schwerpunkt der Fläche sein. Die Form soll folgendes erfüllen

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= Q(\vec{e}_2) = \int_F y^2 \delta A & \Phi(\vec{e}_3, \vec{e}_3) &= Q(\vec{e}_3) = \int_F z^2 \delta A \\ \Phi(\vec{e}_2, \vec{e}_3) &= \Phi(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = \int_F yz \delta A \end{aligned}$$

d.h. die Matrix B ist die Gram-Matrix von Φ bzgl. \vec{e}_2, \vec{e}_3 . Aber hat diese Form auch eine basisunabhängige Bedeutung? Man kann natürlich auf den guten alten Trägheitstensor zurückgreifen, hier gehts aber auch einfacher

$$\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \int_F \langle \vec{a} | \vec{x} \rangle \langle \vec{b} | \vec{x} \rangle \delta A, \quad Q(\vec{a}) = \Phi(\vec{a}, \vec{a}) = \int_F \langle \vec{a} | \vec{x} \rangle^2 \delta A$$

Q gibt für $|\vec{a}| = 1$ die Summe der Momente in Richtung der Achse \vec{a} an, $\Phi(\vec{a}, \vec{b})$ für orthonormale \vec{a}, \vec{b} die Ablenkung von \vec{a} bzgl. \vec{b} . Beides hat also eine Bedeutung in der Mechanik und die Aussagen hinsichtlich der Basisvektoren ergeben sich als Spezialfall. In einem Koordinatensystem wie oben sehen die Formen so aus

$$\begin{aligned} Q(\vec{a}) &= a_2 \int_F y^2 \delta A + a_3 \int_F z^2 \delta A \quad \text{für } \vec{a} = a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \vec{b} = b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \\ \Phi(\vec{a}, \vec{b}) &= a_2 b_2 \int_F y^2 \delta A + a_3 b_3 \int_F z^2 \delta A + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \int_F yx \delta A \end{aligned}$$

Da wir nun eine Form haben, unabhängig von einer Basis, nur abhängig von der Querschnittsfläche F , macht es Sinn nach den Hauptachsen \vec{v}_2, \vec{v}_3 und den Eigenwerten $\lambda_2 = Q(\vec{v}_2), \lambda_3 = Q(\vec{v}_3)$ zu fragen. Und wir sehen sofort, dass wir dieselbe Form durch ein passendes im Hauptachsensystem liegendes Brett mit Leisten erhalten, dessen Grundseite parallel zum Hauptachse mit dem grösseren Eigenwert ist. Wollen wir die Richtung mit dem geringsten Kraftaufwand beim Biegen haben, so lautet die Aufgabe

Minimiere $Q(\vec{a})$ unter der Nebenbedingung $|\vec{a}| = 1$

Diese Aufgabe wird, wie wir bestens wissen, durch die Hauptachsen $\pm \vec{v}_i$ zum kleineren Eigenwert $Q(\vec{v}_i) = \lambda_i$ gelöst. Resumee

Jeder Balken, mit noch so kunstvollem Profil, kann hinsichtlich der Verbiegung seiner langen Achse als Brett mit Mittelleisten gedacht werden. Die Hauptachse zum grösseren Eigenwert ist parallel zur Grundseite des Bretts

Für Profile, deren Dicke klein im Vergleich zur Breite ist, kann man für Schwerpunkt und Momente näherungsweise Formeln ausrechnen - wenn man wie für die Substanz (Idee, Theorie und Rechnung) dieses Beispiels Verantwortliche die Kunst der erlaubten Vernachlässigungen beherrscht:

$$F \hat{=} \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq h\} \cup \{(y, z) \mid t \leq y \leq h, 0 \leq z \leq t\} \quad \text{mit } t \ll h$$

$$\frac{|F_i|}{|F_1| + |F_2|} \approx \frac{2ht}{ht} = \frac{1}{2}, \quad \vec{s} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ t \end{pmatrix} = \frac{h}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Schwerpunkt als Ursprung wird F beschrieben durch

$$\{(y, z) \mid -\frac{h}{4} \leq y \leq t - \frac{h}{4}, -\frac{h}{4} \leq z \leq \frac{3h}{4}\} \cup \{(y, z) \mid t - \frac{h}{4} \leq y \leq \frac{3h}{4}, -\frac{h}{4} \leq z \leq t - \frac{h}{4}\}$$

Wegen der Symmetrie gilt $I_2 = I_3$ ($\approx \frac{5}{24}h^3t$). Positive Beiträge zu I_{23} gibt es nur im linken unteren Quadranten und die werden jeweils durch ihr Spiegelbild an der z -Achse bzw. y -Achse kompensiert. Also

$$\begin{aligned} I_{23} &\leq 2 \int_{\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} \int_{-\frac{h}{4}}^{t-\frac{h}{4}} yz \delta z \delta y = 2 \int_{\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} \frac{1}{2} [yz^2]_{z=-\frac{h}{4}}^{z=t-\frac{h}{4}} \delta y = \int_{\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} y \left[\left(t - \frac{h}{4}\right)^2 - \frac{h^2}{16} \right] \delta y \\ &\leq \int_{\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} y \left(-\frac{th}{2}\right) \delta y = -\frac{th}{4} [y^2]_{\frac{h}{4}}^{\frac{3h}{4}} = -\frac{1}{8}h^3t < 0 \end{aligned}$$

(sogar $I_{23} \approx -\frac{1}{8}h^3t$) und mit obigen Argument dasselbe Ergebnis: biege in der durch die Winkelhalbierende gegebenen Ebene. Allerdings ist hier wegen des grösseren $|I_{23}/I_2|$ die Kraftersparnis durch Nachdenken überzeugender. Über die Frage, ob man besser nach innen oder nach aussen biegt, muss noch geforscht werden.

Aufgabe:

Ein Balken aus homogenem Material und mit einem gleichseitig dreieckigen Querschnitt soll in einer Ebene durch seine Achse gebogen werden. Die Kräfte sollen dabei in der Mitte und an den Enden des Balkens angreifen. Für welche dieser Ebenen wird die geringste Kraft benötigt? Dabei ist nur das Flächenträgheitsmoment zu berücksichtigen. Die erste überzeugende Lösung wird durch einen Schokolade-Balken ausgezeichnet

28.6 Zerlegung von Abbildungen

Seien V und W K -Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Bezüglich gegebener Basen $\alpha : \vec{v}_i$ von V und $\beta : \vec{w}_i$ von W habe ϕ die Matrix

$$A = {}_{\beta}\phi_{\alpha}$$

Seien nun $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ die (vorangestellte) Ergänzung einer Basis von $\text{Kern}\phi$ zu einer Basis γ von V . Dann gilt $V = U \oplus \text{Kern}\phi$

$$P = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} = \pi_{\gamma}$$

beschreibt die Projektion π von V auf U in Richtung $\text{Kern}\phi$. Sei ψ die Einschränkung von ϕ auf U . Es gilt

$$\phi\vec{v} = \phi\vec{u} + \phi\vec{x} = \phi\vec{u} = \psi\pi\vec{u} \quad \text{für } \vec{v} = \vec{u} + \vec{x} \text{ mit } \vec{u} \in U, \vec{x} \in \text{Kern}\phi$$

Somit

$$\phi = \psi \circ \pi \quad \text{und} \quad A = A_{\beta}T_{\gamma} \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} {}_{\gamma}T_{\alpha}$$

Die Matrix B von ψ bzgl. der Basis $\delta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ von U und β von W gilt

$$B = A_{\alpha}T_{\gamma} \begin{pmatrix} E_k \\ O \end{pmatrix}$$

und man hat die Zerlegung

$$A = B \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} {}_{\gamma}T_{\alpha} = C \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} F$$

mit invertierbare C und F , wenn man die ersten k Spalten von C zu einer Basis von \mathbb{R}^n ergänzt und $F = {}_{\alpha}T_{\gamma}$ wählt. Die letzte Zerlegung kann man auch wieder als Zerlegung von Abbildungen auffassen, wenn man nur die Basen α und β betrachtet

$$\phi = \chi \circ \pi \circ \psi \quad \psi, \chi \text{ bijektiv, } \pi \text{ Achsen-Projektion}$$

28.7 Bild einer Kennfläche

Sei V ein reeller Vektorraum, ϕ ein Automorphismus von V , Q eine quadratische Form auf V und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine (im Falle $c \neq 0$ eindeutig bestimmte) quadratische Form Q' auf V mit

- $\phi(\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = c\}) = \{\vec{y} \in V \mid Q'(\vec{y}) = c\}$
- Das analoge Ergebnis gilt für die Ungleichungen $Q(\vec{x}) \leq c$ bzw. $Q(\vec{x}) \geq c$

Beweis. $Q'(\vec{y}) = Q(\phi^{-1}(\vec{y}))$. Für \mathbb{R}^n mit der kanonischen Basis: A und S bestimmen Q und ϕ , dh. $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ und $\phi \mathbf{x} = \mathbf{y} = S \mathbf{x}$. Dann $\mathbf{x} = S^{-1} \mathbf{y}$ und $c = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (S^{-1} \mathbf{y})^t A S^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{y}^t S^{-1t} A S^{-1} \mathbf{y}$. Somit Q' definiert durch $s^{-1t} A S^{-1}$. Nach dem Trägheitssatz bleibt die Signatur der Matrix erhalten. \square

Seien nun V und W reelle Vektorräume mit $\dim V = n = 1 + \dim W < \infty$ und $\phi : V \rightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung. Sei Q eine quadratische Form auf V mit Signatur $p.q$ und $H = \{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = c\} \neq \emptyset$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein

- Es gibt eine (eindeutige bestimmte) quadratische Form Q' auf W mit $p' = p - 1$, $q' = q$ und $\phi(H) = \{\vec{y} \in W \mid Q'(\vec{y}) \leq c\}$
- Es gibt eine (eindeutige bestimmte) quadratische Form Q' auf W mit $p' = p$, $q' = q - 1$ und $\phi(H) = \{\vec{y} \in W \mid Q'(\vec{y}) \geq c\}$
- Es gibt eine (eindeutige bestimmte) quadratische Form Q' auf W mit $p' = p$, $q' = q$ und $\phi(H) = \{\vec{y} \in W \mid Q'(\vec{y}) = c\}$
- $\phi(H) = W$ und $p = 1$ oder $q = 1$

Beweis und Verfahren. Nach der Dimensionsformel ist $\dim \ker \phi = 1$ und man kann einen aufspannenden Vektor \vec{v}_1 wählen. Diesen ergänze man zu Basis von V und bestimme mit dem symmetrischen Gaußalgorithmus $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ so, dass Q bzgl. der Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ durch eine Diagonalmatrix (mit Diagonaleinträgen d_i) beschrieben wird. In der neuen Basis wird H beschrieben durch $\sum_i d_i y_i = c$. Sei nun π die Projektion auf $U = \text{Spann}(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ in Richtung \vec{v}_1 . Dann

$$\pi(H) = \left\{ \sum_{i=2}^n y_i \vec{v}_i \mid \text{es gibt } y_1 \text{ mit } d_1 y_1^2 + \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 = c \right\} = \left\{ \sum_{i=2}^n y_i \vec{v}_i \mid \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \sim c \right\}$$

wobei \sim für \leq bzw. \geq bzw. $=$ steht, je nachdem ob $d_1 > 0$, $d_1 < 0$ bzw. $d_1 = 0$ ist. Ist $d_1 > 0$ und $d_i \leq 0$ für alle $i > 1$ oder $d_1 < 0$ und $d_i \geq 0$ für alle $i > 1$ so $\pi(H) = U$. Andernfalls wird $\pi(H)$ durch eine Form \tilde{Q} auf U in der behaupteten Weise beschrieben.

Sei nun $\chi : U \rightarrow W$ der Isomorphismus mit $\phi = \chi \circ \pi$. Dann beschreibt die quadratische Form $Q'(\vec{z}) = \tilde{Q}(\chi^{-1}(\vec{z}))$ das Bild von H unter π und hat dieselbe Signatur wie \tilde{Q} . \square

Beispiel. Das Ellipsoid H bzw. die quadratische Form Q sei bzgl. der kanonischen Basis von \mathbb{R}^3 definiert durch

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1$$

ϕ sei die Projektion in Richtung $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ auf die x_1 - x_2 -Ebene W , Wir ergänzen die Projektionsrichtung zu einer Basis und transformieren die Beschreibung von Q auf die neue Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Weitertransformieren mit symmetrischem Gauß ergibt Matrix und neue Basis

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

In den neuen Koordinaten y_i haben wir für H die Gleichung

$$6y_1^2 + \frac{4}{3}y_2^2 + \frac{3}{4}y_3^2 = 1$$

Sei nun zunächst ψ die Projektion in Richtung \mathbf{v}_1 auf $\text{Spann}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Dann haben wir für das Bild $\psi(H)$ die Ungleichung

$$\frac{4}{3}y_2^2 + \frac{3}{4}y_3^2 \leq 1$$

Die Projektion χ von $\text{Spann}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ auf W in Richtung \mathbf{v}_1 wird bzgl. der Basen $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ und $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{mit } S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Für die Koordinaten z_i der Bilder unter χ haben wir also

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}z_1 + z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix}$$

und erhalten wir für $\phi(H) = \chi(\psi(H))$ die Ungleichung

$$\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}z_1 + z_2\right)^2 + \frac{3}{4}(-z_1)^2 \leq 1$$

Das Bild ist also die Ellipsenfäche zu der Ellipse

$$\frac{5}{6}z_1^2 + \frac{4}{3}z_2^2 - \frac{2}{3}z_1z_2 = 1$$

29 Unitäre und euklidische Räume

29.1 Skalarprodukte

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Die konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) schreiben wir als

$$\bar{z} = z^* = a - bi$$

und erinnern uns daran, dass $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ und dass die Abbildung $z \rightarrow z^*$ ein involutiver Anti-Automorphismus von \mathbb{C} ist, d.h.,

$$(z + w)^* = z^* + w^*, \quad (z \cdot w)^* = w^* \cdot z^*, \quad z^{**} = z$$

Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, wir schreiben

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

derart dass für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{array}{ll} \langle \vec{x} + \vec{z} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{z} | \vec{y} \rangle, & \langle \lambda \vec{x} | \vec{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle & \text{semilinear im ersten Argument} \\ \langle \vec{x} | \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle, & \langle \vec{x} | \lambda \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle & \text{linear im zweiten Argument} \\ \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle} & & \text{hermitesch bzw. symmetrisch} \\ \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0} & \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} & \text{positiv definit} \end{array}$$

(manche Autoren vertauschen die Rollen der Argumente, aber so ist's praktischer). V zusammen mit dem Skalarprodukt heisst auch ein *unitärer* und im reellen Fall ein *euklidischer (Vektor) Raum*. Beispiele sind die Skalarprodukte auf dem Raum der Vektoren und das *kanonische Skalarprodukt*

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i \quad \text{auf } \mathbb{C}^n$$

Allgemeiner gilt: ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ Basis des reellen bzw. komplexen Vektorraums V und sind die $\lambda_i > 0$ in \mathbb{R} , so erhält man ein Skalarprodukt auf V durch

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i \lambda_i \bar{x}_i y_i \quad \text{für } \vec{x} = \sum_i x_i \vec{v}_i, \quad \vec{y} = \sum_i y_i \vec{v}_i$$

Wir werden zeigen, dass sich jedes Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen Raum bzgl. einer passenden Basis so beschreiben lässt (und zwar mit $\lambda_i = 1$ - d.h. dass man stets eine 'Orthonormalbasis' hat).

Weitere Beispiele sind die Räume der quadratisch summierbaren Folgen $\mathbf{x} = (x_k | k = 0, 1, \dots)$ reeller bzw. komplexer Zahlen (d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$) mit

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}_k y_k$$

und die Räume von integrierbaren Funktionen $\psi(t)$ vom reellen Intervall $[a, b]$ nach \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} , die $\int |\psi(t)|^2 dt < \infty$ erfüllen (z.B. die stetigen ψ auf kompaktem $[a, b]$), mit

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_a^b \overline{\psi(t)} \phi(t) dt.$$

Da $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$ (wegen der hermiteschen Eigenschaft) kann man die *Länge* oder *euklidische Norm* eines Vektors definieren als

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$$

Häufig wird auch $\|\vec{x}\|$ geschrieben. Es gilt dann

$$|r\vec{x}| = |r| |\vec{x}|, \quad |\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

$|\vec{x} - \vec{y}|$ ist dann der *Abstand* zwischen \vec{x} und \vec{y} . Ein Vektor von Länge 1 ist ein *Einheitsvektor* oder *normiert*. Ist $\vec{x} \neq \vec{0}$, so erhält man durch Normieren den Einheitsvektor

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \vec{x}$$

Die Beweise im Folgenden können, soweit nicht angegeben, wörtlich auch Kap.5 bzw. 17 übernommen werden, wenn amn t durch $*$ ersetzt und, wo nötig, x durch $\bar{x} = x^*$.

29.2 Ungleichungen

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \quad \text{Dreiecksungleichung.}$$

Zwei Vektoren stehen aufeinander *senkrecht*

$$\vec{x} \perp \vec{y} \text{ genau dann wenn } \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0.$$

Es gilt $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} \perp \vec{x}$ und der Satz von Pythagoras

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \text{ falls } \vec{v} \perp \vec{w}.$$

29.3 Orthonormalbasen

Ein System $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ von Vektoren ist *orthogonal*, falls $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ für alle $i < j$, und *orthonormal*, falls auch $|\vec{v}_i| = 1$ für alle i . Für ein Orthonormalsystem gilt

$$\vec{x} = r_1 \vec{v}_1 + \dots + r_m \vec{v}_m \Rightarrow r_i = \langle \vec{v}_i | \vec{x} \rangle$$

also ist es insbesondere unabhängig und damit *Orthonormalbasis*, kurz ON-Basis, des von ihm erzeugten Untervektorraums. Die kanonischen Basen von \mathbb{C}^n bzw. \mathbb{R}^n sind offensichtlich ON-Basen bzgl. des kanonischen Skalarprodukts.

Ist $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine ON-Basis von V , so berechnet sich auch das skalare Produkt aus den Koordinaten :

$$\langle x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n | y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle \vec{e}_i | \vec{x} \rangle} \cdot \langle \vec{e}_i | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{e}_i | \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{x} | \vec{e}_i \rangle \quad \text{Parseval}$$

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \vec{e}_i | \vec{x} \rangle|^2 \quad \text{Plancherel}$$

Durch die Festlegung einer ON-Basis α geht der n -dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V isomorph und isometrisch in \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt über - via $\vec{x} \mapsto \vec{x}^\alpha$

29.4 Adjungierte Matrix

Die *adjungierte* zu einer komplexen Matrix $A = (a_{ij})$ ist die transponierte der Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ mit den konjugiert komplexen Einträgen

$$A^* = \bar{A}^t$$

Es gilt analog wie beim Transponieren

$$A^{**} = A, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (rA)^* = rA^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad E^* = E.$$

$$A \text{ invertierbar} \Rightarrow A^* \text{ invertierbar} \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

A ist reell, genau dann, wenn $A^* = A^t$.

29.5 Unitäre und Orthogonale Matrizen

Eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heisst *unitär* falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und *orthogonal* falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, wenn folgende äquivalente Aussagen gelten

- $SS^* = E$ • $S^*S = E$ • $S^* = S^{-1}$
- Die Spalten von S bilden ON-Basis von \mathbb{K}^n
- Die Zeilen von S bilden ON-Basis des Zeilenraums \mathbb{K}^{n*}

Insbesondere sind die reellen unitären Matrizen genau die orthogonalen und alle Permutationsmatrizen sind orthogonal,

Korollar 29.1 Die unitären bzw. orthogonalen Matrizen bilden bzgl. der Multiplikation eine Gruppe $U(n)$ bzw. $O(n)$.

Korollar 29.2 α ON-Basis \Rightarrow : β ON-Basis \Leftrightarrow ${}_{\alpha}T_{\beta}$ ist unitär

29.6 Orthogonales Komplement

Für $X \subseteq V$ erhalten wir einen Untervektorraum, den zu X orthogonalen

$$X^{\perp} = \{\vec{y} \in V \mid \forall \vec{x} \in X. \vec{x} \perp \vec{y}\}$$

$$X \cap X^{\perp} = \{\vec{0}\}. \text{ Wird } U \text{ von } X \text{ erzeugt, so } U^{\perp} = X^{\perp}$$

29.7 Orthogonale Projektion

Lemma 29.3 Zu jedem endlichdimensionalen Untervektorraum U eines unitären bzw. euklidischen Vektorraums V gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung π_U mit

$$(1) \pi_U(\vec{x} \in U, \quad \vec{x} \in U \Rightarrow \pi_U(\vec{x}) = \vec{x}, \quad \pi_U(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in U^{\perp}$$

Für jede ON-Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ von U gilt

$$(2) \pi_U(\vec{x}) = \langle \vec{v}_1 \mid \vec{x} \rangle \vec{v}_1 + \dots + \langle \vec{v}_m \mid \vec{x} \rangle \vec{v}_m.$$

Weiterhin für alle $\vec{x} \in V$

$$(3) \vec{x} - \pi_U(\vec{x}) \in U^{\perp} \quad \text{und} \quad |\vec{x} - \pi_U(\vec{x})| = \min_{\vec{u} \in U} |\vec{x} - \vec{u}|.$$

Die Abbildung π_U heisst die *Orthogonalprojektion* von V auf U .

- Sind die Spalten von U die Koordinaten einer ON-Basis von U bzgl. einer ON-Basis α von V , so hat π_U bzgl. α die Matrix

$$(\pi_U)_{\alpha} = QQ^*$$

29.8 Orthonormalisierung

Die Idee der Orthogonalprojektion liefert ein Verfahren (*Gram-Schmidt*) um aus einem Erzeugendensystem $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eines Untervektorraums U von V eine Orthonormalbasis $\vec{v}_1'', \dots, \vec{v}_n''$ von U herzuleiten:

- ▶ $\vec{v}_1'' := \frac{1}{|\vec{v}_1|} \vec{v}_1$ falls $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Sonst $\vec{v}_1'' = \vec{0}$.
- ▶ $\vec{v}_{k+1}'' = \vec{v}_{k+1} - (\langle \vec{v}_1'' | \vec{v}_{k+1} \rangle \vec{v}_1'' + \dots + \langle \vec{v}_k'' | \vec{v}_{k+1} \rangle \vec{v}_k'')$
 - ▶ Falls $\vec{v}_{k+1}'' \neq \vec{0}$, so $\vec{v}_{k+1}'' := \frac{1}{|\vec{v}_{k+1}''|} \vec{v}_{k+1}''$
 - ▶ sonst $\vec{v}_{k+1}'' := \vec{0}$
- ▶ Die Vektoren $\neq \vec{0}$ in $\vec{v}_1'', \dots, \vec{v}_n''$ bilden ON-Basis von $\text{Spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

Korollar 29.4 *Jeder Untervektorraum U eines endlichdimensionalen unitären bzw. euklidischen Raums V hat eine ON-Basis und jede ON Basis von U lässt sich zu einer ON-Basis von V ergänzen.*

29.9 Orthogonale Zerlegung

Korollar 29.5 *Jedes $\vec{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U, \vec{w} \in U^\perp$. Wir schreiben $V = U \oplus U^\perp$ und haben $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.*

Beweis. Haben wir auch $\vec{v} = \vec{u}' + \vec{w}'$, so $\vec{u} - \vec{u}' = \vec{w} - \vec{w}' \in U \cap U^\perp$, also $= \vec{0}$. Zur Existenz: $\vec{v} + \pi_U(\vec{v}) + (\vec{v} - \pi_U(\vec{v}))$. Eine Basis von V erhält man nun als Vereinigung von Basen von U und U^\perp . □ Wir definieren

$$X \perp Y \text{ genau dann, wenn } \vec{x} \perp \vec{y} \text{ für alle } \vec{x} \in X, \vec{y} \in Y.$$

Seien U_1, \dots, U_k Untervektorräume von V mit $U_i \perp U_j$ für alle $i \neq j$. Dann ist für

$$U = U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i \text{ für } i = 1, \dots, k\}.$$

die Darstellung eindeutig und wir schreiben

$$U = U_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp U_k$$

und sprechen von einer *orthogonalen Zerlegung* von U . Beweis: Sei $\vec{0} = \vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_k$ mit $\vec{u}_i \in U_i$. Dann $0 = \langle \vec{u}_i | \vec{0} \rangle = \langle \vec{u}_i | \sum_j \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle + \sum_{j \neq i} \langle \vec{u}_i | \vec{u}_j \rangle = \langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle$ also $\vec{u}_i = \vec{0}$. □ Es folgt $U \cap U_i^\perp = \sum_{j \neq i} U_j$.

