Ergänzungen zur Geometrie fúr Lehramt

Kapitel 1

Determinanten und Vektorprodukt

1.1 Determinanten in Ebene und Raum

1.1.1 Orientierung

In einer Ebene oder im Raum wird eine Orientierung durch Auszeichnung einer Basis und der zulässigen Deformationen angegeben; dabei kommt beim Anschauungsraum die "Rechte Hand Regel" zur Anwendung. "Orientierte" Flächen bzw. Volumina ergeben sich dann als Determinanten, axiomatisch durch (D1-4) bestimmt. Eine Besonderheit des dreidimensionalen Raumes ist das Vektor- oder äussere Produkt (besonders ist, dass es als Operation im Raum verstanden werden kann). Als Koordinatensysteme benutzen wir hier positiv orientierte Orthonormalbasen. Bezüglich eines solchen lassen sich dann Determinanten und Vektorprodukt koordinatenweise berechnen.

1.1.2 Flächen

Setzt man für Quadrate mit Seitenlänge 1 den Flächeninhalt 1 fest, so ergibt sich (nach Archimedes) der Flächeninhalt eines Parallelogramms als gh, wobei g die Länge einer (Grund)Seite und h die Länge einer dazu senkrechten Höhe bezeichnet. (Überlegen Sie sich auch mal einen Beweis!) Wir definieren die *Determinante*

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \epsilon F \quad = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi$$

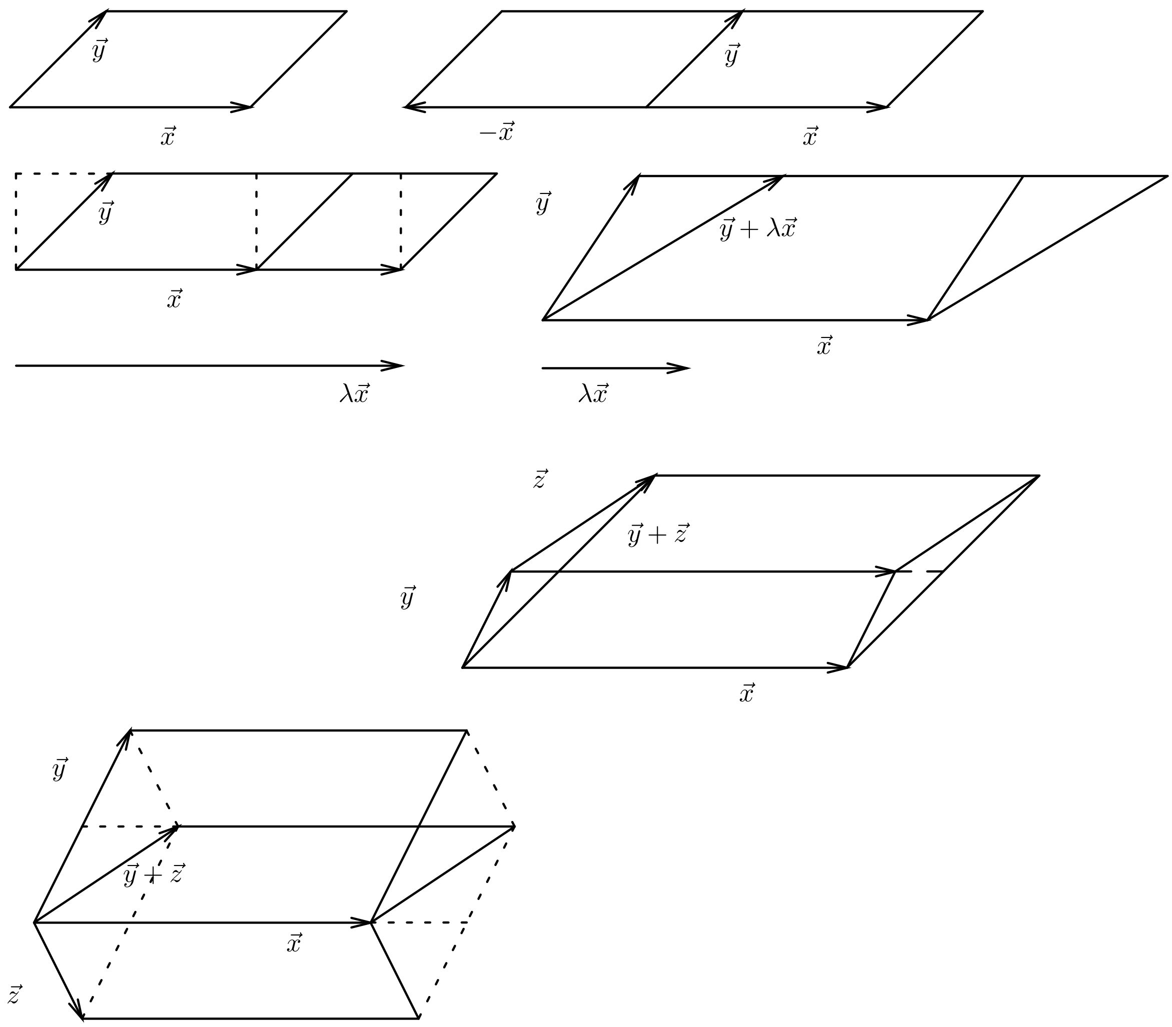
wobei ϕ der Winkel zwischen (den Ortsvektoren) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, F die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms und $\epsilon = 1$ falls $0 < \phi < \pi$ (*Rechtssystem*) bzw. $\epsilon = -1$ falls $\pi < \phi < 2\pi$ (*Linkssystem*). Es gilt für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, in der gegebenen Ebene gilt (vgl Fig.) die Scherungsinvarianz

$$\det(\vec{a}, \vec{b} + r\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a} + s\vec{b}, \vec{b})$$

d.h. die Grundfläche ändert sich weder nach Betrag noch nach Vorzeichen, wenn man $\vec{b}$ längs einer Parallelen zu $\vec{a}$ schert, Weiterhin

$$(D1) \quad \det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c}), \ \det(\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{b}, \vec{a}) + \det(\vec{c}, \vec{a})$$

$$(D2-3) \quad \det(\vec{a}, r\vec{b}) = r \det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(r\vec{a}, \vec{b}), \quad \det(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$



$$\det(\vec{a},\vec{b})=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a},\vec{b} \text{ parallel },\quad \det(\vec{b},\vec{a})=-\det(\vec{a},\vec{b})$$

wie man aus (D1-3) leicht beweist. Z.B. $\det(\vec{a},\vec{b}+r\vec{a})=\det(\vec{a},\vec{b})+\det(\vec{a},r\vec{a})=\det(\vec{a},\vec{b})+r\det(\vec{a},\vec{a})=\det(\vec{a},\vec{b})+r0$. Bei "$\Rightarrow$" muss man allerdings voraussetzen, dass es überhaupt Vektoren gibt mit $\det(\vec{x},\vec{y})\neq 0$. Auch die Scherungsinvarianz lässt sich aus (D1-3) herleiten. Wählt man als Koordinatensystem der Ebene eine Orthonormalbasis $\vec{e_1},\vec{e_2}$, die ein Rechtssystem ist, so gilt

$$(D4)\quad \det(\vec{e_1},\vec{e_2})=1$$

und man kann die Determinante aus den Koordinaten berechnen

$$\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

nämlich $\det(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2,b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2)=\det(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2,b_1\vec{e}_1)+\det(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2,b_2\vec{e}_2)=\det(a_1\vec{e}_1,b_1\vec{e}_1)+\det(a_2\vec{e}_2,b_1\vec{e}_1)+\det(a_1\vec{e}_1,b_2\vec{e}_2)+\det(a_2\vec{e}_2,b_2\vec{e}_2)=0+a_2b_1\det(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+a_1b_2\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+0=-a_2b_1+a_1b_2$.