29.10 Bestapproximierende Lösung

Ist ein Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ über \mathbb{R} oder \mathbb{C} unlösbar, so kann man nach *bestapproximierenden* 'Lösungen' $\tilde{\mathbf{x}}$ suchen, für die $|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|$ minimal wird. Die Gauss'sche 'Methode der kleinsten Fehlerquadrate' können wir wie folgt fassen

Satz 29.6 *Folgende Aussagen sind äquivalent*

- $\tilde{\mathbf{x}}$ bestapproximierend für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- $A\tilde{\mathbf{x}} = \pi_U(\mathbf{b})$, U Spaltenraum von A
- $A^*A\tilde{\mathbf{x}} = A^*\mathbf{b}$

Beweis. $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}$ ist gerade der Spaltenraum U von A also $1 \Leftrightarrow 2$ nach dem Vorhergehenden. Und $A^*A\tilde{\mathbf{x}} = A^*\mathbf{b} \Leftrightarrow EA^*(A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A\mathbf{y})^*(A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{y}^*A^*(A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{y} \Leftrightarrow A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \in U^\perp \Leftrightarrow A\tilde{\mathbf{x}} = \pi_U(\mathbf{b})$

29.11 QR-Zerlegung

Zur Erweiterung von Herrn Spellucci sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} mit Spalten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

- Bestimme \mathbf{v}'_j und \mathbf{v}''_j nach Gram-Schmidt
- Sei Q die Matrix mit Spalten $\mathbf{v}''_1, \dots, \mathbf{v}''_n$,

$$\blacktriangleright R = \begin{pmatrix} r_1 & \langle \mathbf{v}''_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}''_1 \mid \mathbf{v}_n \rangle \\ 0 & r_2 & \dots & \langle \mathbf{v}''_2 \mid \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_n \end{pmatrix} \quad r_j = \begin{cases} |\mathbf{v}'_j| & \text{falls } \neq 0 \\ 1 & \text{falls } |\mathbf{v}'_j| = 0 \end{cases}$$

$A = QR$, Spalten von Q ON oder $\mathbf{0}$, R invertierbare obere Dreiecksmatrix
--

Sind die Spalten von A unabhängig, so sind die von Q ein ON-System.

Beweis. Sei schon $A = A_k S_k$ wobei die ersten k Spalten von A_k ON oder $\mathbf{0}$ und

$$S_k = \begin{pmatrix} R_{\leq k} & O \\ O & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt ergibt $A_{k+1} = A_k T_{k+1}$, wobei

$$T_{k+1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\langle \mathbf{v}''_1 \mid \mathbf{v}_{k+1} \rangle \cdot s_{k+1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -\langle \mathbf{v}''_k \mid \mathbf{v}_{k+1} \rangle \cdot s_{k+1} \\ 0 & \dots & 0 & s_{k+1} \end{pmatrix} & O \\ O & E_{n-k-1} \end{pmatrix} \quad s_j = \begin{cases} |\mathbf{v}'_j|^{-1} & \text{falls } |\mathbf{v}'_j| \neq 0 \\ 1 & \text{falls } |\mathbf{v}'_j| = 0 \end{cases}$$

$$A = A_k S_k = A_{k+1} T_{k+1}^{-1} S_k$$

$$= A_{k+1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \langle \mathbf{v}''_1 \mid \mathbf{v}_{k+1} \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \langle \mathbf{v}''_k \mid \mathbf{v}_{k+1} \rangle \\ 0 & \dots & 0 & r_{k+1} \end{pmatrix} & O \\ O & E_{n-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\leq k} & O \\ O & E_{n-k} \end{pmatrix} = A_{k+1} S_{k+1}$$

29.12 Beispiel

Orthonormalisierung

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_1'' | \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_1'' | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_1'' - \langle \mathbf{v}_2'' | \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_2''$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_3 = 2, \mathbf{v}_3'' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}'_4 = \mathbf{v}_4 - \langle \mathbf{v}_1'' | \mathbf{v}_4 \rangle \mathbf{v}_1'' - \langle \mathbf{v}_2'' | \mathbf{v}_4 \rangle \mathbf{v}_2''$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ON-Basis $\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2'', \mathbf{v}_4''$ von $\text{Spann}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ Ergänzung Ergänze $\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2'', \mathbf{v}_4''$ zu ON-Basis von \mathbb{R}^4 . Dazu Gram-Schmidt für beliebige Ergänzung zu Erzeugendensystem, z.B. $\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2'', \mathbf{v}_3'', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{v}_1'' | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{v}_1'' - \langle \mathbf{v}_2'' | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{v}_2'' - \langle \mathbf{v}_4'' | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{v}_4'' \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & \text{ON-Basis } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

QR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} = QR, \quad Q = (\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2'', \mathbf{v}_3'', \mathbf{v}_4'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} |\mathbf{v}'_1| & \langle \mathbf{v}''_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}''_1 | \mathbf{v}'_3 \rangle & \langle \mathbf{v}''_1 | \mathbf{v}_4 \rangle \\ 0 & |\mathbf{v}_2| & \langle \mathbf{v}''_2 | \mathbf{v}_3 \rangle & \langle \mathbf{v}''_2 | \mathbf{v}_4 \rangle \\ 0 & 0 & 1 & \langle \mathbf{0} | \mathbf{v}_4 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & |\mathbf{v}'_4| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Approximation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{minimiere } |\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|$$

1. Methode: $U = \mathbb{R}\mathbf{v}_1 + \mathbb{R}\mathbf{v}_2$, löse $\mathbf{A}\mathbf{x} = \pi_U(\mathbf{b})$

$$\pi_U(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode: Löse $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 20 & 12 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 16 & 8 \end{array} \right), \quad \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Methode falls Spalten von A unabhängig. $A = QR$, also $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b} \Leftrightarrow R^*Q^*Q\mathbf{R}\mathbf{x} = R^*Q^*\mathbf{b} \Leftrightarrow R\mathbf{x} = Q^*\mathbf{b}$, da $Q^*Q = E$.

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = R^{-1}Q^*\mathbf{b} = R^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Methode: Pseudoinverse

30 Sesquilineare Formen

30.1 Sesquilineare Formen

Gegeben sei im Folgenden der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit 'Involution' $x^* = x$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit $x^* = \bar{x}$ und ein \mathbb{K} -Vektorraum V . (Allgemeiner: (Schief)Körper K mit $1 + 1 \neq 0$ und $x^{**} = x$, $(x + y)^* = x^* + y^*$ und $(xy)^* = y^*x^*$.) Eine (*sesquilineare*) *Form* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} & \text{d.h. } \Phi(\vec{v}, \vec{w}) &\in \mathbb{K} \\ \Phi(\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}) &= \Phi(\vec{v}, \vec{u}) + \Phi(\vec{w}, \vec{u}) & \Phi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) &= \Phi(\vec{u}, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v}, \vec{w}) &= r^*\Phi(\vec{v}, \vec{w}) & \Phi(\vec{v}, r\vec{w}) &= r\Phi(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Ist dabei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $x^* = x$ so sprechen wir von einer reellen *Bilinearform* oder einem *kovarianten Tensor 2. Stufe*.

30.2 Beispiele

- ‘das’ kanonische Skalarprodukt $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ der Ebene oder des Raums
- das Skalarprodukt eines euklidischen bzw. unitären Raumes
- die Determinantenform $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \det(\vec{x}, \vec{y})$ der Ebene
- Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definiert eine Form auf \mathbb{K}^n durch

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y} = \sum_{ij} a_{ij} x_i^* y_j$$

30.3 Gram-Matrix

Gegeben sei ein \mathbb{K} -Vektorraum V mit Basis $\alpha : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Dann gibt es eine bijektive Entsprechung zwischen Formen Φ auf V und Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ vermöge

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{y}^\alpha, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{n \times n}$$

$A = \Phi_\alpha$ heisst dann die (*Gram*)-*Matrix* von Φ bzgl. α .

30.4 Rang

- Sind A und B Gram-Matrizen derselben Form Φ , so gilt $\text{Rang } A = \text{Rang } B$ und es gibt $0 \neq r \in K$ mit $\det B = r r^* \det A$
- Die folgenden Aussagen sind äquivalent
 - $\det A \neq 0$ für eine/jede Gram-Matrix von Φ
 - $\vec{0}$ ist der einzige Vektor \vec{v} mit $\forall \vec{w}. \Phi(\vec{w}, \vec{v}) = 0$
 - $\vec{0}$ ist der einzige Vektor \vec{v} mit $\forall \vec{w}. \Phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$
 - Φ ist *nicht ausgeartet*

Beweis. Aus $B = S^* A S$ folgt $\text{Rang } B = \text{Rang } A$, da S und S^* invertierbar sind. $\det B = (\det S)^* \det A \det S$ mit $\det S \neq 0$. Wählt man eine Basis α so ist $\forall \vec{w}. \Phi(\vec{w}, \vec{v}) = 0$ gleichbedeutend zu $A \vec{v}^\alpha = 0$ - man betrachte die $\vec{w}^\alpha = \mathbf{e}_i$. Also ist $\vec{v} \neq \vec{0}$ genau dann möglich, wenn $\det A = 0$. Entsprechend $\forall \vec{w}. \Phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ d.h. $(\vec{v}^\alpha)^* A = 0$ d.h. $A^* \vec{v}^\alpha = 0$ mit $\vec{v} \neq 0$ genau dann, wenn $\det A^* = (\det A)^* = 0$.

30.5 Transformation

Ist β eine weitere Basis, so gilt

$$\Phi^\beta = {}_\alpha T_\beta^* \Phi^\alpha {}_\alpha T_\beta$$

Beweis. $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$, $\vec{y}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta$, also

$$(\vec{x}^\beta)^* {}_\alpha T_\beta^* \Phi^\alpha {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta = ({}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta)^* \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^* \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$$

Führt man mehrere Transformationen hintereinander aus, so notiert man das zweckmässigerweise so

$$A = A_0 \mid E = S_0, \dots, A_k \mid S_k, \quad A_{k+1} = T_{k+1}^* A_k T_{k+1} \mid S_{k+1} = S_k T_{k+1}, \dots$$

- ▶ Auf S_k Spaltenoperationen
- ▶ auf A_k dieselben Spaltenoperationen und die adjungierten Zeilenoperationen
- ▶ $[Sk := Sk + rSl]^* = [Zk := Zk + r^*Zl]$
- ▶ $[Sk := rSk]^* = [Zk := r^*Zk]$
- ▶ $[Sk \leftrightarrow Sl]^* = [Zk \leftrightarrow Zl]$

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Zeilenoperation } \rightsquigarrow^l \text{ wird nur links ausgeführt. Die Kombination mit adjungierter Spaltenoperation als } \rightsquigarrow^* \text{ notiert}$$

$$S1 \leftrightarrow S2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad Z1 \leftrightarrow^l Z2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$S2 := S2 + iS1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 1-i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$S3 := S3 + (i-1)S1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 1-i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$Z2 := Z2 - iZ1 \rightsquigarrow^l \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 2-2i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$Z3 := Z3 - (i+1)Z1 \rightsquigarrow^l \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 2-2i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$S3 := S3 - S2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1 \\ 2-2i & 1+i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$Z3 := Z3 - Z2 \rightsquigarrow^l \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1 \\ -1-2i & 1-i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ w_3^* \end{pmatrix} \cdot A \cdot (w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & i & 1+i \\ 0 & 1-i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 3 & 2i & 0 \\ -1-2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma 30.1 Zu jedem $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es invertierbares $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass S^*AS untere Dreiecksmatrix ist.

Beweis durch Induktion. Fall 1: Ist $a_{11} \neq 0$ transformiere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & O \\ + & A_1 \end{pmatrix} = S_1^* A S_1 \quad \text{mit } S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsannahme gibt es S_2 so, dass $S_2^* A_1 S_2$ untere Dreiecksmatrix ist. Setze nun

$$S = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$$

Fall 2: Gibt es ein i mit $a_{ii} \neq 0$, so wähle Permutationsmatrix P , so, dass $P^* A P$ den ersten Eintrag $\neq 0$ hat und fahre wie eben fort.

Fall 3: Gilt $a_{ij} = 0$ für alle i , gibt es aber $a_{ij} + a_{ji} \neq 0$, so transformiere zunächst mit $[S_i := S_i + S_j]$ und fahre dann mit Fall 2 fort.

Fall 4: $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle i, j aber es gibt $a_{kl} \neq 0$, also $ia_{kl} + \bar{i}a_{lk} = 2ia_{kl} \neq 0$. Transformiere mit $[S_k := S_k + iS_l]$ und fahre mit Fall 2 fort.

Fall 5. $a_{kl} = 0$ für alle k, l . Tu nix. \square

Korollar 30.2 Zu jeder Sesquilinearform Φ auf einem komplexen Vektorraum gibt es eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ so, dass $\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$ für alle $i < j$

30.6 Adjungierte Form

Zu einer Form Φ haben wir die *adjungierte Form* Φ^*

$$\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^*$$

Beweis. $\Phi^*(r\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, r\vec{x}))^* = (r\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*(\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$ und $\Phi^*(\vec{x}, r\vec{y}) = (\Phi(r\vec{y}, \vec{x}))^* = (r^*\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^{**}(\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$.

Zur adjungierten Form gehört die adjungierte Matrix (da $(\mathbf{y}^* A \mathbf{x})^* = \mathbf{x}^* A^* \mathbf{y}$)

$$\boxed{(\Phi^*)_\alpha = (\Phi_\alpha)^*}$$

30.7 Hermitesche Formen

Eine Form Φ auf V heißt **-hermitesch* oder *selbstadjungiert*, wenn $\Phi = \Phi^*$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V. \quad \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y})^* \quad \text{d.h. } \Phi^\alpha = (\Phi^\alpha)^* \quad \text{bzgl. einer/jeder Basis } \alpha$$

Φ heißt **-schiefhermitesch*, wenn $\Phi = -\Phi^*$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V. \quad \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = -\Phi(\vec{x}, \vec{y})^* \quad \text{d.h. } \Phi^\alpha = -(\Phi^\alpha)^* \quad \text{bzgl. einer/jeder Basis } \alpha$$

Entsprechend heißt eine Matrix A **(schief) hermitesch*, wenn $A^* = A$ bzw. $A^* = -A$. Ist $*$ = id , so sprechen wir auch von *symmetrischen* bzw. *schiefsymmetrischen* Formen und Matrizen.

Wenn wir von (*schief*)hermiteschen Formen oder Matrizen sprechen, so ist

- $K = \mathbb{R}$ und $\forall r. r^* = r$ bzw.
- $K = \mathbb{C}$ und $\forall r. r^* = \bar{r}$

Für jede hermitesche Form Φ : $\forall \vec{x}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$
 Für jede schiefhermitesche Form Φ gilt: $\forall \vec{x}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) \in i\mathbb{R}$

Für jede hermitesche Matrix A gilt: $\forall i. a_{ii} \in \mathbb{R}$
 Für jede schiefhermitesche Matrix A gilt: $\forall i. a_{ii} \in i\mathbb{R}$

Alle Gram-Determinanten einer hermiteschen Form Φ sind reell und haben dasselbe Vorzeichen.

Beweis. $\det A = \det(A^*) = (\det A)^*$, also reell und $(\det S)^*(\det S) = |\det S|^2 \geq 0$.

30.8 Quadratische Formen

Die zu einer Sesquilinearform Φ gehörige *quadratische Form* Q ist gegeben durch

$$Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{x}^\alpha = \sum_{ij} a_{ij} x_i^* x_j \quad \text{mit } A = \Phi^\alpha, \mathbf{x} = \vec{x}^\alpha$$

Q ist durch die Werte auf Vektoren der Länge 1 schon eindeutig bestimmt, da

$$Q(\lambda \vec{x}) = |\lambda|^2 Q(\vec{x})$$

Ist Φ hermitesch, so kann Φ aus Q zurückgewinnen

$$\Re \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \Re(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$$

$$\Im \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \Re \Phi(\vec{x}, -i\vec{y})$$

30.9 Diagonalisierung hermitescher Formen

Satz 30.3 Sei $1 + 1 \neq 0$ in K . Zu jeder *-hermiteschen Form Φ auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum gibt es eine Basis β so, dass Φ^β Diagonalmatrix ist

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i d_i x_i^* y_i$$

Zu jedem *-hermiteschen A gibt es invertierbares S so, dass $S^* A S$ diagonal

Sind alle Hauptminoren $\det A_{\leq k} \neq 0$, so kann man S als obere Dreiecksmatrix wählen.

Dabei ist der *Hauptminor* $A_{\leq k}$ die durch die ersten k Zeilen und Spalten gegebene $k \times k$ -Untermatrix von A .

*-Gaussalgorithmus: Man kombiniere das Transformationsschema mit dem Spalten-Gaussalgorithmus zur Bestimmung einer unteren Stufenform. Man erhält *-hermitesche A_k , also

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & + \end{pmatrix}$$

wobei D_k Diagonalmatrix. Sind alle Hauptminoren $\neq 0$, so gilt stets $a_{k+1, k+1}^{(k)} \neq 0$, d.h. man kann die T_{k+1} und somit alle S_k als obere Dreiecksmatrizen wählen.

- Setze voraus, dass $1 + 1 \neq 0$

► Gegeben sei $A_k = \begin{pmatrix} D_k & & O \\ O & \begin{pmatrix} b_{k+1,k+1} & \dots & b_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k+1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$

- Ist $b_{k+1,k+1} \neq 0$, so bewirke durch Spaltenscherungen, dass die neue $k + 1$ -te Zeile von 'A' ausserhalb der Diagonalen nur noch Nullen enthält. Dieselben Scherungen auf 'S'. Ändere die Werte unter der Diagonalen von 'A' so, dass wieder eine *-hermitesche Matrix entsteht (das entspricht dem Ausführen der adjungierten Zeilenscherungen)
- Ist $b_{k+1,k+1} = 0$ so suche vorher $i > k + 1$ mit $b_{i,i} \neq 0$ und vertausche $k + 1$ -te und i -te Spalte in 'A' und in 'S', ebenso für Zeilen von 'A'
- Ist $b_{ii} = 0$ für alle $i > k$, so suche vorher $j > i > k$ mit $b_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} + b_{ij}^* \neq 0$. Addiere in 'A' und 'S' die j -Spalte zur i -ten und in 'A' die j -te Zeile zur i -ten. Das ergibt i -ten Diagonaleintrag $b_{ij} + b_{ij}^* \neq 0$.
- Ist dummerweise immer $b_{ij} + b_{ij}^* = 0$, so addiere in 'A' und 'S' das b_{ij}^* -fache der j -te Spalte zur i -ten und in 'A' das b_{ij} -fache der j -ten Zeile zur i -ten. Das ergibt i -ten Diagonaleintrag $2b_{ij}b_{ij}^* \neq 0$.
- Sind alle $b_{ij} = 0$ für $j > i > k$, so rufe 'Gott sei Dank'

Tüftlertaufgabe. Finden Sie einen Trick, um den Fall zu behandeln, dass $1 + 1 = 0$ aber $r^* \neq r$ für ein $r \in K$. Was ist los, wenn $1 + 1 = 0$ und $r^* = r$ für alle r ?

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} S2 := S2 + \frac{1}{2}S1 \\ \rightsquigarrow^* \\ S3 := S3 - \frac{1}{2}S1 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow^* S3 := S3 - \frac{1}{3}S2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 9 & 0 & | & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} S1 := \frac{1}{2}S1 \\ \rightsquigarrow^* \\ S2 := \frac{1}{3}S2 \\ S3 := \frac{1}{\sqrt{2}}S3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S1 := S1 - iS2 \rightsquigarrow^* \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i & | & -i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} S2 := S2 - \frac{i}{2}S1 \\ \rightsquigarrow^* \\ S3 := S3 - \frac{1}{2}S1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & | & -i & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S3 := S3 - iS2 \rightsquigarrow^* \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & -\frac{i}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & -i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30.10 Trägheitssatz

Satz 30.4 *Zu jeder hermiteschen Form Φ gibt es eine Basis β so, dass*

$$\Phi^\beta = \begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Signatur p, q der Form Φ eindeutig bestimmt.

Beweis. Mit Diagonalisierung erhält man eine hermitesche Diagonalmatrix T^*AT mit reellen Einträgen d_{ii} . Setze $S = T\tilde{D}P$, wobei \tilde{D} Diagonalmatrix mit Einträgen $\tilde{d}_{ii} = 1/\sqrt{|d_{ii}|}$ bzw. 0 ist und P passende Permutationsmatrix. Natürlich kann auch schon vorher permutiert werden.

Zur Eindeutigkeit genügt es, den Fall zu betrachten, dass $A' = S^*AS$ und A Diagonalmatrizen sind, und die ersten p bzw. k Diagonaleinträge 1, die nächsten q bzw. $l-1$ und die restlichen 0 sind. $S^*A = A'S^{-1}$ hat offenbar Spaltenrang $p+q$ und Zeilenrang $k+l$, also $r = p+q = k+l$. Mit der Koordinatentransformation $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$ gilt

$$|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_r|^2 = \mathbf{x}^*A\mathbf{x} = |y_1|^2 + \dots + |y_k|^2 - |y_{k+1}|^2 - \dots - |y_r|^2.$$

Angenommen $p > k$. Dann wird durch $x_{p+1} = 0, \dots, x_n = 0$ und $y_1 = [S^{-1}\mathbf{x}]_1 = 0, \dots, y_k = [S^{-1}\mathbf{x}]_k = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem von weniger als n Gleichungen in den Variablen x_1, \dots, x_n gegeben, also hat man eine Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dann folgt aber $|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 = -(|y_{k+1}|^2 + \dots + |y_r|^2) \leq 0$, und damit $x_1 = \dots = x_p = 0$ und doch $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den Fall $p < k$ schliesst man durch Vertauschen der Rollen von A und A' aus.

30.11 Definitheit

Eine hermitesche Form Φ auf einem n -dimensionalen Raum bzw. ihre Gram-Matrizen sind

<i>positiv definit</i>	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) > 0$	$\Leftrightarrow p = n$
<i>positiv semi-definit</i>	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$	$\Leftrightarrow q = 0$
<i>negativ definit</i>	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) < 0$	$\Leftrightarrow q = n$
<i>negativ semi-definit</i>	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}. \Phi(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0$	$\Leftrightarrow p = 0$
<i>indefinit</i>	sonst	

Eine semidefinite Matrix ist invertierbar genau dann, wenn sie definit ist.

Beweis: Man wähle eine Basis wie im Trägheitssatz und lese alles ab.

30.12 Definitheitskriterium

Satz 30.5 *Für eine hermitesche Matrix A sind gleichwertig:*

- *A ist positiv definit.*
- *Es gibt eine invertierbare komplexe Matrix S mit $A = S^*S$.*
- *Die Hauptminoren $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ von A haben reelle $\det A_{\leq k} > 0$.*

Beweis. Nach dem Trägheitssatz ist für positiv definites A die Determinante $\det A = \det(S^*S) = \det S^* \det S = |\det S|^2 > 0$. $2 \Rightarrow 1$: $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = (S\mathbf{x})^*(S\mathbf{x}) > 0$, falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und damit auch $S\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $1 \Rightarrow 3$: Ist A positiv definit, so auch alle alle Hauptminoren $A_{\leq k}$: für die durch $A_{\leq k}$ definierte quadratische Form $Q_{\leq k}$ gilt: $Q_{\leq k}(x_1, \dots, x_k) = Q(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) > 0$ falls ein $x_i \neq 0$. Also $\det(A_{\leq k}) > 0$. $3 \Rightarrow 2$: Insbesondere $a_{11} \in \mathbb{R}$, da A hermitesch, und $a_{11} > 0$. Sei T die Matrix, die bewirkt, dass passende Vielfache der ersten Spalte von den anderen Spalten so abgezogen werden, dass in der ersten Zeile ausser a_{11} nur noch Nullen stehen. Dabei ändern sich die Determinanten der Hauptminoren nicht. Wendet man T^* von links zur Bewirkung von Zeilenoperationen an, so erhält man wieder eine hermitesche Matrix

$$T^*AT = B = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \det A_{\leq k} = \det B_{\leq k} = a_{11} \det C_{\leq k-1}$$

Also haben die Hauptminoren von C reelle Determinanten > 0 und wir erhalten nach Induktionsannahme eine Matrix U mit $C = U^*U$. Dann

$$A = S^*S \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & O \\ O & U \end{pmatrix} T^*$$

30.13 Orthosymmetrische Formen

Eine Sesquilinearform Φ auf V heisst *orthosymmetrisch*, wenn gilt

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V$$

Hermitesche und *schiefhermitesche* Formen (d.h. $\Phi(\vec{y}, \vec{x}) = -\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$) sind orthosymmetrisch (und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\text{Rang}\Phi \geq 2$ gibt es hermitesches Ψ und $c \in K$ so, dass $\Phi = c\Psi$, vgl. Huppert, Angewandte Lineare Algebra V.2.5). Ist U ein Untervektorraum, so ist mit Φ auch die Einschränkung $\Phi|_U$ orthosymmetrisch.