Umgekehrt wird durch die Auszeichnung einer Orthonormalbasis als Koordinatensystem die Orientierung der Ebene angegeben und ein Flächenmaß eingeführt

$$\vec{a}, \vec{b} \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv orientiert} \\ \text{negativ orientiert} \\ \text{linear abhängig} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Fläche Parallelogramm}(\vec{a}, \vec{b}) = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

1.1.3 Vektorprodukt

Ein Tripel unabhängiger Vektoren bildet ein *Rechtssystem* im Raum, wenn ihre Richtungen (in der gegebenen Reihenfolge) mit den Richtungen von gestrecktem Daumen und Zeigefinger und abgewinkeltem Mittelfinger der rechten Hand identifiziert werden können - Beweglichkeit des Daumens bis zu 180^o gegenüber dem Zeigefinger vorausgesetzt. Entsprechend hat man *Linkssysteme* für die linke Hand. Jedes unabhängige Tripel von Vektoren bildet entweder ein Rechts- oder ein Linkssystem . Welche Hand die rechte ist, ist mathematisch gesehen jedoch eine Frage der Definition: es wird irgendein unabhängiges Tripel zum Rechtssystem deklariert und dadurch die *Orientierung* festgelegt. Alle anderen Rechtssysteme ergeben sich hieraus durch Drehung des Tripels insgesamt und stetigen Scherungen eines der Vektoren gegen die beiden anderen, bei denen die drei Vektoren in keinem Stadium in eine gemeinsame Ebene zu liegen kommen. Wir definieren nun das *Vektor-* oder *äussere Produkt* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ durch die Bedingungen

$$\|\vec{c}\| = |det(\vec{a}, \vec{b})|, \; \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \;\text{ und } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ Rechtssystem oder abhängig.}$$

Unmittelbar geometrisch einsichtig sind die Regeln

$$(G1-2) \;\; \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ parallel }, \; \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$G3) \;\; r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$$

Es folgt wie bei den ebenen Determinanten die Scherungsinvarianz

$$\vec{a} \times (\vec{b} + r\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} + s\vec{b}) \times \vec{b}$$

(d.h. $\det(\vec{a}, \vec{b})$, Normale und Orientierung bleiben unverändert) und daraus dann die Distributivgesetze

$$(G4) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \;\; (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Zum Beweis des ersten Distributivgesetztes dürfen wir zunächst annehmen, dass $\|\vec{a}\| = 1$. Nach Scherung darf man $\vec{b} \perp \vec{a}$ annehmen, ebenso $\vec{c} \perp \vec{a}$. Dann liegen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene mit Normale $\vec{a}$ und man erhält $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ in dieser Ebene, indem man b, $\vec{c}$ und $\vec{b} + \vec{c}$ jeweils um 90^0 dreht. (vgl. Folie)

Eine typische Anwendung des Vektorprodukts ist es, aus zwei nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{b}, \vec{c}$ einer Ebene einen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ zu berechnen. Wählt man als Koordinatensystem des Raumes ist eine Orthonormalbasis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, die Rechtssystem ist, so hat man

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

und die Koordinatendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_2\vec{e}_3 + b_1a_3\vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_1 - a_3b_2\vec{e}_1 - b_3a_1\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3$$

$$\vec{a}\times\vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis durch Ausmultiplizieren (Übung!)

1.1.4 Grassmannscher Entwicklungssatz

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}.$$

Beweis. Wegen der Linearitätseigenschaften von Skalar- und Vektorprodukt bleibt die Gültigkeit der Formel beim Übergang zu Linearkombinationen erhalten: gelten z.B. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}$ und $(\vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}'$ für gegebene Vektoren $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}$, so gelten auch $(r\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} + \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}')$.

Man rechnet nämlich nach, dass $(r\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (r(\vec{a} \times \vec{b})) \times \vec{c} = r((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) = r(\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}) = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - r\langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (r\vec{a}) = \langle r\vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}' = (\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle)\vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}') = \langle \vec{a} + \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}')$. Entsprechend verfährt man bei Linearkombinationen von $\vec{b}$'s bzw. $\vec{c}$'s .

Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig, z.B. $\vec{b} = r\vec{a}$, so rechnet mabn für beide Seiten sofort $\vec{0}$ aus. Andernfalls ist $\vec{c}$ Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$. Damnit reduziert sich die Aufgabe auf den Fall, dass $\vec{c}$ einer dieser Vektoren ist. Ausssrdem dúrfen wir $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ annehmen. Für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ hat man auf beiden Seiten sofort $\vec{0}$. Sei also $\vec{c} = \vec{a}$. $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ liegt nun in der Ebene $\perp \vec{a} \times \vec{b}$, d.h. in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten, und ist senkrecht zu $\vec{a}$. Die Länge von $\vec{d}$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. also dessen Höhe (wegen $\|\vec{a}\| = 1$). Damit $\vec{d} = \pm(\vec{b} - \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{a})$, wegen der Orientierung gilt $+$. Das beweist die Gleichung in diesem Fall. Für $\vec{c} = \vec{b}$ gehts entsprechend, nur ist jetzt die Orientierung andersherum.

Alternativ: Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren aus einer positiv orientierten Orthonormalbasis sind. Ist $\vec{b} = \pm\vec{a}$, so $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, also $LS = \vec{0} = RS$. Sei also $\vec{a} \neq \pm\vec{b}$. Dann ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}$ oder $\vec{c} = \pm\vec{a} \times \vec{b}$. Ist $\vec{c} = \vec{a}$, so $LS = \vec{b}$, da $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ positiv orientiert (zyklische Vertauschung!), und $RS = \vec{b}$, da

$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle = 1, \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = 0$. Ist $\vec{c} = \vec{b}$ so $LS = -\vec{a}$, da $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b},\vec{a}$ negativ orientiert, und $RS = -\vec{a}$, da $\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle = 0, \langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle = 1$. Ist $\vec{c} = \pm\vec{a}\times\vec{b}$, so $LS = \vec{0}$ und $\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle = \langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle = 0$, also auch $RS = \vec{0}$. Es folgt

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0} \quad \textit{Jacobi Identitaet}$$

1.1.5 Volumen

Nachdem das Volumen des Einheitswürfels als 1 festgelegt ist, ergibt sich das Volumen eines Spats zu "Grundfläche mal Höhe". Wir definieren nun die *Determinante* oder das *Spatprodukt* als

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \langle\vec{a}\times\vec{b}\mid\vec{c}\rangle = \epsilon V,$$

wobei V das Volumen des von (den Ortsvektoren) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats ist und $\epsilon = 1$, falls $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ Rechtssystem, $\epsilon = -1$, andernfalls. Wegen der Eigenschaften von Vektor- und Skalarprodukt gelten die Regeln $(D1-3)$ und ihre Konsequenzen entsprechend, z.B. $\det(r\vec{a}+s\vec{a}',\vec{b},\vec{c})) = r\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + sdet(\vec{a}',\vec{b},\vec{c})$ d.h. Linearität in der ersten Spalte und entsprechend in den anderen Spalten. Bei zwei gleichen Spalten erhält man in allen 3 möglihcne Fällen Determinante 0. Es folgt Vorzeichenwechsel bei Vertauschung zweier Spalten, z.B. $\det(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Also bleibt die Determinante bei zyklischen Vertauschungen unverändert.

Eine positiv orientierte ONB hat Determinante 1 und es gilt

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1.$$

Wir schreiben auch

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det A$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ersetzt man hier c_i durch $\vec{e}_i$, so erhält man das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$.

Mit Grassmann und Determinante beweist man

$$\langle\vec{a}\times\vec{b}\mid\vec{c}\times\vec{d}\rangle = \langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\langle\vec{b}\,|\,\vec{d}\rangle - \langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\langle\vec{a}\,|\,\vec{d}\rangle \ \textit{Lagrange}.$$

Beweis. $\langle\vec{a}\times\vec{b}\mid\vec{c}\times\vec{d}\rangle = \langle\vec{c}\times\vec{d}\mid\vec{a}\times\vec{b}\rangle = \det(\vec{c},\vec{d},\vec{a}\times\vec{b}) = \det(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \langle(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\,|\,\vec{d}\rangle = \langle\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b} - \langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}\,|\,\vec{d}\rangle = \langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\langle\vec{b}\,|\,\vec{d}\rangle - \langle b\,|\,c\rangle\langle\vec{a}\,|\,\vec{d}\rangle$.

1.1.6 Übersicht

Skalar mal Vektor ergibt Vektor: $r\vec{a}$. Man könnte auch $\vec{a}r = r\vec{a}$ definieren. Dann gelten alle Rechenregeln, es kann aber in einem Produkt nur ein Vektor auftreten und dividieren darf man durch Vektoren auch nicht. Aber man darf kürzen: Aus $r\vec{a} = r\vec{b}$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$ falls $r \neq 0$; aus $r\vec{a} = s^a$ folgt $r = s$ falls $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar: $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$. Das Assoziativgesetz für drei Vektoren: $\vec{a}\langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \vec{c}$ gilt nur, wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel sind. Kürzen darf man Vektoren auch nicht (und erst recht nicht durch Vektoren dividieren): Aus $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle$ folgt nur, dass $\vec{a}$ auf $\vec{b} - \vec{c}$ senkrecht steht. Immerhin hat man noch Kommutativität und Distributivität; und Assoziativität soweit nur zwei Vektoren beteiligt sind.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor: $\vec{a} \times \vec{b}$ im Raum. Statt Kommutativität haben wir Antikommuativität, statt Assoziativität Grassmann. Immerhin gilt noch das Distributivgesetz, und man kann Skalare herausziehen. Aus $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ folgt nur, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind.

Die Determinante dreier (zweier) Vektoren ist ein Skalar Dabei muss eine Orientierung des Raums (der Ebene) vorgegeben sein. Man hat die Linearitätseigenschaft in jeder Spalte. Aus $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ folgt nur, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind, d.h. durch Pfeile in einer Ebene repräsentiert werden können,

Die Orientientierung der Ebenen bzw. des Raumes wird durch eine ON-Basis festgelegt. Eine weitere Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ bzw. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ist dann positiv orientiert, wenn $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) > 0$ bzw. $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) > 0$, andernfalls ist sie negativ orientiert. Im realen Raum können wir die positive Orientierung durch die "Rechte-Hand-Regel" festlegen, für Ebenen in "Draufsicht" durch die "gegen-die-Uhr-Regel".

1.2 Orienterung, Flächen, Winkel

1.2.1 Bitensoren

Ein *kovarianter Tensor 2.Stufe* kurz *Bitensor* oder Bilinearform auf der vektoriellen Ebene $\boldsymbol{e}$ ist eine Abbildung

$$F : \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} \to \mathcal{S}$$

die jedem Paar $(\vec{a}, \vec{b})$ von Vektoren einen Skalar $F(\vec{a}, \vec{b})$ zuordnet derart, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{e}$ und $\lambda \in \mathcal{S}$

$$\begin{array}{ll} F(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{c}, \vec{b}) & F(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b}) \\ F(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{a}, \vec{c}) & F(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b}) \end{array}$$

1.2.2 Gram-Matrix

Ist $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine Basis von $\boldsymbol{e}$ so hat man die *Gram-Matrix* von F bzgl. α

$$F^\alpha = \begin{pmatrix} F(\vec{a}_1, \vec{a}_1) & F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ F(\vec{a}_2, \vec{a}_1) & F(\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{pmatrix}$$

Lemma 1.2.1 *Ist eine Basis $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ gegeben, so wird durch*

$$F \mapsto F^\alpha$$

eine bijektive Entsprechung zwischen Bitensoren und Matrizen hergestellt und es gilt

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = (\xi_1, \xi_2) F^\alpha \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} \quad \textit{für } \vec{x} = \xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 \textit{ und } \vec{y} = \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2$$

Beweis. Ist F ein Bitensor, so

$$\begin{array}{rcl} & F(\vec{a}_1, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) & = & F(\vec{a}_1, \upsilon_1 \vec{a}_1) + F(\vec{a}_1, \upsilon_2 \vec{a}_2) \\ = & \upsilon_1 F(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \upsilon_2 F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} & F(\xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) & & \\ = & F(\xi_1 \vec{a}_1, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) & + & F(\xi_2 \vec{a}_2, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) \\ = & \xi_1 F(\vec{a}_1, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) & + & \xi_2 F(\vec{a}_2, \upsilon_1 \vec{a}_1 + \upsilon_2 \vec{a}_2) \\ = & \xi_1 (\upsilon_1 F(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \upsilon_2 F(\vec{a}_1, \vec{a}_2)) & + & \xi_2 (\upsilon_1 F(\vec{a}_2, \vec{a}_1) + \upsilon_2 F(\vec{a}_2, \vec{a}_2)) \\ = & \xi_1 \upsilon_1 F(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \xi_1 \upsilon_2 F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) & + & \xi_2 \upsilon_1 F(\vec{a}_2, \vec{a}_1) + \xi_2 \upsilon_2 F(\vec{a}_2, \vec{a}_2) \end{array}$$

insbesondre ist F durch F^α eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt A eine Matrix so definiere

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = (\xi_1, \xi_2) A \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix}$$

Es folgt leicht, dass F bilinear ist und $F^\alpha = A$ - Beweis als Übung. □

1.2.3 Alternierende Formen

Lemma 1.2.2 *Für einen Bitensor F sind die folgenden Aussagen äquivalent*

1. $F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ *für alle* $\vec{x}$
2. $F(\vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$ *und* λ
3. $F(\vec{x}, \vec{y} + \lambda \vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{y})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$ *und* λ
4. $F(\vec{x}, \vec{y}) = -F(\vec{y}, \vec{x})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$

Gelten die Aussagen aus dem Lemma, so heisst der Bitensor F *alternierend.*

Beweis. Gelte 1. Dann

$$F(\vec{x}+\lambda\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\lambda\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda F(\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda \cdot 0 = F(\vec{x}, \vec{y}).$$

Gelte 2. Dann

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x} - \vec{x}, \vec{x}) = F(0 \cdot \vec{0}, \vec{x}) = 0 \cdot F(\vec{0}, \vec{x}) = 0.$$

Also ist 1 zu 2 äquivalent. Ebenso ist 1 zu 3 äquivalent. Gilt nun 1 so

$$F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x}) = F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) + F(\vec{y} + \vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = 0.$$

Gilt umgekehrt 4 so $F(\vec{x}, \vec{x}) = -F(\vec{x}, \vec{x})$ also $2F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ und somit $F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ solange $2 \neq 0$. □

Lemma 1.2.3 *Ein Bitensor ist alternierend genau dann, wenn bzgl. einer/jeder Basis α die Gram-Matrix folgende Gestalt hat*

$$F^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Hat F^α die angebenene Gestalt, so

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} \mu\upsilon_2 \\ -\mu\upsilon_1 \end{pmatrix} = \mu(\xi_1\upsilon_2 - \xi_2\upsilon_1)$$

d.h. F ist alternierend. Die Umkehrung ist trivial. □

1.2.4 Determinantenformen

Ein alternierender Bitensor F ist eine *Determinantenform*, falls es Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ gibt mit $F(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$, d.h. falls die die Gram-Matrix nicht die Nullmatrix O.

Lemma 1.2.4 *Für jede Determinantenform F gilt*

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee \vec{y} = \vec{0} \vee \vec{x} \parallel \vec{y}$$

Beweis. Gilt $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, so $F(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Und $F(\vec{0}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{0})$ wie oben gesehen. Hätte man nichtparallele und von $\vec{0}$ veschiedene $\vec{x}, \vec{y}$ mit $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, so bildeten diese eine Basis mit Gram-Matrix O, also wäre F keine Determinantenform.

Ist F eine Determinatenform und $\lambda \neq 0$ so ist auch λF eine Determinantenform wobei

$$(\lambda F)(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y})$$

Natürlich gilt $(\lambda F)^\alpha = \lambda F^\alpha$ und es folgt mit Lemma 1.2.3

Korollar 1.2.5

- *Sind F_1 und F_2 Determinantenformen, so gibt es einen eindeutig bestimmten Skalar $\lambda \neq 0$ so, dass $F_2 = \lambda F_1$.*

- *Zu jeder Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und jedem Skalar $\kappa \neq 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte Determinanterform F mit*

$$F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \kappa$$

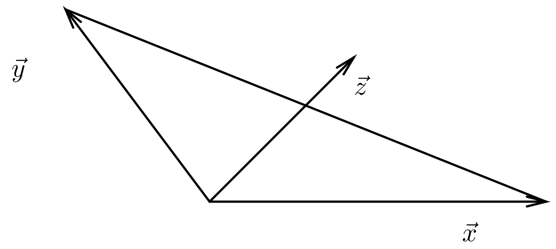
1.2.5 Orientierung

Eine *Orientierung* ist eine Abbildung, die jedem Paar nichtparalleler und von $\vec{0}$ veschiedener Vektoren ein $o(\vec{x}, \vec{y}) \in \{1, -1\}$ zuordnet so, dass

- $o(\vec{y}, \vec{x}) = -o(\vec{x}, \vec{y}) = o(-\vec{x}, \vec{y})$
- $o(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda o(\vec{x}, \vec{y}$ füt $\lambda > 0$
- $o(\vec{x}, \vec{z}) = o(\vec{z}, \vec{y}) = o(\vec{x}, \vec{y})$ falls $\vec{z}$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$

  Dabei liegt $\vec{z}$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, falls für ein/alle P es ein $\lambda > 0$ gibt so, dass $\lambda\vec{z} + P$ zwischen $\vec{x} + P$ und $\vec{y} + P$ liegt.

Zu einer Orientierung o ist $-o$ mit $(-o)(\vec{x}, \vec{y}) = -o(\vec{x}, \vec{y})$ die *entgegengesetzte* Orientierung.