30.14 Normale Matrizen

Matrizen A mit $AA^* = A^*A$ heissen *normal*. Hermitesche, unitäre und diagonale Matrizen sind offenbar normal.

Lemma 30.6 *Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AA^* = A^*A$ und $a_{1j} = 0$ für $j > 2$. Dann gilt auch $a_{i1} = 0$ für $i > 2$*

Beweis.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & + & \dots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & + & \dots & \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ 0 & + & \dots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & + & \dots & \end{pmatrix},$$

Also ist der erste Eintrag von $AA^* = A^*A$

$$a_{11}\bar{a}_{11} = \bar{a}_{11}a_{11} + \bar{a}_{21}a_{21} + \dots + \bar{a}_{n1}a_{n1}$$

$$\text{Es folgt} \quad |a_{21}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 = 0 \quad \text{und} \quad a_{12} = \dots = a_{1n} = 0 \quad \square$$

Korollar 30.7 Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine untere oder obere Dreiecksmatrix mit $AA^* = A^*A$, so ist A diagonal.

Beweis durch Induktion.

$$A = \begin{pmatrix} a & O \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} aa^* & O \\ O & BB^* \end{pmatrix} = AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} a^*a & O \\ O & B^*B \end{pmatrix}$$

und somit B Dreiecksmatrix mit $BB^* = B^*B$. Nach Induktionsannahme ist B und damit auch A diagonal. \square Es folgt, dass die Gram-Matrizen orthosymmetrischer Formen normal sind. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Lemma 30.8 Ist A normal und U unitär, so ist auch U^*AU normal.

Beweis. $(U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = U^*AU(U^*AU)^*$. \square

Achtung: Bei nicht unitärer Transformation kann die Normalität verlorengehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

31 Spektraltheorie normaler Formen

In diesem Abschnitt sei V ein n -dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ (wer will, denke sich \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt). Wir betrachten nun zusätzlich eine Form Φ auf V und suchen nach für die Beschreibung von Φ günstigen ON-Basen β . Anders ausgedrückt: wir suchen zu einer $n \times n$ -Matrix A ($= \Phi_\alpha$ bzgl. einer vorgegebenen ON-Basis α , z.B. der kanonischen) Transformationen (auf eine schöne Gestalt) $S^*AS = \Phi_\beta$ mit unitärem S .

Von der Hauptachsentransformation (die wir noch einmal mit beweisen) wissen wir, dass die Symmetrieeigenschaft einer Form der Grund für die Existenz einer solchen Transformation ist. Hier kann die Symmetrieeigenschaft: rechte Eigenvektoren = linke Eigenvektoren bzw. normale Matrix bzgl. ON-Basis nur in Bezug auf das vorgegebene Skalarprodukt definiert werden.

31.1 Komplexifizierung

Für den Spektralsatz wollen wir benutzen, dass jedes komplexe quadratische Polynom $x^2 + px + q$ (d.h. $p, q \in \mathbb{C}$) eine Nullstelle in \mathbb{C} hat. Das folgt mit der p - q Formel

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}p \pm w \quad \text{wobei } w^2 = \frac{p^2}{4} - q = r(\cos \omega + i \sin \omega), \quad w = \pm \sqrt{r}(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2})$$

Wir können problemlos von \mathbb{R} zu \mathbb{C} übergehen, indem wir \mathbb{R}^n als \mathbb{R} -Untervektorraum von \mathbb{C}^n auffassen und das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n als Einschränkung dessen von \mathbb{C} . Ebenso können wir eine reelle $n \times n$ -Matrix als komplexe Matrix auffassen und die durch sie definierte Form bzw. Abbildung auf \mathbb{R}^n als Einschränkung der auf \mathbb{C}^n definierten Form bzw. Abbildung. Koordinatenfrei sagt sich das so:

Bemerkung 31.1 Zu jedem euklidischen Raum V mit ON-Basis α und Sesquilinearform Φ gibt es einen unitären Raum \hat{V} mit ON-Basis α und eine Form $\hat{\Phi}$ so, dass V \mathbb{R} -Untervektorraum von \hat{V} , $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \hat{V}$, das Skalarprodukt auf V Einschränkung dessen auf \hat{V} und Φ Einschränkung von $\hat{\Phi}$.

31.2 Eigenvektoren

$\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein *rechter Eigenvektor* von Φ zum rechten EW $\frac{1}{|\vec{v}|^2}\Phi(\vec{v}, \vec{v})$, wenn

$$\forall \vec{x} \in V. \vec{x} \perp \vec{v} \Rightarrow \Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$$

$\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein *linker Eigenvektor* von Φ zum linken EW $\frac{1}{|\vec{v}|^2}\Phi(\vec{v}, \vec{v})$, wenn

$$\forall \vec{x} \in V. \vec{x} \perp \vec{v} \Rightarrow \Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$$

Das bedeutet: In der ON-Basis $\alpha : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ist der Vektor \vec{v}_i rechter bzw. linker EV zum rechten bzw. linken EW λ für Φ , genau dann, wenn in der Gram-Matrix Φ_α die i -te Spalte bzw. Zeile nur Nullen enthält außer λ in Position i .

\vec{v} ist rechter EV von Φ zu λ \Leftrightarrow \vec{v} ist linker EV von Φ^* zu $\bar{\lambda}$.
--

31.3 Normale Formen

Wir nennen eine Sesquilinearform Φ auf V *normal* (für das Skalarprodukt $\langle | \rangle$ auf V), wenn für jeden Vektor $\vec{v} \in V$ gilt:

- \vec{v} ist genau dann rechter EV von Φ , wenn \vec{v} linker EV von Φ ist.

In diesem Falle ist \vec{v} ein *Eigenvektor*, wenn es linker=rechter EV ist, Orthosymmetrische Formen sind normal.

Lemma 31.2 Sei Φ Sesquilinearform auf dem unitären Raum V . Gibt es eine ON-Basis α so, dass Φ^α normal ist, so ist Φ normal.

Beweis. Sei \vec{v} ein linker EV von Φ und $\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Ergänze zu ON-Basis $\beta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Dann ist ${}_\alpha T_\beta$ unitär, also nach Lemma 30.8 auch $A = \Phi^\beta$ normal. Nach Konstruktion gilt $a_{1j} = 0$ für $j > 1$. Also nach Lemma 30.6 auch $a_{j1} = 0$ für $j > 1$ und somit $\Phi(\vec{v}_j, \vec{v}_1) = 0$ für $j > 1$. Ist $\vec{x} \perp \vec{v}$, so ist \vec{x} Linearkombination der \vec{v}_j , ($j > 1$), also $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$. Die umgekehrte Richtung folgt, indem man Φ^* betrachtet und bedenkt, dass mit A auch A^* normal ist. \square

31.4 Eigenräume normaler Formen

Lemma 31.3 Auf dem n -dimensionalen unitären bzw. euklidischen Raum V sei eine normale Sesquilinearform Φ gegeben. Sei $\vec{0} \neq \vec{v} \in V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) \vec{v} ist Eigenvektor von Φ zum EW λ .
- (2) für eine/jede ON-Basis $\alpha : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ und k mit $\vec{v} = r\vec{v}_k$ gilt, dass

$$\lambda|r|^2 = \Phi(\vec{v}, \vec{v}) \quad \text{und} \quad \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}) = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

- (3) Für eine/jede ON-Basis α gilt: Ist $A = \Phi^\alpha$ die (Gram)Matrix von Φ bzgl. der ON-Basis α so

$$(A - \lambda E)\vec{v}^\alpha = \mathbf{0}$$

Folglich bilden die Eigenvektoren von Φ zum EW λ zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum, den *Eigenraum* $E_{\phi, \lambda}$ von Φ zum EW λ .

Beweis. (1) \Rightarrow (2) nach Def. Es gilt

$$\vec{x}^{\alpha*}(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = \vec{x}^{\alpha*}A\vec{v}^{\alpha} - \vec{x}^{\alpha*}\lambda E\vec{v}^{\alpha} = \vec{x}^{\alpha*}A\vec{v}^{\alpha} - \lambda\vec{x}^{\alpha*}\vec{v}^{\alpha}$$

O.B.d.A $|\vec{v}| = 1$. (3) \Rightarrow (1): Es folgt $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) = \lambda$ und $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$ für $\vec{x} \perp \vec{v}$. (2) \Rightarrow (3):

$$(\vec{v}_i^{\alpha})^*(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = \begin{cases} \lambda - \lambda \cdot 1 & \text{falls } i = k \\ 0 - \lambda \cdot 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases} = 0$$

also $(\vec{z}^{\alpha})^*(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = 0$ für alle $\vec{z} \in V$ und somit $\vec{z}^*(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = 0$ d.h. $\vec{z} \perp (A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha}$ für alle $\vec{z} \in \mathbb{K}^n$ also $(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = 0$. \square

31.5 Lexikographische Ordnung und Extrema

Wir ordnen die Paare $(\Re z, \Im z)$ Realteil/Imaginärteil komplexer Zahlen *lexikographisch*

$$(\Re z, \Im z) > (\Re w, \Im w) \Leftrightarrow \Re z > \Re w \text{ oder } \Re z = \Re w \text{ und } \Im z > \Im w$$

Das ergibt eine totale Ordnung auf den Paaren reeller Zahlen.

Lemma 31.4 Für jede sesquilineare Form Φ gibt es \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$ und

$$Q(\vec{v}) = \max Q = a + bi \text{ wobei } (a, b) = \max\{(\Re Q(\vec{x}), \Im Q(\vec{x})) \mid |\vec{x}| = 1\}$$

$\max Q$ hängt nur von Φ , nicht von der Basis ab. Beweis durch analytisches Gelaber. Wir denken V als \mathbb{R}^n bzw, \mathbb{C}^n und den wieder als \mathbb{R}^{2n} . Dann ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto Q(\vec{x})$ stetig und die Menge $\{\vec{x} \in V \mid |\vec{x}| = 1\}$ ist kompakt. Bolzano sei Dank gibt es $\mu = \max\{\Re Q(\vec{v}) \mid |\vec{v}| = 1\}$ und die Menge $M = \{v \in V \mid |\vec{v}| = 1, \Re Q(\vec{v}) = \mu\}$ ist kompakt und nicht leer. Also gibt es auch $\nu = \max\{\Im Q(\vec{v}) \mid \vec{v} \in M\}$ und ein $\vec{v} \in M$ mit $\Im Q(\vec{v}) = \nu$. \square

Lemma 31.5 Sei Φ^{α} bzgl. einer ON-Basis α eine $n \times n$ -Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen λ_i . Dann gilt

$$\max Q = \lambda_{\max} = a + bi \text{ wobei } (a, b) = \max\{(\Re \lambda_i, \Im \lambda_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Sei $\vec{v} \in V$ mit $|\vec{v}| = 1$. Dann sind äquivalent

$$(1) Q(\vec{v}) = \lambda_{\max}$$

$$(2) \vec{v} \text{ ist Eigenvektor von } \Phi \text{ zum EW } \lambda_{\max}$$

$$(3) \vec{v} \in \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid \lambda_i = \lambda_{\max}\}$$

Beweis. Wir ordnen die Basis so um, dass

$$\begin{aligned}\Re\lambda_{\max} &= \Re\lambda_1 = \dots = \Re\lambda_k = \Re\lambda_{k+1} = \dots = \Re\lambda_m > \Re\lambda_{m+1} \geq \dots \geq \Re\lambda_n \\ \Im\lambda_{\max} &= \Im\lambda_1 = \dots = \Im\lambda_k > \Im\lambda_{k+1} \geq \dots \geq \Im\lambda_m\end{aligned}$$

Dann gilt für \vec{x} mit Koordinaten x_i und $\sum_i |x_i|^2 = 1$

$$\begin{aligned}Q(\vec{x}) &= \lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_k|x_k|^2 + \dots + \lambda_m|x_m|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2 \\ \Re Q(\vec{x}) &= \Re\lambda_{\max}(|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 + \dots + |x_m|^2) + \dots + \Re\lambda_n|x_n|^2 \\ \Im Q(\vec{x}) &= \Im\lambda_{\max}(|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2) + \dots + \Im\lambda_m|x_m|^2 + \dots + \Im\lambda_n|x_n|^2\end{aligned}$$

Also wird $\Re\lambda_{\max}$ genau dann angenommen, wenn $x_i = 0$ für $i > m$. Unter dieser Voraussetzung wird dann $\Im\lambda_{\max}$ genau dann angenommen, wenn $x_i = 0$ für $i > k$. Also wird das lexikographische Maximum $(\Re\lambda_{\max}, \Im\lambda_{\max})$ genau dann angenommen, wenn alle $x_i = 0$ für $i > k$. Das beweist $1 \Leftrightarrow 3$. $2 \Rightarrow 1$ gilt nach Definition, $3 \Rightarrow 2$ weil die EV einen Untervektorraum bilden. \square

31.6 Normale Formen in Dimension 2

Lemma 31.6 *Ist $\dim V = 2$, so besitzt jede normale Sesquilinearform Φ eine ON-Basis \vec{v}_1, \vec{v}_2 von Eigenvektoren. Ist $A = \Phi^\alpha$ die (Gram)Matrix bzgl. einer ON-Basis, so erhält man die Koordinaten passender \vec{v}_i^α wie folgt*

- Löse die quadratische Gleichung $(x, -1)A \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$
- $\vec{v}_1^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x\bar{x}+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x\bar{x}+1}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}$

Beweis. Nach Konstruktion gilt $\Phi(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = 0$. Andererseits $\text{Spann}_{\mathbb{K}}\{\vec{v}_2\} = \vec{v}_1^\perp$. Also $\Phi(\vec{x}, \vec{v}_1) = 0$ für alle $\vec{x} \perp \vec{v}_1$. Somit ist \vec{v}_1 ein EV. Die Aussage für \vec{v}_2 folgt ebenso. \square

Zusatz 31.7 *Ist $n = 2$ und Φ normal, so besteht jede ON-Basis \vec{v}_1, \vec{v}_2 mit $Q(\vec{v}_1) = \lambda_{\max}$ aus Eigenvektoren.*

Beweis. Nach Lemma 31.6 gibt es einen rechten EV \vec{v}_1 , Nach Voraussetzung ist das ein EV. Wir ergänzen zu ON-Basis $\beta : \vec{v}_1, \vec{v}_2$. Dann ist Φ^β diagonal, also auch \vec{v}_2 ein EV. Ggf, nach Ummummern gilt fuer die EW dass $\lambda_1 = \lambda_{\max}$. Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ ist trivial. Andernfalls nach Lemma 31.5 ist

$$\text{Spann}\{\vec{v}_1\} = E_{\Phi, \lambda_1} = \{v \in V \mid |v| = 1, Q(v) = \lambda_1\}$$

der Eigenraum zu λ_1 und $\text{Spann}\{\vec{v}_2\} = \vec{v}_1^\perp$ der Eigenraum zu λ_2 und die Behauptung ist bewiesen. \square

31.7 Spektralsatz

Theorem 31.8 Für eine Sesquilinearform Φ auf einem endlichdimensionalen unitären Raum V sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) Es gibt ON-Basis β von V so, dass Φ^β diagonal
- (1') Es gibt ON-Basis von Eigenvektoren von Φ
- (2) Φ ist normal bzgl. des gegebenen Skalarprodukts
- (3) Es gibt ON-Basis β von V so, dass Φ^β normal
- (3') Für jede ON-Basis α von V ist Φ^α normal

Korollar 31.9 Ist Φ normal, so ist λ_{\max} ein Eigenwert und \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$ ist genau dann ein Eigenvektor zu diesem EW, wenn $Q(\vec{v}) = \lambda_{\max}$. V ist orthogonale Summe der Eigeräume von Φ

$$V = E_{\Phi, \lambda_1} \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\Phi, \lambda_k}$$

Diese sind ebenso wie die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ eindeutig bestimmt. Ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine ON-Basis von EV , so gilt

$$(*) \quad E_{\Phi, \lambda} = \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid \vec{v}_i \text{ ist EV zum EW } \lambda\}$$

Beweis. (1) \Leftrightarrow (1') \Rightarrow (3) ist klar. (3) \Rightarrow (3') nach Lemma 30.8. (3') \Rightarrow (2) nach Lemma 31.2. 2 \Rightarrow 1: Beweis durch Induktion. Zunächst für den Spezialfall, dass Φ orthosymmetrisch ist. Beachte, dass die Einschränkung $\Phi|U$ von Φ auf einen Untervektorraum U wieder orthosymmetrisch ist. Wähle \vec{v}_1 mit $|\vec{v}_1| = 1$ und $Q(\vec{v}_1) = \lambda_{\max}$. Das gibts nach Lemma 31.4. Sei $U = \vec{v}_1^\perp$. Da die Einschränkung $\Phi|U$ normal ist, hat U nach Induktionsannahme eine ON-Basis $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ von Eigenvektoren, d.h. $\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$ für alle $i, j \geq 2$ mit $i \neq j$. Für jedes $i \geq 2$ ist nach Lemma 31.7 \vec{v}_1, \vec{v}_i eine ON-Basis von EV für die Einschränkung von Φ auf $\text{Spann}\{\vec{v}_1, \vec{v}_i\}$, also $\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_1)$. Also ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ON-Basis von V aus EV von Φ .

Ist Φ nicht orthosymmetrisch, so muss man den Fundamentalsatz der Algebra bemühen - es sei denn, man hat einen besseren Einfall. Sei α ON-Basis von V und $A = \Phi^\alpha$. Das komplexe Polynom $\det(A - xE)$ hat demnach eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine nichttriviale, also auch eine normierte Lösung \mathbf{v} . Wähle \vec{v}_1 mit $\vec{v}_1^\alpha = \mathbf{v}$. Dann ist \vec{v}_1 ein Eigenvektor von Φ . Sei $U = \vec{v}_1^\perp$. Wir haben $\vec{x} = r\vec{v}_1 + \vec{u}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{u} \perp \vec{v}$ falls $\vec{x} \perp \vec{v}$. Ist \vec{v} rechter EW von $\Phi|U$, so gilt $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Also nach obiger Bemerkung $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = r\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 0 = 0$. Somit ist \vec{v} ein rechter Eigenvektor von Φ . Da Φ normal ist, ist \vec{v} auch ein linker Eigenvektor von Φ und damit auch trivialerweise von $\Phi|U$. Ebenso schließt man für linke Eigenvektoren, Also ist $\Phi|U$ normal und es gibt nach Induktionsannahme eine ON-Basis $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ von U aus Eigenvektoren von $\Phi|U$, d.h. $\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 = \Phi(\vec{v}_j, \vec{v}_i)$ für alle $i, j \geq 2$ mit $i \neq j$. Da \vec{v}_1 Eigenvektor von Φ ist und $\vec{v}_j \perp \vec{v}_1$ für $j > 1$, gilt auch $\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_j) = 0 = \Phi(\vec{v}_j, \vec{v}_1)$ für $j > 1$. Daher bilden die $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine ON-Basis von Eigenvektoren.

Beweis des Korollars. Wir zeigen (*) durch Induktion. O.B.d.A. sind die \vec{v}_i entsprechend ihren EW angeordnet, also gerade $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ die EV zu λ_{\max} . Nach Lemma 31.5

folgt $E_{\Phi, \lambda_{\max}} = \text{Spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$. Sei nun $U = E_{\Phi, \lambda_{\max}}^\perp$ und schließe mit Induktion für $\Phi|_U$. \square

Kommentar. Das Problem liegt darin, dass die Einschränkung einer normalen Form auf einen Untervektorraum nicht wieder normal sein muss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A ist Vielfaches einer orthogonalen Matrix, also normal. B gehört zur Einschränkung auf $\text{Spann}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und ist nicht normal.

32 Spezialfälle und Anwendungen des Spektralsatzes

32.1 Reelle Matrizen

Lemma 32.1 *Ist bzgl. einer ON-Basis α die Gram-Matrix $A = \Phi^\alpha$ reell und ist \vec{v} ein rechter EV zum EW λ , so ist \vec{w} mit den konjugierten Koordinaten $\vec{w}^\alpha = \overline{\vec{v}^\alpha}$ ein rechter EV zum EW $\bar{\lambda}$.*

Beweis. Wir identifizieren V mit \mathbb{C}^n und $\mathbf{v} = \vec{v}^\alpha$. Dann $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und, das Konjugieren mit Addition und Multiplikation verträglich ist, $(A - \bar{\lambda}E)\vec{v} = (\bar{A} - \bar{\lambda}E)\vec{v} = \overline{(A - \lambda E)\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. \square .

32.2 Charakteristische Gleichung

Aus dem Produktsatz für Determinanten folgt $\det(S^{-1}AS) = \det A$ für invertierbare S , da $\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \det A \det S = (\det S)^{-1} \det A \det S = \det A$.

Sei A die Matrix der normalen Form Φ bzgl. einer ON-Basis α und A' die bzgl. eines Basis von EV β , also A' Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i auf der Diagonalen. Mit $S = {}_\beta T_\alpha$ folgt $\det(A' - xE) = \det(S^*(A' - xE)S) = \det(S^*A'S - S^*(xE)S) = \det(A - xE)$ und man hat in beiden Fällen das *charakteristische Polynom*, dessen Nullstellen gerade die Eigenwerte sind

$$\chi(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) = \det(A' - xE) = \det(A - xE)$$

Allgemeiner folgt

$$\det(A - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda E) \quad S \text{ invertierbar}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Da \mathbb{C} ein unendlicher Integritätsbereich ist, stimmen sogar die Polynome $\det(A - xE)$ und $\det(S^{-1}AS - xE)$ überein und wir können vom charakteristischen Polynom χ_Φ der Form Φ reden. Wie gerade gezeigt, gilt

$$\chi_\Phi = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Dabei sind die λ_i gerade die Eigenwerte bzgl. der betrachteten ON-Basis von EV und man hat einen zweiten Beweis für deren Eindeutigkeit.

Korollar 32.2 Die Dimension des Eigenraums einer normalen Form Φ zum Eigenwert λ ist gleich der Vielfachheit von $x - \lambda$ als Linearfaktor des charakteristischen Polynoms χ_Φ (algebraische Vielfachheit).

Korollar 32.3 Zu jeder Nullstelle λ von χ_Φ erhält man eine ON-Basis des Eigenraums zum Eigenwert λ indem man eine ON-Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bestimmt (als Teilraum von \mathbb{K}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt betrachtet) und dann die Vektoren mit den entsprechenden Koordinaten nimmt. Macht man das für alle Nullstellen (=Eigenwerte) λ von χ_Φ und packt diese Teilbasen zu einer Folge von Vektoren zusammen, so erhält man eine ON-Basis von EV von Φ .