1.2.6 Flächenmaße

Ein *Flächenmaß* M für Parallelogramme ordnet jedem Paar nicht paralleler und von $\vec{0}$ verschiedener Vektoren einen Skalar $M(\vec{x}, \vec{y})$ so, dass gilt

- $M(\vec{x}, \vec{y}) > 0$
- $M(\vec{y}, \vec{x}) = M(\vec{x}, \vec{y}) = M(-\vec{x}, \vec{y})$
- $M(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda M(\vec{x}, \vec{y})$ für $\lambda > 0$
- $M(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \begin{cases} M(\vec{x}, \vec{y}) + M(\vec{x}, \vec{z}) & \text{falls } o(\vec{x}, \vec{y}) = o(\vec{x}, \vec{z}) \\ M(\vec{x}, \vec{y}) & \text{falls } \vec{z} \parallel \vec{x} \\ M(\vec{x}, \vec{z}) & \text{falls } \vec{y} \parallel \vec{x} \\ |M(\vec{x}, \vec{y}) - M(\vec{x}, \vec{z}))| & \text{sonst} \end{cases}$

$M(\vec{x}, \vec{y})$ verstehen wir als die Fläche des von den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ an einer beliebigen Ecke P aufgespannten Parallelogramms, d.h. des von den Punkten $P, \vec{x} + P, \vec{y} + P, \vec{x} + \vec{y} + P$ aufgespannten konvexen Polygons. Die Verschiebungsinvarianz des Fächenmaßes haben wir also mitpostuliert.

1.2.7 Orientierte Flächen und Determinanten

Satz 1.2.6 *Eine bijektive Beziehung zwischen Paaren (M, o) von Flächenmaßen und Orientierungen einerseits, Determinantenformen F andererseits wird hergestellt durch*

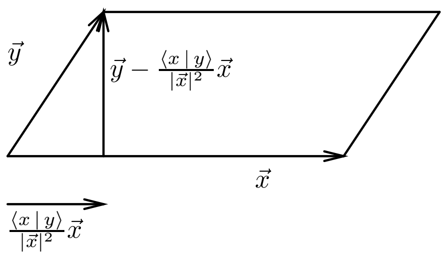
$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \vec{x} = \vec{0} \vee \vec{y} = \vec{0} \vee \vec{x} \parallel \vec{y} \\ o(\vec{x}, \vec{y}) \cdot M(\vec{x}, \vec{y}) & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$M(\vec{x},\vec{y}) = |F(\vec{x},\vec{y})|, \quad o(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } F(\vec{x},\vec{y}) > 0 \\ -1 & \textit{falls } F(\vec{x},\vec{y}) < 0 \end{cases}$$

Korollar 1.2.7 *Die Ebene hat genau zwei Orientierungen. Zu jedem (echten) Parallelogramm gibt es genau ein Flächenmaß so, dass dieses Parallelogramm die Fläche 1 hat.*

Korollar 1.2.8 *Ist eine Längeneinheit mit zugehörigem kanonischen Skalarprodukt gegeben und ist M ein Flächenmaß so, dass ein Quadrat von Seitenlänge 1 die Fläche 1 hat, so ergeben sich die Parallelogrammflächen als: Grundseite $\times$ Höhe*

$$M(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y} - \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|^2}\vec{x}|$$



Ist zusätzlich eine Orientierung gegeben, so gibt es genau eine Determinantenform det *so, dass*

$$\det(\vec{x},\vec{y}) = 1 \textit{ für jede/eine positiv orientierte ON-Basis}$$

Wir sprechen dann von det als 'der *Determinante*' - bzgl. der gegebenen Längeneinheit und Orientierung. Bzgl. einer positiv orientierten ON-Basis α hat det dann die Gram-Matrix

$$\overset{\alpha}{\det} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \det(\vec{x},\vec{y}) = \xi_1\upsilon_2 - \xi_2\upsilon_1$$

Beweis des Satzes als Übung. Zum 1.Korollar. Nach Korollar 1.2.5 gibt es eine Determinantenform F_1. Dann werden durch F_1 und $(-1)F_1$ zwei entgegengestezte Orientierungen o_1 und $-o_1$ definiert. Ausserdem ist $|F_1|$ ein Flächenmaß. Ist o_2 eine weitere Orientierung, so kommt sie von einer Determinantenform F_2 und es gibt $\lambda \neq 0$ mit $F_2 = \lambda F_1$. Also sind o_1 und o_2 gleich oder entgegensetzt je nachdem ob $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$.

Das gegebene Parallelogramm werde von $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ aufgespannt. Nach Lemma 1.2.5 kann man F_1 so wählen, dass $M_1(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = F_1(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = 1$ für $M_1 = |F_1|$. Ist M_2 ein weiteres Flächenmaß mit $M_2(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = 1$, so kommt M_2 von einer Determinantenfunktion F_2 und $F_2 = \lambda F_1$ mit $|\lambda| = 1$. Also $M_2 = M_1$.

Das 2. Korollar können wir erst später beweisen.

1.2.8 Determinante von Matrizen

Die Determinante einer Matrix definieren wir so

$$\det(\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{21}\mu_{12}$$

Mit Lemma 1.2.3 und 1.2.5 folgt sofort

Lemma 1.2.9 *Ist $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine Basis von $\boldsymbol{e}$, so wird durch*

$$F(\mu_{11}\vec{a}_1 + \mu_{21}\vec{a}_2,\ \mu_{12}\vec{a}_1 + \mu_{22}\vec{a}_2) = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}$$

die eindeutig bestimmte Determinantenform definiert mit

$$F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 1$$

Kurz: Die Determinante einer Matrix ist eine multilineare und alternierende Funktion der Spalten und $\det(E) = 1$.

Lemma 1.2.10 $\boxed{\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N),\ \ \det(M^t) = \det(M)}$

Beweis. Für 2×2-Matrizen erhält man das durch simples Nachrechnen. Wer will, betrachte bei festem M die Bitensoren $N \mapsto \det(MN)$ und $N \mapsto \det(M)\det(N)$.

Lemma 1.2.11 *Für Matrizen eine 2×2-Matrix M sind die folgenden Aussagen äquivalent*

- *M invertierbar*
- *$\delta := \det(M) \neq 0$ und*

$$N = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{22}}{\delta} & -\frac{\mu_{12}}{\delta} \\ -\frac{\mu_{21}}{\delta} & \frac{\mu_{11}}{\delta} \end{pmatrix}$$

Es gilt dann

$$\boxed{\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}}$$

Beweis. Ist $\det(M) \neq 0$, so rechnet man $MM^{-1} = E = M^{-1}M$ leicht nach. Gilt $NM = E$ so folgt $\det(N)\det(M) = \det(NM) = \det(E) = 1$, also $det(M) \neq 0$ und $\det(N) = (\det(M))^-1$. Ausserdem $N = NE = N(MM^{-1}) = (NM)M^{-1} = EM^{-1} = M^{-1}$. Entsprechend falls $MN = E$. $\square$

Korollar 1.2.12 *Für orthogonale Matrizen S gilt*

$$|\det(S)| = 1$$

Korollar 1.2.13 *Ist eine Orientierung und eine Determimantenform F gegeben so, dass $F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 1$ für eine positiv orientierte ON-Basis α, so gilt $F(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = 1$ für jede positiv orientierte ON-Basis β.*

Beweis von Kor.19.8: O.B.d.A $\vec{x}, \vec{y}$ positiv orientiert und, nach Lemma 11.2 $\vec{x} \perp \vec{y}$. Also

$$M(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot M(\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}, \frac{1}{|\vec{y}|}\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot F(\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}, \frac{1}{|\vec{y}|}\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$$

1.2.9 Zur Winkelmessung

Wie wir schon früher bemerkt haben, kann die Betragsgleichheit von Winkeln über das Skalarprodukt, die Orientierungsgleichheit über die Determinante ausgedrückt werden. Genauer: ist ein kanonisches Skalarprodukt und eine Orientierung gegeben, so definiere Abbildungen ($\boldsymbol{e}^+ = \boldsymbol{e} \setminus \{\vec{0}\}$)

$$c : \boldsymbol{e}^+ \times \boldsymbol{e}^+ \to [-1,1], \quad s : \boldsymbol{e}^+ \times \boldsymbol{e}^+ \to [-1,1]$$

$$c(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}, \quad s(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\det(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

Für jede positiv orientierte ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gilt dann

$$\forall \vec{x}.\ |\vec{x}| = 1 \Leftrightarrow \vec{x} = c(\vec{e}_1,\vec{x})\vec{e}_1 + s(\vec{e}_1,\vec{x})\vec{e}_2$$

$$\forall \kappa \in [-1,1].\forall \sigma \in [-1,1].\exists! \vec{x}.\ |\vec{x}| = 1 \wedge c(\vec{e},\vec{x}) = \kappa \wedge s(\vec{e},\vec{x}) = \sigma$$

Zudem sind die orientierten Winkel $\angle\vec{x},\vec{y}$ und $\angle\vec{u},\vec{v}$ gleich genau dann, wenn

$$c(\vec{x},\vec{y}) = c(\vec{u},\vec{v}) \wedge s(\vec{x},\vec{y}) = s(\vec{u},\vec{v})$$

Damit kann man Winkel durch ein Paar von Maßzahlen bestimmen, aber es fehlen wünschenswerte Eigenschaften wie etwa die Additivität.