32.3 Algorithmus für Übungsaufgaben

- ▶ Gegeben Form Φ durch Matrix $A = \Phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis α
- ▶ Überprüfe obs normal ist, d.h. $AA^* = A^*A$
- ▶ Bestimme das charakteristische Polynom $\text{Det}(A - \xi E)$ und seine verschiedenen Nullstellen d.h. EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ in \mathbb{C}
- ▶ Bestimme zu jedem λ_i eine ON-Basis $\vec{v}_{i1}, \dots, \vec{v}_{ik_i}$ des Eigenraums aus dem Gleichungssystem $(A - \lambda_i E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ Diese ON-Basen ergeben zusammengenommen eine ON-Basis $\vec{v}_{11}, \dots, \vec{v}_{mk_m}$ von V aus EV
- ▶ Die Koordinatenspalten dieser Vektoren bzgl. α ergeben die Spalten der Transformationsmatrix S
- ▶ Die Diagonalmatrix S^*AS hat die Diagonaleinträge $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{k_m}$

32.4 Algebraisches Beispiel

Gegeben sei bzgl. einer ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Form

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \quad \text{für } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_Q(x) = (3-x)[(2-x)^2 - 1], \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1$$

Bestimme ON-Basis des Lösungsraums von $(A - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \vec{v}_1^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme ON-Basis des Lösungsraums von $(A - 1E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \vec{v}_3^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

32.5 Hermitesche Formen

Korollar 32.4 • Eine sesquilineare Form ist hermitesch genau dann, wenn die EW reell sind und eine (nicht notwendig reelle) ON-Basis von EV existiert.

- Eine komplexe Matrix ist hermitesch genau dann, wenn sie sich unitär auf reelle Diagonalgestalt transformieren lässt.
- Eine hermitesche Form/Matrix ist positiv bzw. negativ definit ($\Phi(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$) genau dann, wenn die EW alle > 0 bzw. < 0 sind
- Eine hermitesche Form/Matrix ist positiv bzw. negativ semidefinit ($\Phi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ für alle \vec{x}) genau dann, wenn die EW alle ≥ 0 bzw. ≤ 0 sind

Eine ON-Basis β von EV von Φ heisst auch ein *Hauptachsensystem* von Φ . Die zugehörige quadratische Form Q lässt sich dann mithilfe der EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in *Hauptachsenform* angeben

$$Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2 \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{x}^\beta$$

Korollar 32.5 Für eine hermitesche Form Φ werden Maximum und Minimum von $\Phi(\vec{x}, \vec{x})$ unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$ angenommen - und das nur bei EV.

Beweis. Sind $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$ die maximalen EW, so hat man in der Hauptachsenform offenbar ein Maximum, wenn $y_j = 0$ für $j > k$, d.h. wenn man nix an kleinere EW verschenkt.

Korollar 32.6 • Eine Form auf einem euklidischen Raum ist symmetrisch genau dann, wenn die EW reell sind und eine ON-Basis von EV existiert.

- Eine reelle Matrix ist genau dann symmetrisch, wenn sie sich orthogonal auf eine reelle Diagonalmatrix transformieren lässt.

32.6 Singulärwertzerlegung

Lemma 32.7 Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so sind A^*A und AA^* hermitesch und positiv semidefinit und positiv definit, falls A invertierbar.

Beweis. $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ und $\mathbf{x}^*A^*A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^*(A\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|^2 \geq 0$.

Satz 32.8 Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es unitäre Matrizen U und V und reelle Diagonalmatrix Σ mit Diagonaleinträgen $\sigma_i > 0$ so, dass

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Die Singulärwerte σ_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt als Wurzeln der EW von AA^* . Ist A reell, so kann man U und V reell wählen.

In den Matrizen

$$\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

sind die Blöcke O so zu wählen, das man das richtige Format erhält. Man hat dann eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ O \end{pmatrix} \text{ bzw. } (\Delta \quad O)$$

mit einer Diagonalmatrix Δ , die auch Diagonaleinträge 0 enthalten kann. In der Literatur werden auch Singulärwerte 0 erlaubt, was dann der vorangehenden Matrixschreibweise entspricht.

Algorithmus (für Übungsaufgaben)

- ▶ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- ▶ Bestimme nach Spektralsatz unitäres S so, dass (ggf. nach Vertauschung)

$$S^* A^* A S = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad D \in \text{GL}(k, \mathbb{K})$$

- ▶ $V = S$, $\Sigma = \sqrt{D}$ d.h. mit Diagonaleinträgen $\sqrt{d_{ii}}$
- ▶ Für $i \leq k$ dividiere die i -te Spalte von AS durch $\sqrt{d_{ii}}$ um ein ON-System zu erhalten (die restlichen sind $\mathbf{0}$)
- ▶ Ergänze zu ON-Basis, diese ergibt die Spalten von U . Somit

$$U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix})^* AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} S^* A^* A S \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ U^* A V &= \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} S^* A^* A S = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Tat sind die Spalten \mathbf{x}_i mit $i > k$ von AS Null, weil

$$\mathbf{x}_i^* \cdot \mathbf{x}_i = 0$$

Also

$$AS = AS \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$U = U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_l \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} S^*A^*AS + \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix} U^*AS \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} D + O = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

weil die letzten l Zeilen von U^* , d.h. die letzten l Spalten von U auf den ersten k Spalten von AS senkrecht stehen (orthonormale Ergänzung!) und die restlichen Spalten von AS Null sind. \square

Zwecks Deutung verallgemeinern wir den Begriff der Form: eine Abbildung

$$\Phi : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$$

mit den geübten Axiomen. Hier sind V und W beide unitär und wir haben ON-Basen α von V und ε von W . Dann können wir wieder Φ durch eine $m \times n$ -Matrix A beschreiben ($m = \dim V, n = \dim W$)

$$\Phi(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}^\alpha)^* A \vec{w}^\varepsilon$$

Die Singulärwertzerlegung sagt nun, dass wir ON-Basen β von V und γ von W finden können so, dass bzgl. dieser Basen Φ durch eine ‘Diagonalmatrix’ beschrieben wird.

Ist $m \geq n$ (wie in den typischen Anwendungen) so ist es sinnvoll, wie oben zu rechnen. Andernfalls bestimme man die Zerlegung von A^* . Ist der Rang von A klein in Vergleich zu $\min\{m, n\}$, so lohnt es sich, vorher die ‘Radikale abzupsalten’.

Radikaler Algorithmus

- ▶ Sei $k = \text{Rang } A = \text{Rang } A^*$
- ▶ Bestimme ON-Basis $\mathbf{c}_{k+1}, \dots, \mathbf{c}_n$ des Lösungsraums von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ und ergänze zu ON-Basis $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ von \mathbb{C}^n . Sei C die unitäre Matrix mit Spalten \mathbf{c}_j
- ▶ Bestimme ON-Basis $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ des Lösungsraums von $\mathbf{x}^*A = \mathbf{0}^*$ d.h. von $A^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ und ergänze zu ON-Basis $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ von \mathbb{C}^m . Sei B die unitäre Matrix mit Spalten \mathbf{b}_j
- ▶ Berechne die Matrix B^*AC
- ▶ $B^*AC = \begin{pmatrix} \tilde{A} & O \\ O & O \end{pmatrix}$ mit $\tilde{A} \in \text{GL}(k, \mathbb{C})$
- ▶ Bestimme \tilde{U} und \tilde{V} mit $\tilde{U}^*\tilde{A}\tilde{V} = \Sigma$ diagonal
- ▶ $U = B \begin{pmatrix} \tilde{U} & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad V = C \begin{pmatrix} \tilde{V} & O \\ O & E \end{pmatrix}$

Löst man die Darstellung im Satz nach A auf, so hat man

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} V^*$$

und es folgt

$$A^*A = V \begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} V^*, \quad V^*A^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$AA^* = U \begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^*, \quad U^* AA^* U = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Man liest ab, dass

$$\text{Rang} A = \text{Rang} \Sigma = \text{Rang} A^* A = \text{Rang} AA^*$$

gerade das Format der Matrix Σ ist, Man liest weiterhin ab, dass die Singulärwerte $\sigma_i \neq 0$ gerade die Wurzeln aus den EW $\neq 0$ von $A^* A$ und ebenso von AA^* sind - mit denselben Vielfachheiten. Zudem sind für einen Singulärwert $\sigma \neq 0$ die Räume

$$\text{Spann}\{v_i \mid \sigma_i = \sigma\} = E_\sigma(A^* A), \quad \text{Spann}\{u_i \mid \sigma_i = \sigma\} = E_\sigma(AA^*)$$

als Eigenräume von $A^* A$ bzw. AA^* eindeutig bestimmt. Man kann sie den *rechten bzw. linken Singulärraum* zu σ nennen. Die von den restlichen Spalten von V bzw. U aufgespannten Teilräume sind ebenfalls eindeutig bestimmt als Orthogonalräume zur Summe der rechten bzw. linken Singuläräume zu den $\sigma \neq 0$. Oder man sieht sie wie oben als Radikale.

32.7 Quadratwurzel

Satz 32.9 *Zu jeder positiv semidefiniten Matrix A gibt es genau eine positiv semidefinite Matrix B mit $B^2 = A$.*

Beweis. Es gibt unitäres bzw. orthogonales S mit $S^* A S = D$ Diagonalmatrix, wobei die Diagonaleinträge die Eigenwerte λ_i sind, also reell und $\lambda_i \geq 0$. Sei \sqrt{D} die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\sqrt{\lambda_i}$, somit $\sqrt{D}^2 = D$. Dann geht's mit

$$B = S \sqrt{D} S^*$$

Zur Eindeutigkeit. Ist \vec{v} EV von B zum EW μ , so ist \vec{v} EV von A zum EW μ^2 . Also ist der Eigenraum $E_\mu(B)$ von B zu μ in dem Eigenraum $E_{\mu^2}(A)$ von A zu μ^2 enthalten. Wegen $\mu \geq 0$ führen verschiedene μ zu verschiedenen μ^2 , also

$$\sum_{\mu} \dim E_\mu(B) = n = \sum_m u \dim E_{\mu^2}(A), \quad E_\mu(B) \subseteq E_{\mu^2}(A)$$

und somit $E_\mu(B) = E_{\mu^2}(A)$. Daher sind die Eigenräume von B und somit B eindeutig bestimmt. \square

32.8 Quanten

In der Quantenmechanik betrachtet man den komplexen Vektorraum H aller 'messbaren' Funktionen ψ von \mathbb{R}^d (z.B. $d = 3$ und $\psi = \psi(\mathbf{x})$ oder $d = 4$ und $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$) in \mathbb{C} , für die

$$|\psi|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 dV$$

existiert (quadratisch summierbar). Dabei denkt man sich \mathbb{R}^d als den Koordinatenraum und $|\psi|^2 dV$ als die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen, zu dem ψ gehört, sich (zur Zeit t) im Volumen dV befindet - der Übergang zu Wahrscheinlichkeiten wird durch die

Unschärferelation, die Verwendung komplexer Werte durch die Wellennatur motiviert. Will man $|\psi|^2$ als Längenquadrat auffassen, so liegt es nahe durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi} \phi \, dV$$

eine Sesquilinearform auf V zu definieren. Diese ist hermitesch und positiv definit - man spricht dann von H als Hilbertraum. Die Sesquilinearität steht im Einklang mit dem Superpositionsprinzip. Wenn ψ eine Wahrscheinlichkeitsamplitude (Wellenfunktion) sein soll, muss es normiert sein: $|\psi| = 1$.

Wir beschränken uns jetzt auf einen endlichdimensionalen Teilraum von H - mit den entsprechenden Voraussetzungen lässt sich diese Diskussion auf H übertragen. Dann haben wir nach Gram-Schmidt eine ON-Basis ψ_1, \dots, ψ_n . Für einen Zustand (Wellenfunktion) ψ können wir dann die Darstellung

$$\psi = a_1 \psi_1 + \dots + a_n \psi_n$$

über das Skalarprodukt bestimmen

$$a_i = \langle \psi_i | \psi \rangle .$$

Das kanonische Skalarprodukt misst also die "Position" von ψ im Koordinatenraum - d.h. es ist eine physikalische Grösse oder Observable.

In Analogie hierzu gehen wir davon aus, dass eine Observable durch eine positiv definite Hermitesche Form Φ gegeben wird. Nach dem Spektralsatz gibt es zu jedem Φ eine ON-Basis ϕ_1, \dots, ϕ_n und reelle $\lambda_i > 0$ so, dass

$$\Phi(\psi, \psi) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \text{ für } \psi = x_1 \phi_1 + \dots + x_n \phi_n.$$

Die $\lambda_i = \Phi(\phi_i, \phi_i)$ bilden dann das Spektrum für diese Observable - z.B. die Intensitätsverteilung beim Doppelschlitze - und daraus ergeben sich die Werte der Form nach dem Superpositionsprinzip. Will man den ganzen Raum H behandeln, so treten unendliche Summen auf und man hat jeweils Konvergenz zu garantieren. Bei den Hermiteschen Formen nimmt man dann an, dass es reelle Konstanten $0 < c < C$ gibt so, dass $c \leq \Phi(\psi, \psi) \leq C$ für alle ψ mit $|\psi| = 1$. Dass Hermitesche Formen und selbstadjungierte Operatoren im Grunde dasselbe sind, werden wir sehen.

31 Spektraltheorie normaler Formen

Im Folgenden wird dieses Kapitel ergänzt und zum Teil korrigiert, insbesondere der Beweis des Spektralsatzes.

31.5 Lexikographische Ordnung und Extrema

Lemma 31.5 Sei Φ^α bzgl. einer ON-Basis α eine $n \times n$ -Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen λ_i . Dann gilt

$$\max Q = \lambda_{\max} = a + bi \text{ wobei } (a, b) = \max\{(\Re\lambda_i, \Im\lambda_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Sei $\vec{v} \in V$ mit $|\vec{v}| = 1$. Dann sind äquivalent

- (1) $Q(\vec{v}) = \lambda_{\max}$
- (2) \vec{v} ist Eigenvektor von Φ zum EW λ_{\max}
- (3) $\vec{v} \in \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid \lambda_i = \lambda_{\max}\}$

Beweis. Wir ordnen die Basis so um, dass

$$\begin{aligned} \Re\lambda_{\max} &= \Re\lambda_1 = \dots = \Re\lambda_k = \Re\lambda_{k+1} = \dots = \Re\lambda_m > \Re\lambda_{m+1} \geq \dots \geq \Re\lambda_n \\ \Im\lambda_{\max} &= \Im\lambda_1 = \dots = \Im\lambda_k > \Im\lambda_{k+1} \geq \dots \geq \Im\lambda_m \end{aligned}$$

Dann gilt für \vec{x} mit Koordinaten x_i und $\sum_i |x_i|^2 = 1$

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \lambda_1|x_1|^2 + \dots + \lambda_k|x_k|^2 + \dots + \lambda_m|x_m|^2 + \dots + \lambda_n|x_n|^2 \\ \Re Q(\vec{x}) &= \Re\lambda_{\max}(|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 + \dots + |x_m|^2) + \dots + \Re\lambda_n|x_n|^2 \\ \Im Q(\vec{x}) &= \Im\lambda_{\max}(|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2) + \dots + \Im\lambda_m|x_m|^2 + \dots + \Im\lambda_n|x_n|^2 \end{aligned}$$

Also wird $\Re\lambda_{\max}$ genau dann angenommen, wenn $x_i = 0$ für $i > m$. Unter dieser Voraussetzung wird dann $\Im\lambda_{\max}$ genau dann angenommen, wenn $x_i = 0$ für $i > k$. Also wird das lexikographische Maximum $(\Re\lambda_{\max}, \Im\lambda_{\max})$ genau dann angenommen, wenn alle $x_i = 0$ für $i > k$. Das beweist $1 \Leftrightarrow 3$. $2 \Rightarrow 1$ gilt nach Definition, $3 \Rightarrow 2$ weil die EV einen Untervektorraum bilden. \square

31.6 Diagonalisierung orthosymmetrischer Formen

Lemma 31.8 Zu jeder orthosymmetrischen Sesquilinearform gibt es eine ON-Basis von EV.

Beweis durch Induktion. Beachte, dass die Einschränkung $\Phi|_U$ von Φ auf einen Untervektorraum U wieder orthosymmetrisch ist. Wähle \vec{v}_1 mit $|\vec{v}_1| = 1$ und $Q(\vec{v}_1) = \lambda_{\max}$. Das gibts nach Lemma 31.4. Sei $U = \vec{v}_1^\perp$. Da die Einschränkung $\Phi|_U$ normal ist, hat U nach Induktionsannahme eine ON-Basis $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ von Eigenvektoren, d.h. $\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$ für alle $i, j \geq 2$ mit $i \neq j$. Für jedes $i \geq 2$ ist nach Lemma 31.7 \vec{v}_1, \vec{v}_i eine ON-Basis von EV für die Einschränkung von Φ auf $\text{Spann}\{\vec{v}_1, \vec{v}_i\}$, also $\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_1)$. Also ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ON-Basis von V aus EV von Φ . \square

Korollar 31.9 Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es unitäre Matrizen U und V und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit nichtnegativen Einträgen so, dass $A = UDV^*$.

Beweis. Nach der Singulärwertzerlegung gibt es unitäre U, V mit $U^*AV = D$ diagonal, also $A = UDV^*$. Beachte, dass A^*A hermitesch, also insbesondere orthosymmetrisch ist und somit nach dem Lemma eine ON-Basis von EV hat. \square Also wird hier der Fundamentalsatz nicht benötigt.

31.7 Spektralsatz

Theorem 31.10 Für eine Sesquilinearform Φ auf einem endlichdimensionalen unitären Raum V sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) Es gibt ON-Basis β von V so, dass Φ^β diagonal
- (1') Es gibt ON-Basis von Eigenvektoren von Φ
- (2) Φ ist normal bzgl. des gegebenen Skalarprodukts
- (2') Jeder linke EV von Φ ist ein rechter EV von Φ .
- (2'') Jeder rechte EV von Φ ist ein linker EV von Φ .
- (3) Es gibt ON-Basis β von V so, dass Φ^β normal
- (3') Für jede ON-Basis α von V ist Φ^α normal

Korollar 31.11 Ist Φ normal, so ist λ_{\max} ein Eigenwert und \vec{v} mit $|\vec{v}| = 1$ ist genau dann ein Eigenvektor zu diesem EW, wenn $Q(\vec{v}) = \lambda_{\max}$. V ist orthogonale Summe der Eigeräume von Φ

$$V = E_{\Phi, \lambda_1} \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\Phi, \lambda_k}$$

Diese sind ebenso wie die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ eindeutig bestimmt. Ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine ON-Basis von EV, so gilt

$$(*) \quad E_{\Phi, \lambda} = \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid \vec{v}_i \text{ ist EV zum EW } \lambda\}$$

Beweis. (1) \Leftrightarrow (1') \Rightarrow (3) ist klar. (3) \Rightarrow (3') nach Lemma 30.8. (3') \Rightarrow (2) nach Lemma 31.2. 2 \Rightarrow 2' ist trivial. 2'' \Rightarrow 1: Beweis durch Induktion. Hier muss man den Fundamentalsatz der Algebra bemühen - es sei denn, man hat einen besseren Einfall. Sei α ON-Basis von V und $A = \Phi^\alpha$. Das komplexe Polynom $\det(A - xE)$ hat demnach eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine nichttriviale, also auch eine normierte Lösung \mathbf{v} . Wähle \vec{v}_1 mit $\vec{v}_1^\alpha = \mathbf{v}$. Dann ist \vec{v}_1 ein Eigenvektor von Φ . Sei $U = \vec{v}_1^\perp$. Wir haben $\vec{x} = r\vec{v}_1 + \vec{u}$ mit $\vec{u} \in U$ und $\vec{u} \perp \vec{v}_1$ falls $\vec{x} \perp \vec{v}_1$. Ist \vec{v} rechter EW von $\Phi|U$, so gilt $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Also nach obiger Bemerkung $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = r\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 0 = 0$. Somit ist \vec{v} ein rechter Eigenvektor von Φ . Da Φ normal ist, ist \vec{v} auch ein linker Eigenvektor von Φ und damit auch trivialerweise von $\Phi|U$. Ebenso schließt man für linke Eigenvektoren, Also ist $\Phi|U$ normal und es gibt nach Induktionsannahme eine ON-Basis $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ von U aus Eigenvektoren von $\Phi|U$, d.h. $\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 = \Phi(\vec{v}_j, \vec{v}_i)$ für alle $i, j \geq 2$ mit $i \neq j$. Da \vec{v}_1 Eigenvektor von Φ ist und $\vec{v}_j \perp \vec{v}_1$ für $j > 1$, gilt auch $\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_j) = 0 = \Phi(\vec{v}_j, \vec{v}_1)$ für $j > 1$. Daher bilden die

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine ON-Basis von Eigenvektoren. Für den Schluss $2'' \Rightarrow 2$ betrachte man Φ^* . \square

Beweis des Korollars. Wir zeigen (*) durch Induktion. O.B.d.A. sind die \vec{v}_i entsprechend ihren EW angeordnet, also gerade $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ die EV zu λ_{\max} . Nach Lemma 31.5 folgt $E_{\Phi, \lambda_{\max}} = \text{Spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$. Sei nun $U = E_{\Phi, \lambda_{\max}}^\perp$ und schließe mit Induktion für $\Phi|_U$. \square

Kommentar. Das Problem liegt darin, dass die Einschränkung einer normalen Form auf einen Untervektorraum nicht wieder normal sein muss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A ist Vielfaches einer orthogonalen Matrix, also normal. B gehört zur Einschränkung auf $\text{Spann}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und ist nicht normal.

32 Spezialfälle

32.1 Reelle Matrizen

Lemma 32.1 *Ist bzgl. einer ON-Basis α die Gram-Matrix $A = \Phi^\alpha$ reell und ist \vec{v} ein rechter EV zum EW λ , so ist \vec{w} mit den konjugierten Koordinaten $\vec{w}^\alpha = \overline{\vec{v}^\alpha}$ ein rechter EV zum EW $\bar{\lambda}$.*

Beweis. Wir identifizieren V mit \mathbb{C}^n und $\mathbf{v} = \vec{v}^\alpha$. Dann $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und, das Konjugieren mit Addition und Multiplikation verträglich ist, $(A - \bar{\lambda}E)\bar{\mathbf{v}} = (\bar{A} - \bar{\lambda}E)\bar{\mathbf{v}} = \overline{(A - \lambda E)\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. \square

33 Assoziation von Formen und Endomorphismen

33.1 Verwechslung

Bemerkung 33.1 *Ist Φ bzgl. der ON-Basis α durch die Gram-Matrix A gegeben, so sind für jede ON-Basis $\beta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ und Skalare λ_i äquivalent*

- β ist ON-Basis von EV von Φ und $\lambda_i = Q(\vec{v}_i)$
- β ist eine Basis von Eigenvektoren bzgl. der durch A bzgl. α definierten linearen Abbildung $\phi(\vec{x})^\alpha = A\vec{x}^\alpha$ und die λ_i sind Eigenwerte: $\phi(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$

Beweis. ${}_\alpha T_\beta$ ist unitär, also ${}_\alpha T_\beta^* = {}_\alpha T_\beta^{-1}$ und es geht beidesmal um dieselbe Aufgabe für Matrizen. \square

Im Folgenden wollen wir diesen Zusammenhang begrifflich fassen.

Bemerkung 33.2 *Zu jedem euklidischen Raum V mit ON-Basis α und Endomorphismus ϕ gibt es einen unitären Raum \hat{V} mit ON-Basis α und Endomorphismus $\hat{\phi}$ so, dass V \mathbb{R} -Untervektorraum von \hat{V} , $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \hat{V}$, das Skalarprodukt auf V Einschränkung dessen auf \hat{V} und ϕ Einschränkung von $\hat{\phi}$.*

33.2 Assoziation von Formen zu Endomorphismen

Sei ϕ ein Endomorphismus ϕ von V und Φ eine (sesquilineare) Form auf V . Dann sind äquivalent

- ϕ und Φ sind zueinander *assoziiert* (bzgl. des Skalarprodukts $\langle | \rangle$)
- $\forall \vec{x}, \vec{y}. \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | \phi(\vec{y}) \rangle$
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis α von V ist die Matrix von ϕ die Gram-Matrix von Φ , also: $\phi_\alpha = \Phi_\alpha$.

Beweis. $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{y}^\alpha = \langle \vec{x} | \phi(\vec{y}) \rangle$

Satz 33.3 Die Assoziation $\phi \leftrightarrow \Phi$ ergibt eine bijektive Entsprechung zwischen Endomorphismen und Formen.

$$\boxed{\vec{v} \text{ ist EV von } \phi \text{ zum EW } \lambda \iff \vec{v} \text{ ist rechter EV von } \Phi \text{ zum EW } \lambda}$$

Beweis. Für die bijektive Entsprechung benutze ON-Basis. Für die EV eine ON-Basis $\alpha : \vec{v}_1 = \vec{v}, \dots, \vec{v}_n$. Dann geht es beidesmal darum dass die erste Spalte von $\phi_\alpha = \Phi_\alpha$ den ersten Eintrag λ , sonst 0 hat.