Satz 1.2.14 *Es gibt eine Zahl $\pi > 0$ in $\mathbb{R} = \mathcal{S}$ und surjektive Abbildung*

$$\angle_o : \boldsymbol{e}^+ \times \boldsymbol{e}^+ \to [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$$

so, dass für alle $\vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v} \in \boldsymbol{e}^+$

- $\angle_o(\vec{x},\vec{y}) = \angle_o(\vec{u},\vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad c(\vec{x},\vec{y}) = c(\vec{u},\vec{v}) \wedge s(\vec{x},\vec{y}) = s(\vec{u},\vec{v})$
- $\angle_o(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} \angle_o(\vec{x},\vec{z}) + \angle_o(\vec{z},\vec{y}) & \textit{falls } \exists\lambda > 0.\ \vec{z} = \lambda\vec{x} \vee \vec{y} = \lambda\vec{z} \textit{ oder} \\ & o(\vec{x},\vec{z}) = 1 \wedge \exists\vec{u}.\ c(\vec{x},\vec{u}) = c(\vec{x},\vec{y}) \wedge o(\vec{x},\vec{u}) = 1 \\ \angle_o(\vec{x},\vec{z}) + \angle_o(\vec{z},\vec{y}) - 2\pi & \textit{sonst} \end{cases}$
- $\angle_o(\vec{x},\vec{y}) \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \exists\lambda > 0.\ \vec{y} = \lambda\vec{x} \\ \frac{1}{2}\pi & \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \wedge o(\vec{x},\vec{y}) = 1 \\ \pi & \Leftrightarrow \exists\lambda < 0.\ \vec{y} = \lambda\vec{x} \\ \frac{3}{2}\pi & \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \wedge o(\vec{x},\vec{y}) = -1 \end{cases}$
- $0 < \angle_o(\vec{x},\vec{y}) < \pi \Leftrightarrow o(\vec{x},\vec{y}) = 1 \qquad \pi < \angle_o(\vec{x},\vec{y}) < 2\pi \Leftrightarrow o(\vec{x},\vec{y}) = -1$

Man kann nun Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1], \quad \sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$$

definieren so, dass für $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\omega + 2k\pi) = c(\vec{x},\vec{y}) \wedge \sin(\omega + 2k\pi) = s(\vec{x},\vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \angle_o(\vec{x},\vec{y}) = \omega$$

Wenn wir von einem *Winkel* ω und seinem Cosinus und Sinus sprechen, ist das in diesem Sinne zu verstehen. Man kann nun alles beweisen, was man so braucht. Insbesondre hat man zu gegebener positiv orientierter ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$|\vec{x}| = 1 \Leftrightarrow \exists\omega.\ \vec{x} = \cos\omega\,\vec{e}_1 + \sin\omega\,\vec{e}_2$$

und ω ist dabei bis auf Addition von $2k\pi$ eindeutig bestimmt und man hat bijektive Abbildungen

$$\cos : [0,\pi] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1,1], \quad \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1,1]$$

Zum Beweis: Mithilfe der Winkelaxiome sehen wir, dass man zu jedem Winkel $\angle\vec{u}, \vec{v}$ einen eindeutig bestimmten betrags- und orientierungsgleichen Winkel $\angle\vec{e}_1, \vec{x}$ mit $|\vec{x}| = 1$ findet. Wir definieren nun im Falle $o(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ das Winkelmaß als die Bogenlänge des Kreisbogens

$$\angle_o(\vec{u}, \vec{v}) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}| \mid \vec{x}_0 = \vec{e}_1,\ \vec{x}_n = \vec{x},\ |\vec{x}_i| = 1 \wedge o(\vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i) = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

$$\angle_o(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \exists\lambda > 0.\ \vec{v} = \lambda\vec{u} \\ \pi & \text{falls } \exists\lambda < 0.\ \vec{v} = \lambda\vec{u} \\ \angle_o(\vec{u}, -\vec{v}) + \pi & \text{falls } o(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \end{cases}$$

Es ist zu zeigen, dass sich jede Zahl in $[0, 2\pi)$ liegt, als Maß eines Winkels ergibt. Das macht man zunächst für Summe von Zahlen $\frac{\pi}{2^k}$, indem man die passenden Winkel durch Halbierung konstruiert. Die restlichen ergeben sich dann durch Intervallschachtelung.

1.3 Determinants in 2-space

1.3.1 Bilinear forms

Let V be a K-vector space. A *bilinear form* Φ associates with each pair $\vec{x}, \vec{y}$ of vectors in V a scalar $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) \in K$ such that for all $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{z} \in V$

- $\Phi(\vec{x} + \vec{u}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(\vec{u}, \vec{y}), \ \ \Phi(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(\vec{x}, \vec{z})$
- $\Phi(r\vec{x}, \vec{y}) = r\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, r\vec{y})$

It is *symplectic* if

- $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \quad \text{for all } \vec{x} \in V$

It follows for symplectic bilinear forms

- $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, r\vec{x} + \vec{y}) = \Phi(\vec{x} + s\vec{y}, \vec{y})$ *invariance under shearing*
- $\Phi(\vec{y}, \vec{x}) = -\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ *skew symmetry*
- $\Phi(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2,\ y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

Indeed, $\Phi(\vec{x}, r\vec{x}+\vec{y}) = \Phi(\vec{x}, r\vec{x}) + \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = r \cdot 0 + \Phi(\vec{x}, \vec{y})$ and similarly for shearing in the first argument. Now, $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}) + \Phi(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = 0$.

Finally, $\Phi(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2,\ y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2) = \Phi(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2,\ y_1\vec{a}_1) + \Phi(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2,\ y_2\vec{a}_2) = \Phi(x_1\vec{a}_1,\ y_1\vec{a}_1) + \Phi(x_2\vec{a}_2,\ y_1\vec{a}_1) + \Phi(x_1\vec{a}_1,\ y_2\vec{a}_2) + \Phi(x_2\vec{a}_2,\ y_2\vec{a}_2) = x_1y_1\Phi(\vec{a}_1,\ \vec{a}_1) + x_2, y_1\Phi(\vec{a}_2,\ \vec{a}_1) + x_1y_2\Phi(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2) + x_2y_2\Phi(\vec{a}_2,\ \vec{a}_2) = x_1y_2\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + x_2y_1\Phi(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = (x_1y_2 - x_2y_1)\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ □

A *determinant form* on a 2-dimensional vector space is a symplectic bilinear form Φ such that $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ for some $\vec{x}, \vec{y}$.

Lemma 1.3.1 *Let $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ be a basis of V and $c \in K$. Then there is a unique symplectic bilinear form such that $\Phi(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = c$. Φ is an determinant form if and only if $c \neq 0$. For such, $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ if and only if $\vec{x}, \vec{y}$ are linearly dependent.*

Proof. We have verified uniqueness. For existence define $\Phi(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2,\ y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2) = c(x_1y_2 - x_2y_1)$ and verify the axioms. If $c = 0$ then $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ for all $\vec{x}, \vec{y}$. Now, assume $c \neq 0$. Then $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ implies $x_1y_2 = x_2y_1$ whence e.g. $\vec{y} = \frac{y_2}{x_2}\vec{x}$ if $x_2 \neq 0$. □

1.3.2 Orientation of planes

Back to space of elementary geometry, let ε be a plane and fix a normal vector $\vec{n}$ of ε. Then the *positive orientation* of the plane w.r.t. $\vec{n}$ can be given by the following *rule of the right hand*: The pair $\vec{a}, \vec{b}$ of independent vectors in ε is *positively oriented*, if one can put (without serious damage) the fingers of the right hand such that the thumb has direction $\vec{n}$, the fore finger is straight and has direction $\vec{a}$, and the middle finger has direction $\vec{b}$. One also can put a cuckoo clock on the side of the plane where $\vec{n}$ sits and take orientation counter clock wise. Or replace the normal vector by a wire with current in direction $\vec{n}$ and use the orientation of the associated electro-magnetic field. Anyway, physicist know how to do these things.

Independent vectors which are not positively oriented are *negatively oriented* (which can be verified taking the left hand). $\vec{a}, \vec{b}$ are positively oriented if and only if $\vec{b}, \vec{a}$ are negatively oriented.

We get the *opposite* orientation, doing everything the other way round, so that what is positive in one is negative in the other and vice versa.

1.3.3 Determinants in planes

Now, in addition to orientation of $\mathcal{V}_\varepsilon$, assume we have a measure of area defined on the plane (subject to suitable axioms). If also a unit of length is given, we suppose that a square with sides of length 1 has area 1.