33.3 Adjungierte Endomorphismen

Für zwei Endomorphismen ϕ und ψ von V sind äquivalent

- ψ ist zu ϕ *adjungiert*, man schreibt $\psi = \phi^*$
- Die assoziierten Formen Φ und Ψ sind adjungiert, d.h. $\Psi = \Phi^*$
- $\forall \vec{x}, \vec{y}. \langle \vec{x} | \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \psi(\vec{x}) | \vec{y} \rangle$
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis α ist $\psi_\alpha = (\phi_\alpha)^*$

Es folgt natürlich, dass es zu jedem ϕ ein eindeutig bestimmtes ϕ^* gibt. Beweis. $\langle \vec{x} | \phi(\vec{y}) \rangle = \vec{x}^\alpha A \vec{y}^\alpha = (A^* \vec{x}^\alpha)^* \vec{y}^\alpha = \langle \psi(\vec{x}) | \vec{y} \rangle$. \square

33.4 Normale Endomorphismen

Ein Endomorphismus ϕ eines untiären Raums ist *normal*, wenn $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$.

Theorem 33.4 Für einen Endomorphismus ϕ eines untiären Raums sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) ϕ ist normal
- (2) bzgl. einer/jeder ON-Basis α ist die Matrix ϕ_α normal
- (3) Die zu Φ assoziierte Form Φ ist normal
- (4) Ist A Matrix von ϕ bzgl. der ON-Basis α , so gibt es uniäres U so, dass $U^{-1}AU$ diagonal ist,
- (5) ϕ besitzt eine ON-Basis von Eigenvektoren.

$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ ist nach 33.3 klar. $3 \Rightarrow 4$: A ist auch die Matrix von Φ . Nach dem Spektralsatz gibt es unitäres U mit U^*AU diagonal. Und $U^* = U^{-1}$. $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ ist klar. \square

33.5 Invariante Teilräume

Lemma 33.5 Sei ϕ Endomorphismus des unitären Raums V , Dann gilt

$$\text{Kern } \phi = (\text{Bild } \phi^*)^\perp, \quad \text{Bild } \phi = (\text{Kern } \phi^*)^\perp$$

und dies sind ϕ - und ϕ^* -invariante Teilräume. Ferner ist U genau dann ϕ -invariant, wenn U^\perp ϕ^* -invariant ist.

Beweis. Sei $\vec{x} \in U^\perp$, Dann gilt für alle $\vec{u} \in U$, dass $\langle \phi^* \vec{x} | \vec{u} \rangle = \langle \vec{x} | \phi \vec{u} \rangle = 0$, da $\phi \vec{u} \in U$. Also $\phi^* \vec{x} \in U^\perp$. Es genügt also, die erste Gleichheit zu beweisen. Es ist aber $\vec{x} \in \text{Kern } \phi$ genau dann, wenn $\langle \phi \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \phi^* \vec{y} \rangle = 0$ für alle \vec{y} d.h. wenn $\vec{x} \in (\text{Bild } \phi^*)^\perp$. \square

Satz 33.6 Sei ϕ ein normaler Endomorphismus des unitären Raums V , Dann gilt

$$\langle \phi \vec{x} | \phi \vec{y} \rangle = \langle \phi^* \vec{x} | \phi^* \vec{y} \rangle \text{ für alle } \vec{x}, \vec{y}, \quad \text{Kern } \phi = \text{Kern } \phi^*, \quad \text{Bild } \phi = \text{Bild } \phi^*$$

Ferner sind für einen Untervektorraum U von V die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) U ist ϕ -invariant
- (2) U und U^\perp sind ϕ - und ϕ^* -invariant
- (3) Es gibt eine ON-Basis von EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von Φ so, dass (mit $k = \dim U$)

$$U = \text{Spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}, \quad U^\perp = \text{Spann}\{\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$$

Beweis. Es gilt wegen Normalität: $\langle \phi \vec{x} | \phi \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \phi^* \phi \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \phi \phi^* \vec{y} \rangle = \langle \phi^* \vec{x} | \phi^* \vec{y} \rangle$. Mit $\vec{y} = \vec{x}$ folgt $\phi \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \phi^* \vec{x} = \vec{0}$ und damit Gleichheit der Kerne und Bilder nach dem Lemma.

$3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ ist trivial. $1 \Rightarrow 3$: Wähle λ nach dem Fundamentalsatz der Algebra als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $\phi|U$ und \vec{v}_1 als EV von $\phi|U$ zum EW λ . Ergänze zu ON-Basis α von V . Dann ist die Matrix $A = \phi_\alpha$ normal und $a_{i1} = 0$ für $i > 1$. Nach Lemma 30.6 (angewandt auf A^*) folgt $a_{1j} = 0$ für $j > 1$. Also ist $\text{Spann}\{\vec{v}_1\}$ sowohl ϕ - wie ϕ^* -invariant und somit auch $W = \vec{v}_1^\perp$ ϕ -invariant. Induktion angewandt auf $U \cap W$ liefert die Behauptung. \square Damit haben wir auch einen direkten Beweis (mit $U = V$) des Spektralsatzes auf der Grundlage des Fundamentalsatzes.

33.6 Orthogonalprojektion

Satz 33.7 Für einen Endomorphismus π eines euklidischen bzw. unitären Raumes sind äquivalent

- π ist normal mit komplexen EW in $\{0, 1\}$
- π ist Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum U
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis hat π eine Matrix QQ^* wobei Q Matrix mit orthogonalen Spalten.
- π ist selbstadjungiert und idempotent: $\pi^* = \pi = \pi^2$

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: $U = E_1$ und $U^\perp = E_0$. $2 \Rightarrow 3$: Wähle ON-Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ von U und Q mit den Koordinatenspalten der \vec{v}_i . Dann gilt für die Matrix P von π

$$p_{ij} = \langle \vec{e}_i | \pi(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i | \sum_{h=1}^k \langle \vec{v}_h | \vec{e}_j \rangle \vec{v}_h \rangle = \sum_{h=1}^k \langle \vec{e}_i | \vec{v}_h \rangle \cdot \langle \vec{e}_j | \vec{v}_h \rangle^* = \sum_{h=1}^k q_{ih} \cdot \bar{q}_{jh}$$

$3 \Rightarrow 4$: Wegen der Orthonormalität der Spalten von Q ist $Q^*Q = E_k$ also $QQ^*QQ^* = QE_kQ^* = QQ^*$. $4 \Rightarrow 1$: Aus $\pi = \pi^2$ folgt für die EW $0 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ und somit $\lambda \in \{0, 1\}$. \square .

Korollar 33.8 *Genau dann sind die P_i Matrizen von Orthogonalprojektionen auf U_i mit $V = U_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp U_k$ und $U_i \perp U_j$ für $i \neq j$, wenn gilt*

$$P_i^2 = P_i = P_i^*, \quad P_i P_j = 0 \text{ für } i \neq j, \quad P_1 + \dots + P_k = E$$

Beweis. Ist P die Matrix der Orthogonalprojektion auf U , so ist $E - P$ die Matrix der Orthogonalprojektion auf U^\perp und $P(E - P) = 0$. Nun mit Induktion. \square

33.7 Orthogonale Zerlegung

Korollar 33.9 *Ein normaler Endomorphismus ϕ eines unitären Raums ist durch seine Eigenräume eindeutig bestimmt: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen EW, so*

$$\phi = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k \quad \pi_i \text{ Orthogonalprojektion auf } E_{\lambda_i}$$

Zum Beweis überprüfe man die Gleichung auf einer ON-Basis von EV.

Korollar 33.10 *Eine komplexe quadratische Matrix A ist genau dann normal mit EW λ_i und Matrizen P_i der Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume E_{λ_i} wenn*

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k \quad \text{mit } P_i^2 = P_i = P_i^*, \quad P_i P_j = 0 \text{ für } i \neq j, \quad P_1 + \dots + P_k = E$$

34 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

34.1 Isometrie von Formen

Haben wir zwei K -Vektorräume V, W mit Formen Φ bzw. Ψ bzgl. derselben Involution $*$, so können wir fragen, ob sie im Grunde dieselbe sind: ob es eine bijektive lineare Abbildung ϕ von V nach W gibt so, dass

$$\Psi(\phi x, \phi y) = \Phi(x, y) \text{ für alle } x, y \text{ in } V.$$

Das heisst dann eine *Isometrie* von (V, Φ) auf (W, Ψ)

Lemma 34.1 *Sind A und B die Matrizen von Φ bzw. Ψ bzgl. irgendwelcher endlicher Basen α von V bzw. β von W , so sind (V, Φ) und (W, Ψ) genau dann isometrisch, wenn es eine invertierbare Matrix M gibt mit $A = M^* B M$.*

Beweis. Sei M die Matrix der linearen Abbildung ϕ von V nach W bzgl. der Basen α, β , d.h. $[\phi x]_\beta = Mx^\alpha$. Dann ist Bijektivität zur Invertierbarkeit gleichbedeutend. Ausserdem, $\Psi(\phi x, \phi y) = (Mx^\alpha)^* B M y^\alpha = x^{\alpha*} M^* B M y^\alpha$, also ϕ Isometrie genau dann, wenn $M^* B M$ Matrix von Φ , d.h. $= A$.

Bei einem Raum (V, Φ) interessieren wir uns natürlich auch für die Besonderheiten seiner Geometrie und für die *Isometriegruppe*, d.h. die Menge der Isometrien von (V, Φ) auf sich selbst - das sind die der Geometrie dieses Raumes angemessenen Transformationen - mit der Hintereinanderausführung und Inversion. Ist eine Basis α gegeben und hat Φ bzgl. dieser die Matrix A , so ist M bzgl. α Matrix einer Isometrie genau dann, wenn M invertierbar und $A = M^* A M$, insbesondere $\det M(\det M)^* = 1$.

34.2 Isometrien

Satz 34.2 *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für eine Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ sind äquivalent*

- ϕ ist linear und $\langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$
- ϕ ist linear und erhält Längen $\forall \vec{x}. \forall \vec{y}. |\phi(\vec{x})| = |\vec{x}|$
- ϕ erhält das Skalarprodukt: $\forall \vec{x}. \forall \vec{y}. \langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$
- $\phi(\vec{0}) = \vec{0}$ und ϕ erhält Abstände $\forall \vec{x}. \forall \vec{y}. |\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})| = |\vec{x} - \vec{y}|$ - nur im euklidischen Fall

Eine solche Abbildung heisst *Isometrie* von V auf sich oder *orthogonale* bzw. *unitäre* Abbildung. Das sind gerade die Abbildungen, die bzgl. ON-Basen durch orthogonale bzw. unitäre Matrizen beschrieben werden. Es gilt $|\det \phi| = 1$ und $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ .

Beweis. $3 \Rightarrow 1$. $|r\phi(\vec{x}) - \phi(r\vec{x})|^2 = |r|^2|\phi(\vec{x})|^2 - r^* \langle \phi(\vec{x}) | \phi(r\vec{x}) \rangle - r \langle \phi(r\vec{x}) | \phi(\vec{x}) \rangle + |\phi(r\vec{x})|^2 = |r|^2|\vec{x}|^2 - r^* \langle \vec{x} | r\vec{x} \rangle - r \langle r\vec{x} | \vec{x} \rangle + |r\vec{x}|^2 = |r\vec{x} - r\vec{x}|^2 = 0$ also $r\phi(\vec{x}) = \phi(r\vec{x})$. Wir haben stets $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2$. Also $|\phi(\vec{x} + \vec{y}) - [\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})]|^2 = |\phi(\vec{x} + \vec{y})|^2 - 2\langle \phi(\vec{x} + \vec{y}) | \phi(\vec{x}) \rangle - 2\langle \phi(\vec{x} + \vec{y}) | \phi(\vec{y}) \rangle + |\phi(\vec{x})|^2 + 2\langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle + |\phi(\vec{y})|^2 = |\vec{x} + \vec{y}|^2 - 2\langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} \rangle - 2\langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{y} \rangle + |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}|^2 - 2\vec{x}\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle - 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle - 2|\vec{y}|^2 + |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 = 0$, also $\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$.

$1 \Rightarrow 2$: $|\phi(\vec{x})|^2 = \langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2$.

$2 \Rightarrow 3$: Es gilt für den Realteil: $\Re \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2)$ und für den Imaginärteil $\Im \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \Re \langle \vec{x} | -i\vec{y} \rangle$. Somit wegen der Linearität von ϕ : $\Re \langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{2}(|\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})|^2 - |\phi(\vec{x})|^2 - |\phi(\vec{y})|^2) = \frac{1}{2}(|\phi(\vec{x} + \vec{y})|^2 - |\phi(\vec{x})|^2 - |\phi(\vec{y})|^2) = \frac{1}{2}(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2) = \Re \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ für alle \vec{x} und \vec{y} . Es folgt: $\Im \langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = \Re \langle \phi(\vec{x}) | -i\phi(\vec{y}) \rangle = \Re \langle \phi(\vec{x}) | \phi(-i\vec{y}) \rangle = \Re \langle \vec{x} | -i\vec{y} \rangle = \Im \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

$2 \Rightarrow 4$ ist klar. Aus $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}(|\vec{x} - \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2)$ folgt im euklidischen Fall: $\langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = -\frac{1}{2}(|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})|^2 - |\phi(\vec{x})|^2 - |\phi(\vec{y})|^2) = -\frac{1}{2}(|\vec{x} - \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

□

34.3 Orthogonale Abbildungen

Satz 34.3 Sei V endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow V$ sind äquivalent

- ϕ ist eine Isometrie von $V, \langle | \rangle$ auf sich
- Das Bild $\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_n)$ einer/jeder ON-Basis ist ON-Basis
- Bzgl. eines/jedes Paares α, β von ON Basen ist die Matrix ${}^\beta\phi_\alpha$ unitär
- $\phi^* = \phi^{-1}$
- ϕ hat (ggf. in der Komplexifizierung) ON-Basis von EV mit EW vom Betrag 1

Man nennt solches ϕ unitär, auch orthogonal falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Korollar 34.4 Unitäre Abbildungen bzw. Matrizen sind normal, haben Eigenwerte und Determinante vom Betrag 1.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ ist trivial. $2 \Rightarrow 3$. Die Spalten der Matrix ${}^\alpha\phi_\alpha$ von ϕ bzgl. der ON-Basis α sind die Koordinaten der Bilder $\phi(\vec{e}_j)$ also orthonormal, da die $\phi(\vec{e}_j)$ eine ON-Basis bilden. Also ist ${}^\alpha\phi_\alpha$ unitär und damit auch ${}^\beta\phi_\alpha = {}^\beta T_\alpha {}^\alpha\phi_\alpha$.

$3 \Rightarrow 1$. Sei $A = {}^\alpha\phi_\alpha$ unitär. Dann

$$\langle \phi(\vec{x}) | \phi(\vec{y}) \rangle = (A\vec{x}^\alpha)^* A\vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^* A^* A\vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^* E\vec{y}^\alpha = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

$3 \Rightarrow 4$ da $U^* = U^{-1}$ für unitäre Matrizen. $4 \Rightarrow 5$: ϕ ist normal, da $\phi^* \circ \phi = id = \phi \circ \phi^*$. Also kann man Spektralsatz benutzen. Ist v EV von ϕ so auch von ϕ^* (zum EW $\bar{\lambda}$) und

$$|\lambda|^2 \vec{v} = \bar{\lambda} \lambda \vec{v} = \phi^*(\lambda \vec{v}) = \phi^*(\phi(\vec{v})) = \vec{v}. \quad \text{also } |\lambda| = 1$$

$5 \Rightarrow 3$: die Matrix ist unitäre Diagonalmatrix.

Die Normalität folgt aus $\phi^{-1} \circ \phi = id = \phi \circ \phi^{-1}$. Für eine unitäre Matrix A ist $\overline{\det A} = \overline{\det A^t} = \det A^* = \det A^{-1} = 1/\det A$ also $\det A \overline{\det A} = 1$. \square

34.4 Singulärwertzerlegung

Seien V und W unitäre Vektorräume und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Bezüglich gegebener ON. Basen $\alpha : \vec{v}_i$ von V und $\beta : \vec{w}_i$ von W habe ϕ die Matrix

$$A = {}_\beta\phi_\alpha$$

Nach der Singulärwertzerlegung haben wir

$$A = UDT \quad U, T \text{ orthogonal, } D \text{ diagonal}$$

mit Diagonaleinträgen $\sigma_i > 0$ für $i \leq r$ und $= 0$ sonst. Sei

$$Z = \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid i \leq r\}, \quad Z' = \text{Spann}\{\vec{v}_i \mid i \leq r\}$$

Wir haben die unitären Abbildungen

$$\psi : V \rightarrow V \text{ mit } \psi_\alpha = T \text{ und } \chi : W \rightarrow W \text{ mit } \chi_\beta = U$$

die Orthogonalprojektion π von V auf Z , den Isomorphismus

$$\delta : Z \rightarrow Z' \text{ mit } \delta \vec{v}_i = \sigma_i \vec{w}_i$$

(d.h. Skalierung in Richtung der orthonormalen Achsen) und die identische Einbettung ε von Z' in W . Dann gilt

$$\phi = \chi \circ \varepsilon \circ \delta \circ \pi \circ \psi, \quad \text{Bild} \phi = \chi(Z')$$

34.5 Pseudoinverse

Ist eine Singulärwertzerlegung $A = U \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} V^*$ gegeben, so erhält man eine *Pseudoinverse* A^+ von A durch

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} U^*$$

Satz 34.5 • *Zu jedem komplexen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist $\tilde{\mathbf{x}} = A^+\mathbf{b}$ die eindeutig bestimmte bestapproximierende Lösung $\tilde{\mathbf{x}}$ minimaler Länge.*

- A^+ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt
- $AA^+ = UE_kU^*$ ist die Matrix der Orthogonal-Projektion auf den von den Spalten von A aufgespannten Untervektorraum

Dabei ist $\hat{\mathbf{x}}$ eine *bestapproximierende Lösung* von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wenn $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ minimal ist. Beweis. Setze $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$ und multipliziere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit U^* . Da U^* und V unitär sind, erhalten wir das äquivalente Problem, eine Bestapproximation $\tilde{\mathbf{y}}$ minimaler Länge zu finden für

$$\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix} \mathbf{y} = U^*\mathbf{b}$$

Diese wird offensichtlich eindeutig gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} U^*\mathbf{b}$$

Zur Äquivalenz der Probleme: Für unitäre S gilt $|S\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$. Also $|U^*A\mathbf{x} - U^*\mathbf{b}| = |U^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b})| = |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ und $|V\mathbf{y}| = |\mathbf{y}|$. Schliesslich spannen die Spalten von A und die von UE_k denselben Untervektorraum auf. \square

34.6 Normalform unitärer Matrizen

Ist A unitär, so sind die EW vom Betrag 1, d.h. von der Form $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$. Es gibt dann nach dem Spektralsatz eine unitäre Matrix S mit

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}.$$

Für $n = 2$ hat eine Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

mit Winkel ω bzgl. einer ON-Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 die komplexen Eigenvektoren

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die unitäre Normalform

$$\begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$$

In der Tat

$$\begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cos \omega & -\sin \omega \\ i \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} = e^{i\omega} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend hat man für $n = 3$ die unitäre Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$$

34.7 Reellifizierung

Die Normalform für unitäre Matrizen führt zu Normalformen für orthogonale und allgemeiner reelle normale Matrizen. Dazu müssen wir aber den Übergang vom Komplexen ins Reelle beherrschen, vgl. die Situation bei linearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten nun den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen und \mathbb{C} -Vektorräume V , z.B. \mathbb{C}^n . V ist auf natürliche Weise auch ein \mathbb{R} -Vektorraum: wir betrachten halt nur die Skalare $r \in \mathbb{R}$.

Lemma 34.6 *Ist v_1, \dots, v_n Basis des \mathbb{C} -Vektorraums V , so ist $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$ Basis des \mathbb{R} -Vektorraums V .*

Wir betrachten \mathbb{C}^n . Für eine Matrix $A = (a_{ik})$ sei $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ die konjugierte. Die Matrix über \mathbb{C} ist *reell*, wenn alle ihre Komponenten reell sind, d.h. wenn $A = \bar{A}$. Diese Notation überträgt sich auch auf Vektoren.

Lemma 34.7 *Der von \mathbf{v} und $\bar{\mathbf{v}}$ aufgespannte \mathbb{C} -Untervektorraum U von \mathbb{C}^n hat eine Basis aus reellen Vektoren: entweder \mathbf{v} reell oder*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \sqrt{2}\Im(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}) = \sqrt{2}\Re(\mathbf{v}).$$

Dies ist auch eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraums der reellen Vektoren aus U , der ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist. Gilt $\mathbf{v} \perp \bar{\mathbf{v}}$, so auch $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ und $|\mathbf{u}_i| = |\mathbf{v}|$.

Dabei stehen $\Re(\mathbf{v})$ und $\Im(\mathbf{v})$ für Real- und Imaginärteil von \mathbf{v} , d.h. sie liegen in \mathbb{R}^n und $\mathbf{v} = \Re(\mathbf{v}) + i\Im(\mathbf{v})$. Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= \frac{i}{2}(|\mathbf{v}|^2 - |\bar{\mathbf{v}}|^2 - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle) = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle &= \frac{-i^2}{2}(|\mathbf{v}|^2 + |\bar{\mathbf{v}}|^2 - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle) = |\mathbf{v}|^2.\end{aligned}$$

34.8 Eigenwerte reeller Matrizen

Satz 34.8 *Ist \mathbf{v} EV der reellen Matrix A zum EW λ , so ist der konjugierte Vektor $\bar{\mathbf{v}}$ EV von A zum konjugierten EW $\bar{\lambda}$. Die Wirkung von $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ auf dem zu den beiden EV gehörenden Untervektorraum $U = (\mathbb{C}\mathbf{v} + \mathbb{C}\bar{\mathbf{v}}) \cap \mathbb{R}^n$ von \mathbb{R}^n wird, wenn λ die Polardarstellung $\lambda = r(\cos\omega + i\sin\omega)$ hat, bezüglich obiger Basis $\beta : \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ angegeben durch die Matrix*

$$(\phi|U)_\beta = \begin{pmatrix} r\cos\omega & -r\sin\omega \\ r\sin\omega & r\cos\omega \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}A\bar{\mathbf{v}} &= \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} \\ A\mathbf{u}_1 &= A\frac{1}{i\sqrt{2}}(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A\mathbf{v} - A\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\lambda\mathbf{v} - \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}) \\ &= \frac{1}{2i}[\lambda(i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \bar{\lambda}(-i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)] = \frac{1}{2i}[(\lambda + \bar{\lambda})i\mathbf{u}_1 + (\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_2] \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_2 = \Re(\lambda)\mathbf{u}_1 + \Im(\lambda)\mathbf{u}_2 = r\cos\omega\mathbf{u}_1 + r\sin\omega\mathbf{u}_2. \\ A\mathbf{u}_2 &= A\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}[\lambda(i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \bar{\lambda}(-i\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)] \\ &= \frac{i}{2}(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\mathbf{u}_2 = -\Im(\lambda)\mathbf{u}_1 + \Re(\lambda)\mathbf{u}_2.\end{aligned}$$

34.9 Normalform normaler reeller Matrizen

Lemma 34.9 *Ist A reelle normale Matrix und \mathbf{v} EV von A zu nicht reellem EW λ , so gilt $\mathbf{v} \perp \bar{\mathbf{v}}$.*

Beweis. $\bar{\mathbf{v}}$ ist EV zu EW $\bar{\lambda} \neq \lambda$ von A , also nach dem Spektralsatz $\mathbf{v} \perp \bar{\mathbf{v}}$.

Satz 34.10 *Eine reelle Matrix A ist normal genau dann, wenn eine orthogonale Matrix S gibt so, dass*

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} r_1 D_{\omega_1} & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ O & \dots & r_l D_{\omega_l} & O \\ O & \dots & O & D \end{pmatrix}$$

mit $r_k \in \mathbb{R}$, reeller Diagonalmatrix D und $D_{\omega_k} = \begin{pmatrix} \cos\omega_k & -\sin\omega_k \\ \sin\omega_k & \cos\omega_k \end{pmatrix}$.

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EW von A so angeordnet, dass $\lambda_{2i+1} = \bar{\lambda}_{2i} \neq \lambda_{2i}$ für $i = 1, \dots, l$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i > 2l$. Sei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ nach dem Spektralsatz zugehörige ON-Basis von EV . Dann bilden nach 34.8 und 34.9 die $\mathbf{v}_1, \bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \bar{\mathbf{v}}_l, \mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ eine ON-Basis von EV und nach 34.7 bilden $\sqrt{2}\Im\mathbf{v}_1, \sqrt{2}\Re\mathbf{v}_1, \dots, \sqrt{2}\Im\mathbf{v}_l, \sqrt{2}\Re\mathbf{v}_l, \mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ eine ON-Basis. Die Wirkung von A auf $\sqrt{2}\Im\mathbf{v}_k, \sqrt{2}\Re\mathbf{v}_k$ wird durch eine Matrix $r_k D_{\omega_k}$ beschrieben, auf den \mathbf{v}_k mit $k > l$ durch einen Streckfaktor. Umgekehrt sind die Matrizen der angegebenen Gestalt offenbar normal, also auch $A = SA'S^*$.

Korollar 34.11 *Für eine orthogonale Matrix hat man in obiger Normalform $r_k = 1$ und D mit ± 1 auf der Diagonalen*

Man hat also eine orthogonale Zerlegung von \mathbb{R}^n in einen Unterraum, auf dem A trivial wirkt, einen weiteren, auf dem A als Spiegelung am Ursprung wirkt, und Ebenen, in denen A jeweils als Drehung um einen passenden Winkel wirkt.

34.10 Spur

Die Spur einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ über einem beliebigen Körper K ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge

$$\text{Spur } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Es gilt: $\text{Spur}(A + B) = \text{Spur } A + \text{Spur } B, \text{ Spur } rA = r\text{Spur } A$

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA), \text{ Spur}(S^{-1}AS) = \text{Spur } A.$$

Beweis. $\text{Spur}(AB) = \sum_i \sum_h a_{ih} b_{hi} = \sum_h \sum_i b_{hi} a_{ih} = \text{Spur}(BA)$. $\text{Spur}(S^{-1}AS) = \text{Spur}(ASS^{-1}) = \text{Spur } A$. Die letzte Formel erlaubt, für lineare Abbildungen ϕ von V in V zu definieren $\text{Spur } \phi = \text{Spur } \phi_\alpha$

34.11 Orthogonale Abbildungen im Raum

Satz 34.12 *Sei ϕ eine orthogonale Abbildung eines 3-dimensionalen euklidischen Raums und $A = \phi_\alpha$ bzgl. einer Basis α . Dann $\det A = \pm 1$ und es gibt es eine ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_1$ EV zum EW $\det A$, mit*

$$\phi_\beta = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

Jenachdem ob $\det A = 1$ oder -1 handelt es sich um Drehung bzw. Drehspiegelung mit Winkel ω und Achse \vec{w}_1 . Ist α -ON-Basis, so ist A orthogonal, der Cosinus des Drehwinkels ist

$$\cos \omega = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - \det A)$$

und die Drehachse ergibt einen EV von $A - A^t$, Der Drehwinkel ist 0° oder 180° genau dann, wenn $A = A^t$. Andernfalls gilt

$$\vec{w}_1^\alpha = r \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$$

Bei einer Drehspiegelung im Raum wird erst um die Achse gedreht (ggf. um 0°) und dann an der Ursprungsebene senkrecht zur Achse gespiegelt.

Korollar 34.13 *Die Inversen von Drehungen sind Drehungen, von Drehspiegelungen sind Drehspiegelungen. Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen bzw. zweier Drehspiegelungen ist eine Drehung an eulerweiswelcher Achse.*

Beweis. Euler zu Ehren geben wir auch einen direkten Beweis. Das charakteristische Polynom von A bzw. ϕ ist ein reelles Polynom $p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, also $p(\lambda) \rightarrow -\infty$ für $\lambda \rightarrow \infty$ und $p(\lambda) \rightarrow -\infty$ für $\lambda \rightarrow -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz hat man mindestens eine reelle Nullstelle, d.h. EW λ_1 und $\lambda_1 = \pm 1$. Sei $\lambda_1 = -1$ falls -1 EW ist. Sei \vec{w}_1 normierter EV zu λ_1 und ergänze zu ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. Da $\phi(\vec{w}_1) = \pm 1 \cdot \vec{w}_1$, gilt für $i = 2, 3$, dass $\langle \phi \vec{w}_i | \vec{w}_1 \rangle = \pm \langle \phi \vec{w}_i | \phi \vec{w}_1 \rangle = \pm \langle \vec{w}_i | \vec{w}_1 \rangle = 0$. Also hat ϕ bzgl. β die orthogonale Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $B = (b_{ij})$ orthogonale 2×2 -Matrix, $\det A = \lambda_1 \det B$ und die EW von A sind λ_1 und die EW von B . Ist $\det B = 1$, so B Drehmatrix und $\lambda_1 = \det A$. Andernfalls hat B EW $1, -1$ mit zueinander orthogonalen EV. Also gibt es ON-Basis $\vec{w}_1, \vec{w}'_2, \vec{w}'_3$ so, dass ϕ die folgende Matrix hat

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen ergibt sich die gewünschte Form mit $\omega = \pi$.

Für die Aussagen über den Winkel beachte, dass diese invariant sind unter Basisstransformation S . Zunächst: $\frac{1}{2}(\text{Spur } A' - \det A') = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - \det A)$. Mit A' in obiger Normalform liest man die Behauptung aber einfach ab.

$A = A^t$ bedeutet $\phi^2 = id$, also $\omega = k180^\circ$. Da ϕ und ϕ^{-1} dieselbe Achse \vec{w}_1 haben, ist diese EV von $\phi - \phi^{-1}$ zum EW 0 , also \vec{w}_1^α EV von $A - A^t$ zum EW 0 . Es gilt aber

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & -z & -y \\ z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \text{ m } A - A^t \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1, \quad \text{Spur } A = \frac{1}{3}, \quad \cos \omega = \frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

34.12 Polarzerlegung

Satz 34.14 Zu jeder invertierbaren komplexen Matrix A gibt es eindeutig bestimmte positiv definite hermitesche Matrix H und unitäre Matrix S mit

$$A = HS \quad \text{nämlich } H = \sqrt{AA^*}, S = H^{-1}A$$

Ist A reell, so auch H und S .

Beweis. Ist $A = HS$, so $H = AS^*$ und $H^2 = HH^* = AS^*SA^* = AA^*$. Wählt man umgekehrt $H = \sqrt{AA^*}$ und $S = H^{-1}A$ so folgt

$$SS^* = H^{-1}AA^*H^{-1*} = H^{-1}AA^*H^{-1} = H^{-1}H^2 * H^{-1} = E$$

Korollar 34.15 Für kleines reelles $\Delta = (\delta_{ij})$, d.h. $\delta_{ij}\delta_{kl} \approx 0$ gilt

$$E + \Delta \approx (E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t))S \quad S \text{ orthogonal}$$

Beweis. $(E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t))^2 = E + \Delta + \Delta^t + \frac{1}{2}\Delta\Delta^t + \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{4}\Delta^{t2} \approx E + \Delta + \Delta^t \approx E + \Delta + \Delta^t + \Delta\Delta^t = (E + \Delta)(E + \Delta)^t$. \square Hier beschreibt

$$A = E + \Delta = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

eine Deformation ϕ des Materials eines Körpers. Die orthogonale Matrix S beschreibt den Anteil σ der Verrückung, der sich allein aus der Starrheit des Körpers ergibt. Eigentlich interessant ist daher die Matrix $H = E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t)$ des Dilatationstensors Ψ .

$$\langle \vec{x} | \phi \vec{y} \rangle = \Psi(\vec{x}, \sigma \vec{y}), \quad \mathbf{x}^t(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t H(S\mathbf{y})$$

34.13 Reelle Jordansche Normalform

Satz 34.16 Zu jeder reellen quadratischen Matrix A gibt es eine Transformationsmatrix S so, dass $A' = S^{-1}AS$ Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & \ddots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \ddots & & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Dabei entspricht ein solcher Block einem Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda = a + bi$.

Beweis. Man wähle eine Jordanbasis so, dass man zu jeder Jordankette zu einem EW λ auch die konjugierte Jordankette zum EW $\bar{\lambda}$ in der Basis hat. Man sortiere die Basis so um, dass jeweils ein Vektor und sein konjugierter aufeinander folgen und ersetze dann dieses Paar komplexer Vektoren durch ein Paar reeller Vektoren. Dann hat man eine Basis von \mathbb{R}^n bezüglich derer die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ durch eine Matrix der Form A' beschrieben wird.

$$A = \begin{pmatrix} a+bi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+bi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-bi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-bi \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$AS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b-ia & a+bi & -i & 1 \\ 0 & 0 & b-ia & a+bi \\ b+ia & a-ib & i & 1 \\ 0 & 0 & b+ia & a-ib \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = S^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$v_1, v_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rightsquigarrow \Im v_1, \Re v_1, \Im v_2, \Re v_2$$

34.14 Schur'sches Lemma

Lemma 34.17 *In einem endlichdimensionalen unitären Raum besitzt jede sesquilineare Form bzw. Endomorphismus einen Eigenvektor.*

Beweis. Sei $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis. Nach dem Fundamentalsatz gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A - \lambda E) = 0$ und dazu dann einen EV, dessen Koordinaten bzgl. α nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems sind. \square

Satz 34.18 *Zu jeder Sesquilinearform Φ bzw. Endomorphismus ϕ auf einem endlichdimensionalen unitären Raum gibt es eine ON-Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ so, dass*

$$\forall i > j. \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi(\vec{v}_i) \in \mathbb{C}\vec{v}_1 + \dots + \mathbb{C}\vec{v}_i = \text{Spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i\}$$

*Jede komplexe $n \times n$ -Matrix kann durch eine unitäre Matrix S auf obere Dreiecksgestalt $A' = S^*AS$ transformiert werden mit den EW auf der Diagonalen. Ist A reell mit nur reellen EW, so kann S reell gewählt werden.*

Beweis durch Induktion über n : Wähle \vec{v}_1 nach dem Lemma und $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ als ON-Basis des Orthogonalraums \vec{v}_1^\perp von \vec{v}_1 und im Hinblick auf die Einschränkung $\Phi|_{\vec{v}_1^\perp}$.

Algorithmus (für Übungsaufgaben)

- Gegeben Form Φ durch Gram-Matrix $A = \Phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis α

- Bestimme das charakteristische Polynom $\text{Det}(A - \xi E)$ und seine Nullstellen d.h. EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in \mathbb{C} (in ihrer Vielfachheit).
- Berechne nun eine Folge $A_0 = A \mid U_0 = E, \dots, A_n \mid U_n$ von Matrixpaaren wobei U_k unitär und

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & + \\ O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & + & \dots & + \\ 0 & \lambda_2 & & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

- Iterationsschritt: Bestimme EV $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{C}^{n-k}$ von B_k zum EW λ_{k+1} aus dem Gleichungssystem $(B_k - \lambda_{k+1}E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Ergänze \mathbf{v}_{k+1} zu ON-Basis $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ von \mathbb{C}^{n-k}
- Sei T die Matrix mit Spalten $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Setze

$$U_{k+1} = U_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}, \quad A_{k+1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T^* \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}$$

- $A_n = U_n^* A U_n$ ist obere Dreiecksmatrix, U_n unitär.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4i \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A - \xi E) &= (1 - \xi)(3 - \xi)(2i - \xi) - 12 - 4(1 - \xi) - 3(4i - \xi) \\ &= (4i - \xi)(\xi^2 - 4\xi) + 4(\xi - 4) = \\ &= (\xi - 4)[\xi(4i - \xi) + 4] = -(\xi - 4)(\xi - 2i)^2 \end{aligned}$$

$$\text{EW } 4: \quad (A - 4E) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -4 + 4i \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

normieren
und ergänzen
zu ON-Basis

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = S_1^* A S_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & + \\ O & B \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \xi E) = -\xi((4i - \xi) - 4) = \xi^2 - 4i\xi - 4 = (\xi - 2i)^2, \quad \text{EW } 2i$$

$$(B - 2iE)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{normieren} \\ \text{und ergänzen} \\ \text{zu ON-Basis} \end{array} T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^* B T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad S = S_1 S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -i \\ \sqrt{2} & 1 & i \\ 0 & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S^* A S = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} + \sqrt{2}i & \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 0 & 2i & 4 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

35 Pauli-Matrizen *

35.1 Spur Null

Sei H ein 2-dimensionaler unitärer Raum. Für einen Endomorphismus $\phi : H \rightarrow H$ sind äquivalent

- ϕ ist selbstadjungiert und $\text{Spur}\phi = 0$
- bzgl. einer/jeder ON-Basis wird ϕ beschrieben durch eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- ϕ besitzt ON-Basis von EV mit EW $\pm\lambda \in \mathbb{R}$

Für solches ϕ gilt • $\phi^2 = \lambda^2 \text{id}$

35.2 Pauli-Matrizen

Satz 35.1 Sei H ein 2-dimensionaler unitärer Raum. Die selbstadjungierten Endomorphismen von H mit Spur Null bilden einen 3-dimensionalen reellen Vektorraum

$$P(H) = \{\phi : H \rightarrow H \mid \phi^* = \phi, \text{Spur}\phi = 0\}, \quad (\phi + \psi)(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + \psi(\vec{x}), \quad (r\phi)(\vec{x}) = r\phi(\vec{x})$$

Gibt man eine ON-Basis H vor, so erhält man eine Basis von V durch die Operatoren mit den Pauli-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Es ist sofort klar, dass $P(H)$ unter Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren abgeschlossen ist. Die Matrizen A_i entsprechen Elementen von $P(H)$ und man hat die eindeutige Darstellung

$$A = \Re\beta A_1 + \Im\beta A_2 + \alpha A_3$$

35.3 Skalarprodukt

Satz 35.2 $P(H)$ wird zum euklidischen Vektorraum durch das Skalarprodukt

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = \frac{1}{2} \text{Spur}(\phi \circ \psi)$$

und es gilt

$$|\phi| = \sqrt{\det \phi} = \lambda \quad \text{wobei } \lambda \text{ der EW } \geq 0$$

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi \circ \psi + \psi \circ \phi = 0$$

Bzgl. einer ON-Basis von H liefern die Pauli-Matrizen eine ON-Basis von $P(H)$. Jede ON-Basis von $P(H)$ entsteht auf diese Weise.

Beweis. Aus 18.7 folgt, dass man eine bilineare und symmetrische Form hat. Zudem $\langle \phi | \phi \rangle = \frac{1}{2} \text{Spur} \phi^2 = \lambda^2$, also positiv definit. Weiterhin

$$\phi \circ \psi + \psi \circ \phi = (\phi + \psi)^2 - \phi^2 - \psi^2 = \mu \text{id}$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{4} \text{Spur}(\mu \text{id}) = \frac{1}{2} \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$$

Die Pauli-Matrizen haben EW ± 1 , also Länge 1. Schliesslich

$$A_1 A_2 + A_2 A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = O$$

$$A_1 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Der Nachweis, dass man jede ON-Basis mit $A_1, \pm A_2, A_3$ darstellen kann, und dass die mit $+A_2$ alle derselben Orientierung entsprechen, ist ein bisschen aufwendiger.

35.4 Spin

Eine *Richtung* in $P(H)$ ist ein "Strahl"

$$\mathbb{R}_{>0} \phi = \{r\phi \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}, \quad \phi \in P(H)$$

Die Richtungen entsprechen eindeutig den Zerlegungen orthogonalen Zerlegungen

$$H = H_+ \oplus^\perp H_-$$

$$H_+ = E_\lambda, \quad H_- = E_{-\lambda} \quad \lambda \geq 0 \text{ EW von } \phi$$

H_+ heisst auch der Zustand mit Spin-Projektion $+\frac{1}{2}$, in Richtung $\mathbb{R}_{>0} \phi$ und H_- der mit Spin $-\frac{1}{2}$.

35.5 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt auf $P(H)$ bzgl. der durch $+A_2$ gegebenen Orientierung ist

$$\phi \times \psi = \frac{-i}{2} (\phi \circ \psi - \psi \circ \phi)$$

Das ist nämlich linear in jedem Argument und macht auf den Pauli-Matrizen, was es soll.

35.6 Produkt von Operatoren

$P(H)$ ist nicht unter Produkt (=Hintereinanderausführung) abgeschlossen. Schreiben wir jedoch σ_i für den Endomorphismus zu A_i (bzgl. fester ON-Basis von H) so gilt

$$\left(\sum_i x_i \sigma_i \right) \circ \left(\sum_i y_i \sigma_i \right) = \sum_i x_i y_i \text{id} + i \left(\sum_i x_i \sigma_i \right) \times \left(\sum_i y_i \sigma_i \right)$$

in Physiker-Schreibweise

$$(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})(\vec{y} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\text{id} + i(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{\sigma}$$

und koordinatenfrei

$$\phi \circ \psi = \langle \vec{\phi} | \vec{\psi} \rangle \text{id} + i\phi \times \psi$$

Beweis. Wie in Satz 22.2.

$$\phi \circ \psi - i\phi \times \psi = \frac{1}{2}(\phi \circ \psi + \psi \circ \phi) = \frac{1}{2}\mu \text{id} = \langle \vec{\phi} | \vec{\psi} \rangle \text{id}$$

35.7 Quaternionen

Es folgt, dass der \mathbb{R} -Untervektorraum

$$\mathbb{R}\text{id} + i\mathbb{P}(H)$$

des Raumes aller Endomorphismen von H unter Hintereinanderausführung abgeschlossen ist und damit eine \mathbb{R} -Algebra. Also Basis haben wir sofort

$$\mathbf{1} = \text{id}, \quad \mathbf{i} = -i\sigma_1, \quad \mathbf{j} = -i\sigma_2, \quad \mathbf{k} = -i\sigma_3$$

und die Multiplikation sieht so aus

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$$

In diesem Ring kann man auch dividieren (ähnlich wie in \mathbb{C}), man spricht vom Schiefkörper der *Quaternionen*. In der Tat

$$(r\text{id} + i\phi)(r\text{id} - i\phi) = r^2(\text{id} + \phi^2) = s\text{id}$$

also

$$(r\text{id} + \phi)^{-1} = \frac{1}{s}(r\text{id} - i\phi)$$

35.8 Überlagerung

Sei α feste ON-Basis von H und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die zugehörige ON-Basis von $P(H)$. Eine unitäre Matrix U kann man als Matrix einer Basistransformation $U = {}_{\alpha}T_{\beta}$ auffassen. Der ON-Basis β entspricht dann eine ON-Basis $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ von $P(H)$ und es gibt eine eindeutig bestimmte orthogonale Abbildung von $P(H)$ mit $\sigma_i \mapsto \sigma'_i$ - ihre Matrix bzgl. σ_i sei $s(U)$, also orthogonal.

Stellen wir $\phi \in H(P)$ durch komplexe 2×2 -Matrizen dar, so können wir den Übergang

$$\phi \mapsto s(U)(\phi)$$

auch als Basistransformation in H verstehen

$$A \mapsto s(U)(A) = UAU^{-1} \quad A \text{ bzgl. } \alpha$$

Satz 35.3 $S \mapsto s(U)$ ist ein surjektiver Homomorphismus der Gruppe $\text{SU}(2)$ der unitären 2×2 -Matrizen mit $\det = 1$ auf die Gruppe $\text{SO}(3)$ der orthogonalen 3×3 -Matrizen mit $\det = 1$.

Literatur: A.I.Kostrikin und Yu.I.Manin, Linear Algebra and Geometry

36 Relativität *

36.1 Vorbemerkungen

Gegeneinander bewegte Koordinatensysteme werden in der Physik seit Jahrhunderten erfolgreich benutzt - insbesondere auch für die Formulierung des Relativitätsprinzips und damit für die Klärung des Begriffs "Physikalisches Gesetz". Der Übergang von einem System ins andere kann jedoch nicht als Koordinatentransformation in Sinne der Mathematik verstanden werden, jedenfalls nicht als Transformation von Koordinaten räumlicher bzw. raum-zeitlicher Punkte. Vielmehr handelt es sich, wie von Einstein bemerkt, um gegeneinander bewegte Räume bzw. Raumzeiten. Diese Bewegungen lassen sich als Abbildungen zwischen den Raumzeiten beschreiben. Die Verwendung von Koordinaten verdunkelt dabei eher die Zusammenhänge bzw. verführt zur Betrachtung rein formaler Koinzidenzen ohne inhaltliche Bedeutung.

36.2 Längengleichheit

Will man bei einem euklidischen Vektorraum von der Skalierung absehen, so kann man das dadurch erreichen, dass man statt des Skalarproduktes bzw. der Länge die binäre Relation 'gleichlang' betrachtet

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}|$$

Lemma 36.1 *Das Skalarprodukt ist durch die Relation 'gleichlang' bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\langle | \rangle_i$ ($i = 1, 2$) Skalarprodukte auf demselben \mathbb{R} -Vektorraum \mathcal{V} mit zugehöriger Länge $| \cdot |_i$ und Längengleichheitsrelation \sim_i . Gelte $\vec{x} \sim_1 \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \sim_2 \vec{y}$ für alle \vec{x} und \vec{y} . Wähle einen Vektor \vec{e} mit $|\vec{e}|_1 = 1$ und sei $\mu = |\vec{e}|_2$. Jeden Vektor kann man schreiben als $\vec{x} = r\vec{n}$ mit $|\vec{n}|_1 = 1$ und $r \geq 0$. Es folgt

$$|\vec{x}|_1 = r|\vec{n}|_1 = r|\vec{e}|_1 = r\mu|\vec{e}|_2 = r\mu|\vec{n}|_2 = \mu|r\vec{n}|_2 = \mu|\vec{x}|_2$$

weil $\vec{e} \sim_1 \vec{n}$ und damit auch $\vec{e} \sim_2 \vec{n}$. Drückt man die Skalarprodukte über die Längen aus, so erhält man den Skalierungsfaktor μ^2 . \square

Einen reellen Vektorraum mit einer Äquivalenzrelation, die die Längengleichheit eines Skalarproduktes ist, und einen affinen Raum mit einem solchen Vektorraum wollen wir *pro-euklidisch* nennen, wenn zusätzlich noch eine Orientierung gegeben ist z.B. durch eine ausgezeichnete Basis und damit eine Abbildung

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \mapsto \text{sign}(\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)) \in \{1, -1, 0\}$$

die angibt, ob die Vektoren positiv oder negativ orientiert sind bzw. linear abhängig. Eine positiv orientierte Basis heiße *orthogonal*, wenn ihre Vektoren gleichlang sind und bzw. eines/jedes der zugehörigen Skalarprodukte aufeinander senkrecht stehen.

Sind \mathcal{A} mit \sim und \mathcal{A}' mit \sim' zwei pro-euklidische affine Räume, so heiße eine bijektive affine Orientierungserhaltende Abbildung $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ (und auch die zugehörige lineare Abbildung ϕ_0) eine *Ähnlichkeit*, wenn gilt

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \phi_0 \vec{x} \sim' \phi_0 \vec{y}$$

Korollar 36.2 Für eine affine Abbildung $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ sind äquivalent

- ϕ ist eine Ähnlichkeit
- ϕ_0 ist orientierungserhaltend und bzgl. eines/jedes Paares $\langle | \rangle$ und $\langle | \rangle'$ von zu \sim bzw. \sim' gehörigen Skalarprodukten gibt es ein reelles $r > 0$ mit

$$\langle \phi_0 \vec{x} | \phi_0 \vec{y} \rangle' = r \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

- bzgl. eines/jedes Paares orthogonaler Basen wird ϕ_0 durch ein passendes positives Vielfaches einer orthogonalen Matrix S mit $\det S = 1$ beschrieben

Beweis. Sei ϕ eine Ähnlichkeit. Wenn wir $\phi(P)$ mit P und $\phi_0 \vec{x}$ mit \vec{x} identifizieren, fallen die Relationen \sim' und \sim zusammen. \square

36.3 Kegel

Ist Q eine quadratische Form auf einem reellem Vektorraum so gibt es Basen, bzgl. derer Q durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird (‘symmetrischer Gauss-Algorithmus’ oder Hauptachsentransformation, nachdem man V irgendwie euklidisch gemacht hat). Nach dem Trägheitssatz von Sylvester sind dabei die Anzahl p der positiven und q der negativen Diagonaleinträge eindeutig bestimmt. Das Paar (p, q) heisst die *Signatur* von Q .