Given vectors $\vec{a}, \vec{b}$ let A be the area of the parallelogram(s) $P, \vec{a}+P,\ \vec{b}+P,\ \vec{a}+\vec{b}+P$ spanned by $\vec{a}, \vec{b}$ (not depending on P) and define the *determinant* or *oriented area* as

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} A & \text{if } \vec{a}, \vec{b} \text{ positively oriented} \\ -A & \text{if } \vec{a}, \vec{b} \text{ negatively oriented} \\ 0 & \text{if } \vec{a}, \vec{b} \text{ linearly dependent} \end{cases}$$

Principle 1.3.2 det *is a symplectic bilinear form on* $\mathcal{V}_\varepsilon$ *and*

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \textit{ for each positively oriented ON-basis } \vec{e}_1.\vec{e}_2$$

To recall, we have invariance under shearing and the axioms (D1)-(D3)

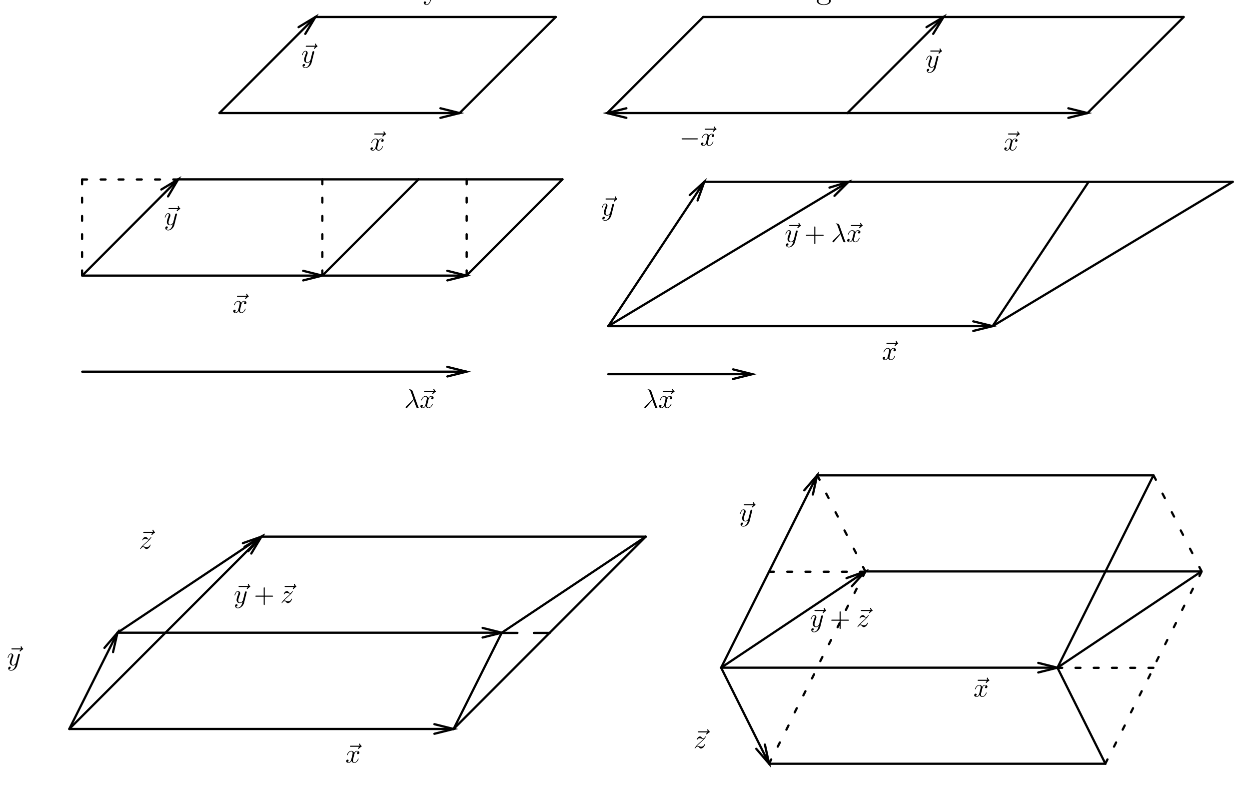
$$\det(\vec{a}, \vec{b} + r\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a} + s\vec{b}, \vec{b})$$

$$(D1) \quad \det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c}), \ \det(\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{b}, \vec{a}) + \det(\vec{c}, \vec{a})$$

$$(D2) \quad \det(\vec{a}, r\vec{b}) = r \det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(r\vec{a}, \vec{b})$$

$$(D3) \quad \det(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \qquad \text{whence } \det(\vec{b}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{b})$$

Of course, no formal proof is possible, here, since we did not elaborate on the concept of orientation. The figures may suffice. Invariance under shearing can be seen directly and then used when dealing with addition.



Moreover, in coordinates with respect to a positively oriented ON-basis α we have

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{for } \vec{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

One can show that measure of area and of length are related as expected. W.r.t an ON-basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ of an euclidean vector space V, a determinant form Φ is *normed* if

(D4) $\Phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$.

Lemma 1.3.3 *For any normed determinant form on a 2-dimensional euclidean vector space*

$$|\det(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} - \frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \vec{a}| = \textit{ baseline times height.}$$

In particular, $|\det(\vec{a}, \vec{b})| = 1$ *for each ON-basis* $\vec{a}, \vec{b}$.

Proof. Recall that the component of $\vec{b}$ in direction of $\vec{a}$ does not depend on the length of $\vec{a}$ and has to be multiplied with r if $\vec{b}$ is replaced by $r\vec{b}$. Thus, with $\vec{a}' = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ and $\vec{b}' = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ we have

$$|\Phi(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}||\vec{b}||\Phi(\vec{a}', \vec{b}')|, \quad |\vec{a}||\vec{b} - \frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \vec{a}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot |\vec{a}'||\vec{b}' - \frac{\langle \vec{a}' \,|\, \vec{b}' \rangle}{|\vec{a}'|^2} \vec{a}'|$$

whence w.l.o.g. (without loss of generality) we may assume $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Now, use coordinates w.r.t. the given positively oriented ON-basis and let $c = \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Then $|\vec{b} - c\vec{a}|^2 = (b_1 - ca_1)^2 + (b_2 - ca_2)^2 = b_1^2 - 2ca_1 b_1 + c^2 a_1^2 + b_1^2 - 2ca_2 b_2 + c^2 a_2^2 = 1 - 2c(a_1 b_1 + a_2 b_2) + c^2 = 1 - c^2$. It follows $\Phi(\vec{a}, \vec{b})^2 - |\vec{b} - c\vec{a}|^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 - 1 = a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 - 1 = a_1^2(b_1^2 + b_2^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2) - 1 = a_1^2 + a_2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. $\square$

Thus, det depends on the choice of orientation and unit of length. Conversely, these two data can be given by choosing a basis of two orthogonal vectors of equal length and requiring that to be a positively oriented ON-basis. Doing so, we have uniquely determined scalar product and normed determinant form which we call *the determinant* det.

Corollary 1.3.4 *There are exactly 2 orientations of a plane. Measurement of area of parallelograms in the plane is unique up to scaling. For a plane, there is a 1-1-correspondence between pairs consisting of an orientation and a measure of area on one side and determinant forms on the other.*

$$\vec{a}, \vec{b} \left\{ \begin{array}{l} \textit{positively oriented} \\ \textit{negatively oriented} \\ \textit{linearly dependent} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array} \right.$$

$$\textit{area of parallelogram}(\vec{a}, \vec{b}) = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

In particular, given the scalar product, there are exactly 2 normed determinant forms.

Proof. Each such pair determines a determinant form as constructed above. And any two such forms Φ_i are related via some $c \neq 0$ by $\Phi_1 = c\Phi_2$. They yield the same orientation if $c > 0$, the opposite if $c < 0$. The measures of area are related via the scaling factor $|c|$. $\square$

1.4 Vector product in 3-space

1.4.1 Abstract cross products

Let V be a vector space. Consider a binary operation $\times$ on V which associates with each pair $\vec{a}, \vec{b}$ of vectors in V a vector $\vec{a} \times \vec{b} \in V$ such that (G stands for *Grassmann*)

(G1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(G3) $r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$

(G4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \ \ (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

As for symplectic bilinear forms one derives

(G2) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

(G5) $\vec{a} \times (\vec{b} + r\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a} + s\vec{b}) \times \vec{b}$ *invariance under shearing*

Also it suffices to know such operation on pairs of basis vectors. In particular assume we have a basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ of V such that

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

then one can compute $\times$ in terms of coordinates

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 \vec{e}_3 + b_1 a_3 \vec{e}_2 + a_2 b_3 \vec{e}_1 - a_3 b_2 \vec{e}_1 - b_3 a_1 \vec{e}_2 - a_2 b_1 \vec{e}_3$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^\alpha = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{for } \vec{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Proof by expanding terms. Conversely, one may use this formula to define $\times$ and verify the axioms. There are more reasonable things to do! $\square$

1.4.2 Orientation in space

In space, chirality is an intrinsic property of various kinds of objects. This allows to distinguish one of the two possible orientations as the positive one: we say that the triplet $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ of independent vectors is *positively oriented* if if one can put the fingers of the right hand such that the thumb has direction $\vec{n}$, the fore finger is straight and has direction $\vec{a}$, and the middle finger has direction $\vec{b}$. The angle between thumb and fore finger is allowed to be up to 180^o - which might cause serious damage. Otherweise, they are *negatively* oriented.