Lemma 36.3 Eine quadratische Form Q der Signatur $(n, 1)$ auf einem $n+1$ -dimensionalen reellem Vektorraum V ist durch ihren asymptotischen Doppel-Kegel $\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = 0\}$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt, genauer: Ist Q' eine quadratische Form mit $Q'(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = 0$. so gibt es $r \neq 0$ mit $Q' = rQ$.

Zusatz. Es gibt eine Basis bezgl. derer Q beschrieben wird durch $-x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. Die zu Q gehörigen Zeit-Kegel sind dann (für jede solche Basis dieselben bis auf Vertauschen)

$$\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) < 0, x_0 \geq 0\}, \quad \{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) < 0, x_0 \leq 0\}$$

Beweis. Es gibt eine Basis $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n$, bzgl. derer Q durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen λ_i beschrieben wird mit $\lambda_0 < 0$ und $\lambda_i > 0$ für $i \geq 1$. Nach Ersetzung von \vec{e}_1 durch $|\lambda_1|^{-1/2} \vec{e}_1$ wird $Q(\vec{e}_0) = -1$ und $Q(\vec{e}_i) = 1$ für $i \geq 1$. Und es gibt ein Skalarprodukt, bzgl. dessen $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n$ ON-Basis ist. Sei $V_Z = \mathbb{R}\vec{e}_0$ und $V_R = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}\vec{e}_i$. Dann haben wir

$$V = V_Z \oplus V_R, \quad Q(\vec{x}) = |\vec{x}_R|^2 - |\vec{x}_Z|^2$$

Sei nun Q' eine quadratische Form auf V mit $Q'(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = 0$. Im Falle $n = 1$ ist die Kennlinie von Q eine Hyperbel und der asymptotische Kegel ist ein Paar von Ursprungsgeraden symmetrisch zu $\mathbb{R}\vec{e}_0$. Nach der Klassifikation der ebenen Formen ist dann die Kennlinie von Q' ebenfalls Hyperbel und zwar mit denselben Achsen, also $Q'(x_0 \vec{e}_0 + x_1 \vec{e}_1) = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1$ mit $\mu_0 \mu_1 < 1$ und $|\mu_1 / \mu_0| = 1$. Also $\mu_1 = r$, $\mu_0 = -r$ für ein $r \neq 0$ und $Q' = rQ$. Das gilt auch für die zugehörigen Bilinearformen: $\Phi' = r\Phi$ und insbesondere $\Phi'(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = 0$.

Für $n > 1$ und $i \geq 1$ können wir den Fall $n = 1$ auf $U_i = \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_i$ und die Einschränkungen von Φ und Φ' anwenden und erhalten $\Phi'(\vec{z}, \vec{p}) = 0$ für $\vec{z} \in \mathbb{R}\vec{e}_0$ und $\vec{p} \in \mathbb{R}\vec{e}_i$. Es folgt

$$\Phi'(\vec{z}, \vec{p}) = 0, \quad Q'(\vec{p} + \vec{z}) = Q'(\vec{p}) + Q'(\vec{z}) \quad \text{für } \vec{z} \in V_Z, \vec{p} \in V_R$$

$$Q'(\vec{p}) = -Q'(\vec{e}_0) \Leftrightarrow Q'(\vec{p} + \vec{e}_0) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{p} + \vec{e}_0) = 0 \Leftrightarrow |\vec{p}| = 1 \quad \text{für } \vec{p} \in V_R$$

Somit hat $Q'|_{V_R}$ Sphären als Kennhyperflächen und es gibt ein $r \neq 0$ mit $Q'(\vec{p}) = r|\vec{p}| = rQ(\vec{p})$ für $\vec{p} \in V_R$. Nach dem Fall $n = 1$ gilt $Q'(\vec{e}_0) = -Q'(\vec{e}_1) = -rQ(\vec{e}_1) = rQ(\vec{e}_0)$, also $Q' = rQ$.

Ein Zeitkegel (bzgl. der gewählten Basis) ist offensichtlich eine *Zusammenhangskomponente* von $V \setminus \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0\}$, d.h. eine maximale Teilmenge von V so, dass je zwei seiner Punkte durch einen Weg verbunden werden können, der keinen Punkt mit $Q(\vec{x}) = 0$ enthält. Von diesen gibt es 4 Stück und die Zeitkegel sind dadurch charakterisiert, dass sie ein \vec{x} mit $Q(\vec{x}) < 0$ enthalten. Also haben wir eine basis-unabhängige Charakterisierung. \square Die euklidische Struktur auf V war nur ein Trick, um uns auf die Klassifikation der Formen berufen zu können. Sie hat physikalisch keine Bedeutung. Auch mathematisch lässt sie sich vermeiden. Die Aussage des Lemmas gilt nicht für definite Formen (die haben alle "Kegel" 0).

36.4 Galileisch bewegte Räume

Wir betrachten zunächst den 'Galileischen' Fall, dass die Räume dreidimensionale pro-euklidische affine Räume sind und die Zeit in einem separaten eindimensionalen affinen Raum \mathcal{Z} mit orientiertem Vektorraum $\mathcal{V}_Z \cong \mathbb{R}$ lebt.

Seien \mathcal{A}_R und \mathcal{A}'_R pro-euklidische affine Räume mit zugehörigen Vektorräumen \mathcal{V}_R und \mathcal{V}'_R . Eine *Bewegung* ϕ von \mathcal{A}'_R gegen \mathcal{A}_R wird gegeben durch eine Familie $\phi(T) : \mathcal{A}'_R \rightarrow \mathcal{A}_R$ ($T \in \mathcal{Z}$) von Ähnlichkeitsabbildungen. Dabei wird durch $P = \phi(T)(Q)$ festgelegt, welchem Punkt in \mathcal{A} der Punkt Q aus \mathcal{A}' zur Zeit T entspricht - z.B. weil dort zur Zeit T dasselbe physikalische Event stattfindet.

Die Familie der inversen Abbildungen bestimmt dann eine Bewegung von \mathcal{A}_R gegen \mathcal{A}'_R - die *inverse* Bewegung. Ist eine Bewegung von \mathcal{A}'_R gegen \mathcal{A}'_R durch die $\psi(T)$ gegeben, so bestimmen die $\phi(T) \circ \psi(T)$ eine Bewegung von \mathcal{A}''_R gegenüber \mathcal{A}_R , die *Hintereinanderausführung* $\phi \circ \psi$.

Die Bewegung ϕ von \mathcal{A}'_R gegen \mathcal{A}_R ist *gleichmässig*, wenn es eine Basis \vec{e} von \mathcal{V}_Z , Zeitpunkt $T_0 \in \mathcal{Z}$ und Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}_R$ gibt mit

$$(*) \quad \phi(t\vec{e} + T_0)(Q) = t\vec{v} + \phi(T_0)(Q) \quad \text{für alle } Q \in \mathcal{A}'_R, t \in \mathbb{R}$$

Für gleichmässiges ϕ gilt

- $\phi(T)_0 = \phi(T')_0$ für alle $T, T' \in \mathcal{Z}$
- Zu jeder Basis \vec{e} von \mathcal{V}_Z und Zeitpunkt T_0 gibt einen Vektor $\vec{v} \in V$ mit (*).
- Ist die 'Zeiteinheit' \vec{e} festgelegt, so ist der Vektor \vec{v} durch ϕ eindeutig bestimmt

$$\vec{v}(\phi) = \overrightarrow{\phi(T)(Q) \phi(\vec{e} + T)(Q)} \quad \text{beliebige } T \in \mathcal{Z}, Q \in \mathcal{A}'_R$$

- Hintereinanderausführungen und Inverse gleichmässiger Bewegungen sind gleichmässig

$$\vec{v}(\phi \circ \psi) = \vec{v}(\phi) + \phi_0(\vec{v}(\psi)), \quad \vec{v}(\phi^{-1}) = \phi_0^{-1}(-\vec{v}(\phi))$$

Beweis. Zu $T \in \mathcal{Z}$ gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $T = t\vec{e} + T_0$ und somit $\phi(T)_0(\overrightarrow{QR}) =$
 $= \overrightarrow{\phi(T)(Q) \phi(T)(R)} = \overrightarrow{t\vec{v} + \phi(T_0)(Q) \ t\vec{v} + \phi(T_0)(R)} = \overrightarrow{\phi(T_0)(Q) \ \phi(T_0)(R)} = \phi(T_0)_0(\overrightarrow{QR})$

Ersetzt man T_0 durch $T = s\vec{e} + T_0$, so bleibt \vec{v} unverändert. Ersetzt man \vec{e} durch $s\vec{e}$, so hat man \vec{v} durch $s\vec{v}$ zu ersetzen. Schliesslich für $Q \in \mathcal{A}'_R$

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(t\vec{e} + T_0)(Q) &= \phi(t\vec{e} + T_0)(\psi(t\vec{e} + T_0)(Q)) = \phi(t\vec{e} + T_0)(t\vec{v}(\psi) + \psi(T_0)(Q)) \\ &= t\vec{v}(\phi) + \phi(T_0)(t\vec{v}(\psi) + \psi(T_0)(Q)) = t\vec{v}(\phi) + \phi_0(t\vec{v}(\psi)) + \phi(T_0)(\psi(T_0)(Q)) \\ &= t(\vec{v}(\phi) + \phi_0(\vec{v}(\psi))) + (\phi \circ \psi)(T_0)(Q) \quad \square \end{aligned}$$

Als Veranschaulichung denke man sich \mathcal{A}_R durch den am Bahndamm stehenden Einstein gegeben, \mathcal{A}'_R als den vorbeifahrenden Zug und \mathcal{A}''_R durch eine ans Fenster eilende Frau - Raben haben sich für Einstein weniger interessiert.

36.5 Galileische Raumzeit

Zu einem dreidimensionalen pro-euklidischen affinen Raum \mathcal{A}_R mit Vektorraum \mathcal{V}_R erhält man die zugehörige *Galilei-Raumzeit* \mathcal{A} indem man jeweils einen Zeit- und Raumpunkt zu einem Paar zusammenfasst - und entsprechend für Vektoren. D.h. man hat als Punktmenge bzw. als Vektorenmenge

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}_R \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_Z \times \mathcal{V}_R$$

wobei man mit den Vektoren komponentenweise rechnet und auch das Antragen eines Zeit-Raum-Vektors (\vec{t}, \vec{x}) an einen Zeit-Raum-Punkt (T, P) komponentenweise ausgeführt wird

$$(\vec{t}, \vec{x}) + (T, P) = (\vec{t} + T, \vec{x} + P)$$

Insbesondere gilt auch

$$\overrightarrow{(T_1, P_1) (T_2, P_2)} = \overrightarrow{(T_1 T_2, P_1 P_2)}$$

Unter einer *Raumzeit* \mathcal{A} verstehen wir einen affinen Raum, dessen zugehöriger Vektorraum ein vierdimensionaler reeller Vektorraum \mathcal{V} ist mit zusätzlicher Struktur:

- dreidimensionalem pro-euklidischen Untervektorraum \mathcal{V}_R
- eindimensionalem (und damit auf eindeutige Weise pro-euklidischen) orientiertem Untervektorraum \mathcal{V}_Z
- so dass jeder Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ eine eindeutige Darstellung hat

$$\vec{x} = \vec{x}_R + \vec{x}_Z \quad \text{mit } \vec{x}_R \in \mathcal{V}_R, \vec{x}_Z \in \mathcal{V}_Z$$

- einer Orientierung, die durch eine Basis gegeben ist, die einen Vektor von \mathcal{V}_Z durch eine positiv orientierte Basis von \mathcal{V}_R ergänzt.

Die ausgezeichneten Untervektorräume einer Galilei-Raumzeit sind

$$\mathcal{V}_Z \times \{\vec{0}\} \cong \mathcal{V}_Z, \quad \{\vec{0}\} \times \mathcal{V}_R \cong \mathcal{V}_R$$

Durch Festlegung von Längen bzw. Zeiteinheit kann man in der Raumzeit Längen- bzw. Zeitmessung betreiben. Sind positiv orientierte Zeiteinheit \vec{e} und Zeitursprung T_0 festgelegt, so heisst ein Koordinatensystem

$$(T_0, O); (\vec{e}, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{e}_1), (\vec{0}, \vec{e}_2), (\vec{0}, \vec{e}_3)$$

Galileisch, falls $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthogonale Basis des pro-euklidischen Vektorraums \mathcal{V}_R ist.

36.6 Galilei-Abbildungen

Verfährt man mit \mathcal{A}'_R ebenso, so kann man die Familie $\phi(T) : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ ($T \in \mathcal{Z}$) von Abbildungen auch als Abbildung verstehen

$$\phi : \mathcal{A}' = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}'_R \rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}_R \quad \text{mit} \quad \phi(T, Q) = (T, \phi(T)(Q))$$

Ist die Bewegung gleichmässig, so nennen wir ϕ eine *Galilei-Abbildung*

Lemma 36.4 *Sei $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ eine Abbildung zwischen Galileischen Raumzeiten. Dann sind äquivalent*

- ϕ ist Galileisch
- $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ ist affin und es gilt
 - $\phi((T, Q) = (T, P(T)))$ mit passenden $P(T)$ für alle (T, Q)
 - Für ein/alle $T_0 \in \mathcal{Z}$ ist die Abbildung $Q \mapsto P$ mit $(T_0, P) = \phi(T_0, Q)$ eine Ähnlichkeitsabbildung von \mathcal{A}'_R auf \mathcal{A}_R
- ϕ ist affin und bzgl. eines/jedes Paares Galileischer Koordinatensysteme β und α von \mathcal{A}' bzw. \mathcal{A} mit Ursprüngen (T_0, O') und $(T_0, O) = \phi(T_0, O')$ und Zeitbasis \vec{e} wird ϕ beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi(T, Q)^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (T, Q)^\beta$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Drehstreckungsmatrix}$$

Dabei sind a_{10}, a_{20}, a_{30} gerade die Koordinaten des Vektors $\vec{v}(\phi)$ bzgl. des \mathcal{V}_R -Anteils des Koordinatensystems α .

Korollar 36.5 *Bei einer Galilei-Abbildung $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ ist der "Geschwindigkeitsvektor" $\vec{v}(\phi)$ für die Bewegung von \mathcal{A}' relativ zu \mathcal{A} bzgl. der Zeitbasis \vec{e} bestimmt durch*

$$\phi_0(\vec{e}, \vec{0}) = (\vec{e}, \vec{v})$$

Man kann die Beziehung zwischen den Koordinaten von Bild (ungestrichen) und Urbild (gestrichen) auch so schreiben

$$t = t', \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix}$$

wie das bei der Galilei-“Transformation” üblich ist - wer will, kann dann auch die gestrichenen Koordinaten durch die ungestrichenen ausdrücken. Man darf aber nicht vergessen, dass es sich um die Beschreibung einer (affinen) Abbildung handelt, nicht um Transformation von Koordinaten. Die Bahn des Bildes des Ursprungs O' von \mathcal{A}'_R ist eine Gerade in \mathcal{A}_R

$$\{\phi(T)(O') \mid T \in \mathcal{Z}\} = \mathbb{R}\vec{v}(\phi) + O$$

Statt der Bahn kann man ihren Graphen in der Raumzeit \mathcal{A} betrachten, die Gerade

$$\{(T, \phi(T)(O')) \mid T \in \mathcal{Z}\} = \mathbb{R}(\vec{e}, \vec{v}(\phi)) + (T_0, O)$$

Beweis. Sei ϕ Galileisch, $T_i = t_i\vec{e} + T_0$ und $\overrightarrow{\lambda(T_1, Q_1)(T_2, Q_2)} = \overrightarrow{(T_3, Q_3)(T_4, Q_4)}$. Dann

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\phi(T_3, Q_3)\phi(T_4, Q_4)} &= \overrightarrow{(T_3, \phi(T_3)(Q_3))(T_4, \phi(T_4)(Q_4))} \\ &= \overrightarrow{(T_3T_4, t_3\vec{v} + \phi(T_0)(Q_3) \quad t_4\vec{v} + \phi(T_0)(Q_4))} = \overrightarrow{(T_3T_4, (t_4 - t_3)\vec{v} + \phi(T_0)(Q_3) - \phi(T_0)(Q_4))} \\ &= \overrightarrow{(\lambda T_1T_2, \lambda(t_2 - t_1)\vec{v} + \lambda\phi(T_0)(Q_1) - \lambda\phi(T_0)(Q_2))} = \overrightarrow{(\lambda T_1T_2, (t_2 - t_1)\vec{v} + \phi(T_0)(Q_1) - \phi(T_0)(Q_2))} \\ &= \overrightarrow{\lambda(T_1, \phi(T_1)(Q_1))(T_2, \phi(T_2)(Q_2))} = \overrightarrow{\lambda\phi(T_1, Q_1)\phi(T_2, Q_2)} \end{aligned}$$

Die weiteren Eigenschaften sind offensichtlich. Setzt man diese voraus, so ergibt sich die Matrixbeschreibung sofort. Und aus dieser folgt, dass ϕ Galileisch ist. Die Aussage über $\vec{v}(\phi)$ folgt, wenn man $T = T_0$ und $Q = O'$ einsetzt. \square

36.7 Kegel der Erreichbarkeit

Welche weitere Struktur auf einer einzelnen Raum-Zeit ergibt sich, wenn wir physikalische Fragestellungen einbeziehen. Z.B. die, welche Raum-Zeit-Punkte in \mathcal{A} von O aus erreichbar sind, wenn man sich maximal mit einer Geschwindigkeit c bewegen kann (als Licht oder auf dem Fahrrad) - bezogen auf das gewählte Längenmass $|_R$ und Zeitmass $|_Z$. Diese Raum-Zeit-Punkte gehören gerade zu folgendem Kegel

$$\{\vec{x} + O \mid \vec{x} \in \mathcal{V} \mid |\vec{x}_R|_R \leq c|\vec{x}_Z|_Z, \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$$

Der Kegel ist schon durch seinen Mantel

$$K_c^+ + O \quad \text{wobei } K_c^+ = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \mid |\vec{x}_R|_R = c|\vec{x}_Z|_Z, \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$$

eindeutig bestimmt: die positive Zeitachse $\{\vec{z} \in \mathcal{V}_Z \mid \vec{z} \text{ positiv}\} + O$ liegt im Inneren des Kegels.

Lemma 36.6 *Die pro-euklidische Struktur des Unterraums \mathcal{V}_R von \mathcal{V} ist schon eindeutig bestimmt, wenn man die Orientierung und einen einzigen ‘Kegel’ K_c^+ kennt.*

Die Geschwindigkeit c und Längen- und Zeiteinheit braucht man dabei nicht zu kennen. Beweis: Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_R$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} \sim \vec{y} &\Leftrightarrow \text{es gibt positives } \vec{t} \in \mathcal{V}_Z : \vec{x} + \vec{t} + O \in K_c^+ \text{ und } \vec{y} + \vec{t} + O \in K_c^+ \\ &\Leftrightarrow \text{für alle positiven } \vec{t} \in \mathcal{V}_Z : \vec{x} + \vec{t} + O \in K_c^+ \Leftrightarrow \vec{y} + \vec{t} + O \in K_c^+ \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 36.7 Sei das Verhältnis zwischen Längen- und Zeiteinheit gegeben. Zu jeder Geschwindigkeit c gibt es eine quadratische Form Q auf \mathcal{V} mit

$$K_c^+ = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0, \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$$

Diese ist bis auf einen Faktor $r > 0$ eindeutig bestimmt: mit gegebenem Längen- und Zeitmass gilt

$$Q(\vec{x}) = r(|\vec{x}_R|_R^2 - c^2|\vec{x}_Z|_Z^2)$$

Umgekehrt ist c durch K_c eindeutig bestimmt. Die Einschränkung von Q auf \mathcal{V}_R ist positiv definit und passt zu der pro-euklidischen Struktur:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = Q(\vec{y}) \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_R$$

Die Einschränkung von Q auf \mathcal{V}_Z ist negativ definit. Für die zugehörige Bilinearform Φ gilt $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\vec{x} \in \mathcal{V}_Z$ und $\vec{y} \in \mathcal{V}_R$.

Dabei ist für zwei Längen bzw. Zeitmessungen $|_{Ri}$ und $|_{Zi}$ dasselbe Verhältnis zwischen Längen- und Zeiteinheit gegeben, wenn für ein/jedes Paar von (Nicht-Null) Vektoren $\vec{x}_R \in \mathcal{V}_R$ und $\vec{x}_z \in \mathcal{V}_Z$ gilt

$$\frac{|\vec{x}_R|_{R1}}{|\vec{x}_Z|_{Z1}} = \frac{|\vec{x}_R|_{R2}}{|\vec{x}_Z|_{Z2}}$$

Eine Raumzeit zusammen mit vorgegebenem $c > 0$ (der *Lichtgeschwindigkeit*) und Verhältnis von Längen- und Zeiteinheit heisse eine *Einstein-Raumzeit* und die zugehörigen Q bzw. Φ *Minkowski-(Bilinear)-Formen*. Beweis. Definiere die *Standard-Minkowski-Form* durch

$$Q(\vec{x}) = |\vec{x}_R|_R^2 - c^2|\vec{x}_Z|_Z^2$$

und rechne nach, dass Q quadratische Form mit allen gewünschten Eigenschaften ist. Sei nun Q' eine weitere quadratische Form, die denselben positiven Kegel definiert - und damit auch denselben asymptotischen (Doppel)Kegel. Nach Lemma 36.3 gibt es $r \neq 0$ mit $Q' = rQ$. Dass die positiven Kegel dieselben sind, besagt $r > 0$. \square

Korollar 36.8 Für einen Raum-Zeit-Punkt $P = \vec{x} + O$ gilt

$$P \text{ liegt im } \left\{ \begin{array}{l} \text{Inneren} \\ \text{Mantel} \\ \text{Äusseren} \end{array} \right\} \text{ des Kegels } K_c + O \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} Q(\vec{x}) < 0 & \text{(zeitartig)} \\ Q(\vec{x}) = 0 & \text{(lichtartig)} \\ Q(\vec{x}) > 0 & \text{(raumartig)} \end{array} \right.$$

Die Geraden mit zeit- bzw. lichtartigem Richtungsvektor sind dann die Graphen physikalisch möglicher gleichmässiger Bewegungen. Betrachtet man auch die Punkte, von denen aus O erreichbar ist, so kommt man zum Doppelkegel

$$K_c = \{\vec{x} \mid |\vec{x}_R|_R = c|\vec{x}_Z|_Z\}$$

Ist dieser durch die quadratische Form Q gegeben, $K_c = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0\}$, so wird der zugehörige positive Kegel genau dann durch Q definiert ($K_c^+ = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0, \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$), wenn es einen zeitartigen Vektor \vec{y} gibt mit $Q(\vec{y}) < 0$.

36.8 Einstein-Basen

Sei $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Basis der Einstein-Raumzeit \mathcal{A} wobei \vec{e}_0 positiv orientierte Basis von \mathcal{V}_Z und $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthogonale Basis von \mathcal{V}_R ist. Insbesondere ist sie positiv orientiert und es gilt bzgl. jeder Minkowski-Bilinearform

$$Q(\vec{e}_0) < 0, \quad Q(\vec{e}_1) = Q(\vec{e}_2) = Q(\vec{e}_3) > 0, \quad \Phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

Wenn man \vec{e}_0 durch ein passendes Vielfaches ersetzt, erreicht man

$$|\vec{e}_0|_Z = |\vec{e}_i|_R =: s > 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

für ein/alle im richtigen Verhältnis stehenden Paare von Längen- und Zeit-Messung. Wir wollen dann von einer *Einstein-Basis* sprechen. Positive Vielfache von Einstein-Basen sind wieder welche und für die Lichtgeschwindigkeit c gilt

$$|\vec{x}_R|^2 - c^2|\vec{x}_Z|^2 = s^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2x_0^2) \quad \text{für } \vec{x} = \sum_{i=0}^3 x_i \vec{e}_i$$

d.h. bzgl. einer Einstein-Basis sind die Minkowski-Formen der Einstein-Raumzeit gerade die, die durch eine Matrix folgender Art gegeben sind

$$rs^2 \begin{pmatrix} -c^2 & O \\ O & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r > 0$$

Offensichtlich ist eine Matrix genau dann Matrix einer Transformation zwischen Einstein-Basen, wenn sie von folgender Gestalt ist

$$\begin{pmatrix} a & O \\ O & aS \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0, \det S = 1, S \text{ orthogonal}$$

36.9 Minkowski-Raum

Mathematische Abstraktion führt zum Begriff des *Minkowski-Raums*: Ein vierdimensionaler orientierter reeller Vektorraum V (und zugehörigem affinen Raum \mathcal{A}) mit symmetrischer Bilinearform Φ (und zugehörigem Q) der Signatur $(3, 1)$ einer "Lichtgeschwindigkeit" $c > 0$ und einem der beiden Zeitkegel von Q , dem "Zukunftskegel" Z^+ .

Eine *Einstein-Basis* $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_3$ des Minkowski-Raums ist dann eine positive orientierte Basis $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_3$ mit

$$\Phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (\text{Q-orthogonal})$$

$$Q(\vec{e}_1) = Q(\vec{e}_2) = Q(\vec{e}_3) > 0, \quad Q(\vec{e}_0) = \frac{-1}{c^2} Q(\vec{e}_1) \in Z^+$$

- d.h. \vec{e}_0 soll in positiver Zeitrichtung sein. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester, wird jede Q-orthogonale Basis zur Einstein-Basis nach passender Umnummerierung und Streckung. Jeder Einstein-Basis kann man eine Einstein-Raum-Zeit mit Lichtgeschwindigkeit c zuordnen

$$\mathcal{V}_Z = \mathbb{R}\vec{e}_0, \quad \mathcal{V}_R = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_3$$

$$|\vec{y}|_R = \sqrt{Q(\vec{y})} \text{ für } \vec{y} \in \mathcal{V}_R, \quad |\vec{z}|_Z = \sqrt{-Q(\vec{z})} \text{ für } \vec{z} \in \mathcal{V}_Z$$

und den durch die Basis gegebenen Orientierungen. Insbesondere hat man

$$Q(\vec{x}) = r(|\vec{x}_R| - c^2|\vec{x}_Z|), \quad \vec{x} = \vec{x}_R + \vec{x}_Z, \vec{x}_R \in \mathcal{V}_R, \vec{x}_Z \in \mathcal{V}_Z$$

Korollar 36.9 *Zu jeder Einstein-Raumzeit erhält man einen Minkowski-Raum, wenn man Q nach Lemma 36.7 wählt. Mit einer gegebenen Einstein-Basis kann man aus diesem Minkowski-Raum die Einstein-Raumzeit zurückgewinnen.*

Das rechtfertigt die Definition

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) < 0 &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ zeitartig} \\ Q(\vec{x}) = 0 &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ lichtartig} \\ Q(\vec{x}) > 0 &\Leftrightarrow \vec{x} \text{ raumartig} \end{aligned}$$

$$K^+ = \{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = 0 \text{ und es gibt raumartiges } \vec{p} \text{ und } \vec{z} \in Z^+ \text{ mit } \vec{x} = \vec{z} + \vec{p}\}$$

Korollar 36.10 *Ein Minkowski-Raum ist durch den unterliegenden Vektorraum und den "Lichtkegel" K^+ eindeutig bestimmt - dieser ist der Rand von Z^+ - bis auf Skalierungsfaktor.*

Lemma 36.11 *In einem Minkowski-Raum seien \vec{a}_2, \vec{a}_3 unabhängige raumartige Vektoren. Dann gibt es eine Einstein-Basis $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_3$ mit $\mathbb{R}\vec{a}_2 + \mathbb{R}\vec{a}_3 = \mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_3$. Ebenso kann jeder Vektor $\vec{e}_0 \in Z^+$ zur Einstein-Basis ergänzt werden.*

Beweis. Sei $\vec{e}_0^0, \dots, \vec{e}_3^0$ eine Einstein-Basis. Es gibt raumartiges $\vec{a}_1 \in \{\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0\}$ so, dass $U = \mathbb{R}\vec{a}_1 + \mathbb{R}\vec{a}_2 + \mathbb{R}\vec{a}_3$ 3-dimensional ist. Nun ist $\Phi|_U$ ein Skalarprodukt, also gibt es nach Gram-Schmidt eine bzgl. Φ orthonormale Basis $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$ von U wie gewünscht. \vec{e}_0 findet man nach demselben Rezept

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_0^0 = \sum_{i=1}^3 \Phi(\vec{e}_0^0, \vec{e}_i) \vec{e}_i$$

Um die positive Orientierung zu erhalten, muss man ggF. \vec{e}_2 und \vec{e}_3 vertauschen. \square

36.10 Lorentz-Abbildungen

Bei Galileisch gegeneinander bewegten Räumen bzw. Raumzeiten ist zu einer in \mathcal{A}' beobachteten Geschwindigkeit einer Bewegung beim Wechsel der Beschreibung zu \mathcal{A} diese Geschwindigkeit in die Einheiten von \mathcal{A} umzurechnen und die in \mathcal{A} ausgedrückte Geschwindigkeit der Relativbewegung von \mathcal{A}' bzgl. \mathcal{A} zu addieren. Bei gleicher Bewegungsrichtung addieren sich also die Beträge der Geschwindigkeiten. Geht man davon aus, dass es in \mathcal{A} und \mathcal{A}' jeweils eine maximale "physikalisch beobachtbare" Geschwindigkeit gibt (die Lichtgeschwindigkeit), und dass diese bei der Umrechnung ineinander überzugehen haben, so ergibt sich ein Widerspruch, wenn die beachtete Geschwindigkeit diese Maximalgeschwindigkeit ist und die Relativgeschwindigkeit gleichgerichtet und nicht Null.

Somit ist das Konzept zur Beschreibung von gleichmässiger Relativbewegung abzuwandeln. Wir bleiben bei der Beschreibung als affine Abbildung der einen Raumzeit in die

andere. Nur verlangen wir jetzt, dass die Licht-Ausbreitungs-Kegel dabei ineinander übergehen sollen. Das ist theoretisch durch das Relativitätsprinzip im Verein mit dem Prinzip der ‘Konstanz der Lichtgeschwindigkeit’ zu begründen, empirisch z.B. durch das Michelson-Morley Experiment. Die kegelförmige Ausbreitung bedeutet natürlich auch, dass die Raumzeiten ‘inertial’ sein sollen - was damit gemeint ist, kann nur ein Physiker wissen.

- \mathcal{A} und \mathcal{A}' sind affine Minkowski-Räume mit ‘Licht-Geschwindigkeiten’ c und c' , ‘Licht-Kegeln’ K_c^+ und $K_{c'}^+$ und Zukunfts-Kegeln Z^+ und Z'^+ .
 - $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ ist eine bijektive affine Abbildung .
- (i) ϕ ist orientierungserhaltend, d.h. ϕ_0 bildet positiv orientierte Basen von \mathcal{V}' auf positiv orientierte Basen von \mathcal{V} ab.
- (ii) ϕ_0 bildet mindestens einen Vektor aus Z'^+ in Z^+ ab
- (iii) $\phi_0(K'^+) = K^+$

Eine solche Abbildung soll eine *Lorentz-Abbildung* heissen.

Satz 36.12 *Eine orientierungserhaltende bijektive affine Abbildung $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ mit (ii) zwischen Minkowski-Räumen ist genau dann eine Lorentz-Abbildung wenn es ein (eindeutig bestimmtes) $r > 0$ so gibt, dass*

$$Q(\phi_0\vec{y}) = rQ'(\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{y} \in V' \quad \text{und somit } \Phi(\phi_0\vec{y}, \phi_0\vec{z}) = r\Phi'(\vec{y}, \vec{z})$$

Beweis. Sei Φ eine Lorentz-Abbildung. Wir definieren auf V'

$$\Phi''(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\phi_0\vec{x}, \phi_0\vec{y})$$

Dann ist sofort klar, dass es sich um eine symmetrische Bilinearform handelt. Für die zugehörige quadratische Form gilt

$$Q''(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow Q(\phi_0\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow Q'(\vec{y}) = 0$$

Also definieren Q' und $\varepsilon Q''$ mit passendem $\varepsilon = \pm 1$ denselben Licht-Kegel. Nach Lemma 36.6 gibt es $r > 0$ mit $\varepsilon Q'' = rQ'$, also $Q(\phi_0\vec{y}) = Q''(\vec{y}) = \varepsilon rQ'(\vec{y})$. Wegen (ii) geht mindestens ein zeitartiger Vektor in einen zeitartigen über, folglich $\varepsilon = 1$. In der umgekehrten Richtung ist klar, dass die Doppelkegel ineinander übergehen, wegen (ii) aber auch die Licht-Kegel. \square

36.11 Lorentz-Matrizen

Wir wollen Lorentz-Abbildungen bzgl. geeigneter Koordinatensysteme beschreiben. Glücklicherweise lassen sich die so wählen, dass zwei der räumlichen Koordinaten problemlos sind.

Lemma 36.13 *Zu jeder Lorentz-Abbildung $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ gibt es Einstein-Basen \vec{e}_i von \mathcal{A} und \vec{e}'_i von \mathcal{A}' so, dass*

$$\phi_0(\vec{e}'_i) = \vec{e}_i \text{ f\"ur } i = 2, 3. \quad \text{Es folgt } \phi_0(\vec{e}'_i) \in \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_1 \text{ f\"ur } i = 0, 1$$

Wir sprechen auch von einem *Einstein-Basis-Paar*. Beweis. Wir benötigen die leicht zu beweisende Dimensionsformel für Untervektorräume eines Vektorraums

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$

(ergänze eine Basis von $U \cap W$ zu einer von U und zu einer von W . Zusammen gibt das eine Basis von $U + W$). V und V' haben 3-dimensionale Untervektorräume W und W' raumartiger Vektoren. Da auch $\dim \phi_0^{-1}(W) = 3$ haben wir $\dim U \geq 2$ für $U = W' \cap \phi_0^{-1}(W)$. Also gibt es nach Lemma 36.11 eine Einstein-Basis \vec{e}'_i von V' mit $U \supseteq \mathbb{R}\vec{e}'_2 + \mathbb{R}\vec{e}'_3$. Wähle $\vec{e}_i = \phi_0(\vec{e}'_i)$ für $i = 2, 3$ und ergänze (mit Gram-Schmidt) zu Einstein-Basis von V . Da $\Phi'(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = 0$ für $i = 0, 1$ und $j = 2, 3$ folgt für

$$\vec{x} = \phi_0 \vec{e}'_i = \sum_k x_k \vec{e}_k \text{ dass } x_j Q(\vec{e}_j) = \Phi(\vec{x}, \vec{e}_j) = \Phi'(\vec{x}, \phi_0 \vec{e}'_j) = 0$$

also $x_j = 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_1$ □.

Satz 36.14 *Seien \mathcal{A} und \mathcal{A}' Minkowski-Räume mit $c = c'$ und Einstein-Basis-Paar $\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_3; \vec{e}'_0, \dots, \vec{e}'_3$ mit $Q(\vec{e}_1) = Q'(\vec{e}'_1) = 1$. Sei $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ eine affine Abbildung mit $\phi_0(\vec{e}'_i) = \vec{e}_i, i = 2, 3$. Dann sind äquivalent*

- ϕ ist eine Lorentz-Abbildung
- (i), (ii) und $Q(\phi_0 \vec{y}) = Q'(\vec{y})$ für alle $\vec{y} \in V'$
- (i), (ii) und $Q(\phi_0 \vec{e}'_0) = -c^2, Q(\phi_0 \vec{e}'_i) = 1 \ i \geq 1$ und $\Phi(\phi_0 \vec{e}'_i, \phi_0 \vec{e}'_j) = 0 \ (i \neq j)$
- ϕ_0 wird beschrieben durch eine Matrix (mit eindeutig bestimmtem) v mit $|v| < c$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & E_2 \end{pmatrix} \text{ mit } A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

In Analogie zur Galilei-“Transformation” können wir die Lorentz-“Transformation” schreiben als

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t' + \frac{v}{c^2} x'_1) & t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t - \frac{v}{c^2} x_1) \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (vt' + x'_1) & x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (-vt + x_1) \\ x_2 &= x'_2 & x'_2 &= x_2 \\ x_3 &= x'_3 & x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt aus Satz 36.12, da von $rQ'(\vec{e}'_2) = Q(\phi \vec{e}'_2) = Q(\vec{e}_2)$ auf $r = 1$ geschlossen werden kann. Auch bei zugehörigen Bilinearformen ergibt sich $r = 1$, womit die Äquivalenz zur dritten Aussage klar ist. Sei diese angenommen. Man kann die erste Bedingung ersetzen durch

$$Q(\phi_0 \frac{1}{c} \vec{e}'_0) = -1$$

Sei nun

$$\phi_0 \frac{1}{c} \vec{e}_0' = s \frac{1}{c} \vec{e}_0 + r \vec{e}_1, \quad \phi_0 \vec{e}_1' = q \frac{1}{c} \vec{e}_0 + p \vec{e}_1$$

also

$$(a) \quad r^2 - s^2 = -1, \quad p^2 - q^2 = 1, \quad pr - qs = 0$$

Wegen der in (ii), (i) haben wir

$$(b) \quad s > 0 \quad \text{und} \quad ps - qr = \det \begin{pmatrix} s & q \\ r & p \end{pmatrix} > 0$$

Es folgt $p^2 = q^2 + 1$, $pr = qs$ und $s^2 = r^2 + 1$ woraus $(q^2 + 1)r^2 = p^2 r^2 = q^2 s^2 = q^2(r^2 + 1)$, also $r^2 = q^2$ und $p^2 = s^2$. Somit $r = \varepsilon q$ und $s = \delta p$ mit $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$ und $(\delta - \varepsilon)q^2 + \delta = \delta p^2 - \varepsilon q^2 > 0$ also $\delta = 1$ d.h

$$p = s > 0, \quad q = r, \quad p^2 = q^2 + 1$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad q = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \quad \text{mit} \quad k = \frac{q}{p} =: \frac{v}{c} \quad \text{wobei} \quad k^2 < 1$$

Wegen

$$\phi_0 \vec{e}_0' = p \vec{e}_0 + cq \vec{e}_1, \quad \phi_0 \vec{e}_1' = q \frac{1}{c} \vec{e}_0 + p \vec{e}_1$$

erhalten wir die gewünschte Abbildungsmatrix und ihre Inverse mit

$$A = \begin{pmatrix} p & \frac{1}{c}q \\ cq & p \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} p & -\frac{1}{c}q \\ -cq & p \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt sind für eine solche Matrix offenbar (a) und (b) erfüllt und damit die dritte Aussage. \square

36.12 Resumee

Will man die Bewegung des Ursprungs O' von \mathcal{A}' im Raum \mathcal{A} , d.h. die Abbildung $\vec{t}' \mapsto \phi(\vec{t}' + O')$ ($\vec{t}' \in \mathcal{V}'_{\mathcal{Z}}$) beschreiben, so wähle man für \mathcal{A} den Ursprung $\phi(O')$ und ein Einstein-Basis-Paar. Dann hat $\vec{t}' + O'$ die Koordinaten t' und $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ und für die Koordinaten von $\phi(\vec{t}' + O')$ folgt

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t', \quad x_1 = vt, \quad x_2 = x_3 = 0$$

Also kann $v\vec{e}_1 = \phi_0(\vec{e}_0')$ (der räumliche Anteil des Bildes der Zeitbasis von \mathcal{A}') als Geschwindigkeitsvektor der Relativbewegung von \mathcal{A}' gegen \mathcal{A} interpretiert werden. Dabei ergab sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und dem Begriff der Lorentz-Abbildung (und somit im wesentlichen aus dem Relativitätsprinzip), dass $|v| < c$. Anders ausgedrückt, der Geschwindigkeitsvektor ist zeitartig bzw. die Bahn der Bewegung liegt im Innern des Erreichbarkeitskegels. Dies bedeutet, dass mit grösserer Geschwindigkeit gegeneinander bewegte Koordinatensysteme zwar gedacht werden können, aber keine mit den genannten Prinzipien verträgliche Interpretation zulassen - von der physischen Realisierbarkeit einmal abgesehen.

Die Konsistenz der Prinzipien mit einem physikalischen Gesetz bedeutet nun die Invarianz des Gesetzes unter Lorentz-Abbildungen.

Korollar 36.15 *Um die Invarianz für ein Gesetz zu beweisen, hat man nur die im Satz 36.14 beschriebene Situation zu betrachten.*

Beweis. Beim Wechsel von einer Einstein Basis desselben Raums zu einer anderen handelt es sich ja nur um eine wirkliche und wahrhaftige Koordinatentransformation und man kann sich auf die koordinatenunabhängige geometrische Bedeutung der Begriffe berufen. \square

Das Zwillingsparadox und damit Inertialsysteme nur im Rahmen der oben beschriebenen Begriffe behandeln zu wollen, wäre jedoch eindeutig unseriös.

36.13 Traumzeit

In der Literatur findet man meistens nur die Eine Raum-Zeit-Welt bzw. den Einen Minkowski-Raum. Dabei handelt es sich um den Koordinatenraum und der ist bei gegebenem c in der Tat eindeutig bestimmt - eine Quelle von Missverständnissen und Mogeleyen. Beliebte ist der Missbrauch des Relativitätsprinzips: Sind x_i und x'_i Koordinaten desselben Punktes bzgl. zweier Koordinatensysteme, so wird derselbe Kegel durch $\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 x_0^2 = 0$ wie durch $\sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 x_0'^2 = 0$ beschrieben, woraus messerscharf $\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 x_0^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 x_0'^2$ gefolgert wird. Oder, wenn man von der Bewegung ausgeht, so hat man $a'x' = x - vt$ und $ax = x' + vt'$ und suggeriert $a = a'$. Noch bequemer wäre es, gleich mit dem Relativitätsprinzip auf $v = -v$ zu schließen.

Einsteins Schriften, insbesondere seine Originalarbeit zeichnen sich dagegen durch eine sorgfältige physikalische Begründung aus - insbesondere wie die Längen- und Zeitmessung in den unterschiedlichen Systemen korreliert werden kann. Und es ist sich dessen bewusst, dass der Koordinatenraum nur ein mathematisches Konstrukt ist. Minkowski gibt eine angemessene mathematische Interpretation. Erst Hermann Weyl behauptet, die Welt im Sinne der speziellen Relativitätstheorie wäre ein Minkowski-Raum. Solide mathematische Behandlungen des Themas beginnen beim Minkowski-Raums und seinen Isometrien, etwa B.Arntmann, Lineare Algebra oder, ausführlicher B.Huppert, Angewandte Lineare Algebra und kommen zur physikalischen Bedeutung im Wege einer Illustration.

Wir betrachten nun eine Familie $(\mathcal{V}_i \ (i \in I))$ von (der Einfachheit halber) vektoriellen Einstein-Raumzeiten mit Minkowski-Form Q_i und zu jedem Paar $i \neq j$ eine lineare Lorentz-Abbildung $\phi_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}_j$. Insbesondere gibt es zu jedem i, j ein eindeutig bestimmtes $r_{ij} > 0$ mit $Q_j(\phi_{ij}\vec{x}) = r_{ij}Q_i(\vec{x})$. Wähle nun ein Element der Indexmenge I , es heisse 0. Ersetzen wir Q_i durch $Q'_i = r_{0i}Q_i$ und schreiben wir $Q = Q_0$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, $r_{00} = 1$ und $\phi_{00} = id_{\mathcal{V}}$ so gilt

$$Q'_i(\phi_{0i}\vec{x}) = Q(\vec{x}), \quad Q'_j(\phi_{ij}\vec{x}) = r'_{ij}Q'_i(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad r'_{ij} = r_{0j}r_{ij}r_{0i}^{-1}$$

Wenn wir nun (\mathcal{V}_i, Q'_i) via ϕ_{0i}^{-1} mit der "isometrischen Kopie" (\mathcal{V}, Q) "identifizieren", so heisst das, dass wir ϕ_{ij} ersetzen können durch

$$\phi'_{ij} = \phi_{0j}^{-1} \circ \phi_{ij} \circ \phi_{0i} \quad \text{und haben} \quad Q(\phi'_{ij}\vec{x}) = r'_{ij}Q(\vec{x})$$

d.h. es reicht aus der Sicht der Mathematik im Prinzip aus, einen einzigen Einstein-Raum und dessen Lorentz-Selbstabbildungen zu betrachten. Wären alle $r'_{ij} = 1$, so hätten wir nur *Isometrien*. Das läuft aber darauf hinaus zu fordern, dass

$$r_{jk}r_{ij} = r_{ik} \quad \text{für alle } i, j, k$$

Hinreichend dafür ist die Voraussetzung

$$\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik} \quad \text{für alle } i, j, k$$

die dann aber auch wieder physikalisch zu rechtfertigen wäre.

36.14 Methoden der Verwirrung

Die Beschreibung von Objekten der Linearen Algebra bzw. Physik durch Koordinaten und Matrizen ist nützlich und oft bequem. Dabei ist es unvermeidbar, dass identische Beschreibungsmittel unterschiedliche Objekttypen beschreiben können - z.B. kann ein Koordinatentripel sowohl die Richtung einer Bewegung wie auch Geschwindigkeit oder Beschleunigung beschreiben, obwohl das doch physikalisch einen nicht unerheblichen Unterschied ausmacht.

Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Quellen rein mathematischer Verwirrung angeben. Dabei seien \mathcal{P} und \mathcal{P}' affine Räume mit reellen Vektorräumen V und V' gleicher Dimension mit Koordinatensystemen α bzw. β mit Ursprung O_α bzw. O_β und Basis $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\beta}$ (bisher haben wir den Basisanteil einfach auch mit α und β bezeichnet). Dabei bezeichne \mathbf{x} die Koordinaten in \mathcal{P} bzw. V bzgl. α bzw. $\vec{\alpha}$ und \mathbf{x}' die in \mathcal{P}' bzw. V' bzgl. β bzw. $\vec{\beta}$.

- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ (also auch $V = V'$) und $O_\alpha = O_\beta$ so wird die Koordinatentransformation im affinen Raum und im Vektorraum durch dieselbe Transformationsmatrix S beschrieben: $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$
- Ist $\phi : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ eine affine Abbildung, mit $\phi(O_\beta) = O_\alpha$, so werden ϕ und die zugehörige lineare Abbildung $\phi_0 : V' \rightarrow V$ durch dieselbe Abbildungsmatrix beschrieben: $\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$ sind die Koordinaten des Bildes, wenn \mathbf{x}' die Koordinaten des Urbildes sind
- Ist $V = V'$ so lässt sich der Koordinatentransformation $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ die lineare Selbst-Abbildung $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ des Koordinatenraumes \mathbb{R}^n zuordnen. Will man von dieser Abbildung zurück zur Transformation, so muss man eine der beiden Basen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ kennen.
- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ so lässt sich der Koordinatentransformation $\mathbf{x} = S\mathbf{x}' + \mathbf{v}$ die affine Selbst-Abbildung $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x} = S\mathbf{x}' + \mathbf{v}$ des affinen Koordinatenraumes \mathbb{R}^n zuordnen. Will man von dieser Abbildung zurück zur Transformation, so muss man eines der beiden Koordinatensysteme α, β kennen.
- Einer linearen Abbildung $\phi_0 : V' \rightarrow V$ mit Matrix A bzgl. $\vec{\beta}$ und $\vec{\alpha}$ ist die lineare Selbstabbildung $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x} = A\mathbf{x}'$ von \mathbb{R}^n zugeordnet. Zur Rückgewinnung der Abbildung ϕ_0 muss man beide Basen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ kennen.
- Einer affinen Abbildung $\phi : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ mit Matrix A und Translationsspalte \mathbf{v} bzgl. β und α ist die affine Selbstabbildung $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x} = A\mathbf{x}' + \mathbf{v}$ von \mathbb{R}^n zugeordnet. Zur Rückgewinnung der Abbildung ϕ muss man beide Koordinatensysteme α, β kennen.

Es ergeben sich hieraus vielfältige Möglichkeiten, Abbildungen als Koordinatentransformationen misszuverstehen und umgekehrt. Insbesondere wenn man alle Räume mit \mathbb{R}^n identifiziert.

Inhaltsverzeichnis