- If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are psoitively oriented, then so are $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ and $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ while $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$, $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$, and $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ are negatively oriented.

Of course. there is again the opposite orientation. That these two exist but no others can be shown using determinants for vectors in space.

1.4.3 Vector product in space

Consider space with positive orientation and scalar product. We define the *vector, exterior* or *cross products* $\vec{a}\times\vec{b}$ of vectors $\vec{a},\vec{b}$ in space by the following conditions

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b},\quad \vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b} \text{ is positively oriented, and } |\vec{a}\times\vec{b}| = |det(\vec{a},\vec{b})|,.$$

Here, $\det(\vec{a},\vec{b})$ refers to one of the two normed determinant forms in the vectorial plane spanned by $\vec{a},\vec{b}$ and is 0 if $\vec{a},\vec{b}$ are linearly dependent.

Principle 1.4.1 *The vector product is well defined and satisfies (G1)-(G4).*

Let $\vec{a},\vec{b}$ be independent. By the Gram-Schmidt process we find a vector $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{b}$. If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ is not positively oriented then so is $\vec{a},\vec{b},-\vec{c}$. Scaling with $det(\vec{a},\vec{b})|\vec{c}|^{-1}$ we obtain $\vec{a}\times\vec{b}$. If we have $\vec{d}$ satsifying the conditions, then $\vec{d}$ has the same direction being orthogonal to $\vec{a},\vec{b}$ and has the proper length whence $\vec{d}=\pm(\vec{a}\times\vec{b})$. Equality follows by orientation.

(G1) holds by definition, (G2) follows from the fact that $\vec{b},\vec{a},-(\vec{a}\times\vec{b})$ is positively oriented, (G2) from (D2). Also, we have invariance under shearing since $\det(\vec{a},\vec{b})$, the normal vector, and orientation remain invariant.

In the proof of the first distributive law we may assume, $|\vec{a}|=1$. Due to shearing invariance. we may assume $\vec{b}\perp\vec{a}$ and $\vec{c}\perp\vec{a}$. Thus, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are in the vectorial plane with normal vector $\vec{a}$ and one obtains $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$ in this plane from b, $\vec{c}$ und $\vec{b}+\vec{c}$ by a 90^o rotation. The second law follows from the first using (G2). □

Corollary 1.4.2 *For each positively oriented ON-basis $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ we have*

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3, & \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1, & \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\times\vec{e}_1=-\vec{e}_3, & \vec{e}_3\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1, & \vec{e}_1\times\vec{e}_2=-\vec{e}_2 \end{array}$$

1.4.4 Grassmann expansion

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}}$$

Proof. Scalar and vector products are compatible with addition and multiplication with scalars. Hence, validtity of the formula is preserved under forming linear combinations. E.g. from $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}$ and $(\vec{a}'\times\vec{b})\times\vec{c}=\langle\vec{a}'\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}'$ for given vectors $\vec{a},\vec{a}',\vec{b},\vec{c}$ one can deduce $(r\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=r\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle r\vec{a}$ and $((\vec{a}+\vec{a}')\times\vec{b})\times\vec{c}=\langle\vec{a}+\vec{a}'\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle(\vec{a}+\vec{a}')$.

Indeed, $(r\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(r(\vec{a}\times\vec{b}))\times\vec{c}=r((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})=r(\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a})=r\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-r\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}=r\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle(r\vec{a})=\langle r\vec{a}\,|\,\vec{b}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle r\vec{a}$ and $((\vec{a}+\vec{a}')\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}'\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{a}'\times\vec{b})\times\vec{c}=\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}+\langle\vec{a}'\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle\vec{a}'=(\langle\vec{a}\,|\,\vec{c}\rangle+\langle\vec{a}'\,|\,\vec{c}\rangle)\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle(\vec{a}+\vec{a}')=\langle\vec{a}+\vec{a}'\,|\,\vec{c}\rangle\vec{b}-\langle\vec{b}\,|\,\vec{c}\rangle(\vec{a}+\vec{a}')$. In the same way one proceeds with linear combinations of $\vec{b}$'s and $\vec{c}$'s respectively.

If $\vec{a}, \vec{b}$ are linearly dependent, e.g. $\vec{b} = r\vec{a}$, one obtains $\vec{0}$ on both sides, immediately. Otherwise, $\vec{c}$ is a linear combination of $\vec{a}$, $\vec{b}$, and $\vec{a} \times \vec{b}$. Thus, we only have to consider the case that $\vec{c}$ is one of these vectors. In addition, we may assume that $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. If $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ then both sides yield $\vec{0}$. immediately. Now, let $\vec{c} = \vec{a}$. Then $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ is in the plane $\perp \vec{a} \times \vec{b}$ which is spanned by $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{d}$ is orthogonal to $\vec{a}$. The length of $\vec{d}$ is the area of the parallelogram spanned by $\vec{a}$ and $\vec{b}$ which equals the height since $|\vec{a}| = 1$. It follows that $\vec{d} = \pm(\vec{b} - \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{a})$. Orientation yields equality proving the formula in this case. The case $\vec{c} = \vec{b}$ isc analogous, just orientations are reverted. $\square$

Alternative proof: If suffices to consider the case that $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are vectors from a positively oriented ON-basis. If $\vec{b} = \pm\vec{a}$, then $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, whence $LS = \vec{0} = RS$. Assume $\vec{a} \neq \pm\vec{b}$. Then $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ is a positively oriented ON-basis and $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}$ or $\vec{c} = \pm\vec{a} \times \vec{b}$. If $\vec{c} = \vec{a}$, then $LS = \vec{b}$, since $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ is positively oriented (cyclic permutation!), and $RS = \vec{b}$, since $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 1, \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$. If $\vec{c} = \vec{b}$ then $LS = -\vec{a}$, since $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}, \vec{a}$ is negatively oriented, and $RS = -\vec{a}$, since $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle = 0, \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle = 1$. If $\vec{c} = \pm\vec{a} \times \vec{b}$, then

$LS = \vec{0}$ and $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle = 0$, whence also $RS = \vec{0}$. $\square$ It follows using the formula or by a similar argument

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \quad \textit{Jacobi}$$

1.4.5 Vector product and homogeneous planar coordinates

Considering a fixed plane ε in space and point $Z \notin \varepsilon$ we may describe a line in ε as the intersection of a plane π through Z not parallel ε. And we may describe π by a normal vector $\vec{n}$, unique up to scaling.

- If the vectors $\vec{x}, \vec{y}$ describe distinct points P, Q on ε then $\vec{x} \times \vec{y}$ describes the line through PQ

- If the vectors $\vec{n}, \vec{m}$ lines l, g on ε then $l \parallel g$ if and only if $\vec{n} \times \vec{m} \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Otherwise, $\vec{n} \times \vec{m}$ describes the intersection point of l and g.

Indeed, since $\vec{n} \times \vec{m}$ is orthogonal to both $\vec{n}$ and $\vec{m}$, the point $\vec{n} \times \vec{m} + Z$ is on π as well as on the plane η through Z and g. Thus, the line h through Z and $\vec{n} \times \vec{m} + Z$ is in both planes. And $\vec{n} \times \vec{m} \notin \mathcal{V}_\varepsilon$ if and only if h meets ε if and only if l and g meet. And then the intersection points coincide. $\square$

1.5 Determinants in 3-space

1.5.1 Multilinear maps

Let K be a field , V and W K-vector spaces. Fix n and consider a map

$$\Phi : V \times \ldots \times V \to W, \quad \Phi(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \in W \text{ for } \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$$

Φ is *multilinear* of *n-linear* if it is *linear in each argument*, i.e. if for all $i = 1, \ldots, n$, $\vec{v}_j \in V (j \neq i)$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$, and $r \in K$

- $\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x} + \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) =$
  $= \Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) + \Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$
- $\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, r\vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = r\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n)$

If $W = K$, then such Φ is a *multilinear form.* Φ is *alternating* provided that it yields value $\vec{0}$ whenever two entries are equal, i.e. if for all $i < j$, $\vec{v}_k \in V(k \neq i, j)$, and $x \in V$

- $\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = 0$

Corollary 1.5.1 *Scalar products are 2-linear forms. Determinant forms are alternating 2-linear forms. Vector product in 3-space $\mathcal{V}$ is an alternating 2-linear map.*

With the same kind of proof as in these examples one obtains the following.

Corollary 1.5.2 *Let Φ be an n-linear map and let $\vec{e}_1 \ldots, \vec{e}_m$ in V. For $\vec{x}_i \in V$ let*

$$\vec{x}_i = x_{1i}\vec{e}_1 + \ldots + x_{mi}\vec{e}_m$$

Then

$$(*)\ \Phi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in m^n} x_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)n} \cdot \Phi(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)})$$

where m^n is the set of all maps $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$. In particular, a multilinear map is uniquely determined by the values one gets by plugging in basis vectors, only.

Conversely, given these values one can use $(*)$ to define a multilinear map. Obvioulsy, each summand is multilinear. Then so is the sum by the following observation:

- If the $\Phi_i : V^n \to W$ are multilinear, then so is any linear combination

$$\Phi(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)) = \sum_{l=1}^{m} r_l \Phi_l(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n))$$

Corollary 1.5.3 *If Φ is an alternating multilinear form, then Φ is* invariant under shearing *and* sign varying

$$\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{y}+r\vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = \Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots$$

$$\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = -\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{y}, \vec{v}_{i+1}, \ldots,$$

If $1 + 1 \neq 0$ in K and if Φ is multilinear an sign varying, thhen Φ is alternating.

The first two claims are clear by examples done. For the third, observe that

$$\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) = -\Phi(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{x}, \vec{v}_{i+1}, \ldots,$$

1.5.2 Determinants in space

Lemma 1.5.4 *Given a vector space with basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ and $c \in K$ there is at most one alternating 3-linear form Φ such that $\Phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = c$. For each such we have*

(1) $$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \quad & (x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \\ & -x_{31}x_{22}x_{13} - x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{12}x_{33})c\end{aligned}$$

(2) $\Phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \Phi(\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_1) = \Phi(\vec{x}_3, \vec{x}_1, \vec{x}_2) =$
$= -\Phi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \vec{x}_3) = -\Phi(\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1) = -\Phi(\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_2)$

(3) If $c \neq 0$ *then* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ *are linearly dependent if and only if* $\Phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = 9$

Conversely, one define Φ as in (1). Clearly, Φ is multilinear. To verify that Φ is alternating is rather tedious.

Proof. (2) is immediate by change of sign. In (1) use $(*)$ for $n = 3$ and that by alternation $\Phi(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}) = 0$ if σ is not a permutation. Now, let $c \neq 0$. If say $\vec{x}_3$ is a linear combination of $\vec{x}_1$ and $\vec{x}_2$, then by shearing we may replace $\vec{x}_3$ by $\vec{0}$ without changing the value, and get 0 since $\vec{0} = 0 \cdot \vec{0}$. Conversely, assume that $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ are independent. Then they form a basis. Assuming $\Phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = 0$ we would get $c = 0$ applying the first result to this basis. □

Let V be a 3-dimensional euclidean vector space with an abstract cross product $\times$ and an orthonormal basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ such that $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ then we say that

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \rangle$$

is the associated *determinant.*

Lemma 1.5.5 *Under this proviso,* det *is an alternating 3-linear form on V.*

Proof. Multilinearity is immediate: we substitute a single vector product into a scalar product and both are multilinear. We show that det is sign varying. Clearly, $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ since $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Consider the two multilinear forms $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ and $et(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$ and verify that they conincide on the given basis. Thus, they coincide everywhere. Now derive the remaing variations of sign as in (2). □

We now can define *volume* of the spar (parallelepiped) spanned by $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and *orientation*

$$\text{volume}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) | \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \left\{ \begin{array}{l} \text{positively oriented} \\ \text{negatively oriented} \\ \text{linearly dependent} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{array} \right.$$

In particular, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ are positvely oriented and span a cube of volume 1. Using Grassmann expansion one can show

$$\langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle \langle \vec{b} \mid \vec{d} \rangle - \langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle \langle \vec{a} \mid \vec{d} \rangle \ \textit{Lagrange}.$$

1.5.3 Computation of determinants and Product Theorem

We consider 3-space. Analoguous results hold (with easier proofs) in the plane. Recall that

- $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \mid \vec{a}_3 \rangle$
- $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ is linear in each argument $\vec{a}_i$
- $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ is 0 if two arguments $\vec{a}_i$ and $\vec{a}_j$ are equal
- $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ changes sign if two arguments $\vec{a}_i$ and $\vec{a}_j$ are interchanged
- $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 1$ if $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ is a positively oriented ON-basis

Given a basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ let

$$\vec{a}_i = \sum_j a_{ij} \vec{b}_j$$

Then

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \sum_{j_1, j_2, j_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \det(\vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{j_2}, \vec{b}_{j_3})$$

Now let $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ with $\sigma(i) = j_i$ and define

$$\mathsf{sign}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma \notin S_3 \\ -1 & \text{if } \sigma \text{ transposition} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

Then

$$\det(\vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{j_2}, \vec{b}_{j_3}) = \mathsf{sign}(\sigma) \cdot \det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

It follows

$$(*) \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathsf{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} a_{3\sigma 3} \cdot \det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

In particular, if $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ is a positively oriented ON-basis then one has the *Sarrus* formula

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \sum_{\sigma \in S_3} a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} a_{3\sigma 3} \quad \text{where } \vec{a}_i = \sum_j a_{ij} \vec{b}_j$$

With $\vec{b}_i = \sum_j b_{ij} \vec{e}_j$ and identifyin 3-space with $\mathbb{R}^3$ w.r.t. a positively oriented ON-basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ it follows

$$\det A \cdot \det B = \det(A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3) = \det(AB)$$

1.5.4 Geometric properties of vector products and determinants

Again, let V an euclidean vector space with ON-basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ and abstract cross product such that $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ and let $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \rangle$. Define orientation as above. Then

(1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ is positively oriented if $\vec{a}, \vec{b}$ are independent

(3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |det(\vec{a}, \vec{b})|$

(4) $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \text{area}(\vec{a}, \vec{b}) \cdot |\langle \vec{n} \mid \vec{c} \rangle|$ where $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{b},\ |\vec{n}| = 1$

Proof. (1) holds since det is alternating. Let $\vec{a}, \vec{b}$ be independent. Assume that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Choose $\vec{c}$ such that $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ form a basis. Then in the expansion $(*)$ all terms containing both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ vanish (due to shearing). But so do the terms containing any vector twice. Hence det would yield $\vec{0}$, always - a contradiction. Thus $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ and $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 > 0$.

(3): If $\vec{a}, \vec{b}$ are dependent, then we have 0 on both sides. Otherwise, choose $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{b}$ with $|\vec{n}| = 1$. Then $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})|$ since $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{n}$. . On the other hand, $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{n})$ defines a determinant on $\mathsf{Span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ and we are done. $\square$.

1.5.5 Survey of products

Scalar times vector yields a vector: $r\vec{a}$. Usual laws of multiplication but only one vector may occur and the is no division by vectors. Only the cancellation rule : $r\vec{a} = r\vec{b}$ implies $\vec{a} = \vec{b}$ if $r \neq 0$; and $r\vec{a} = s\vec{a}$ implies $r = s$ if $\vec{a} \neq \vec{0}$.

The scalar product of two vectors is a scalar: $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$. An associatice law $\vec{a}\langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \vec{c}$ is availabe only if $\vec{a}$ and $\vec{c}$ are parallel. Neither cancellation of vectors nor division are allowed: $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle$ implies only that $\vec{a}$ is otthogonal to $\vec{b} - \vec{c}$. But, one has commutativity and distributivity.

The vectorproduct ot two vectors is a vector: $\vec{a} \times \vec{b}$. Only 3-space has this feature. In place of commutativity and associativity we have change of sign, and Grassmann expansion. But distributivity holds. From $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ one can conclude, only, that $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are dependent.

The determinant of three (two) vectors is a scalar. Multilinearity is a kind of distributive law. $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ implies only that $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ is dependent.

For all these products $*$ we have the following law where r is a scalar:

$$r(x * y) = (rx) * y = x * (ry)$$

1.5.6 Reciprocal basis

Consider 3-space $\mathcal{V}$ of vectors with scalar and vector product and determinant. For a basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ the *reciprocal* (in physics: *dual*) basis (we shall see that this is a basis, indeed) is given as

$$\vec{a}_1{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}\vec{a}_2\times\vec{a}_3, \quad \vec{a}_2{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}\vec{a}_3\times\vec{a}_1. \quad \vec{a}_3{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}\vec{a}_1\times\vec{a}_2$$

If the basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ defines a (crystal) lattice $\{\sum_i z^i \vec{a}_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$ then the vector $\vec{a}_j{}'$ is orthogonal to the planes having $\vec{a}_i, \vec{a}_k$ as direction vectors. If such a plane contains a lattice point (whence infinitely many) its is called a *lattice plane*. The distance of two neighbouring such is the hight of the primitive cell (spar), i.e. volume/(area of base facett) $= 1/|\vec{a}_j{}'|$.

Theorem 1.5.6 *Let $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a ON-basis and*

$$F : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}, \quad F(\vec{e}_i^*) = \vec{e}_i$$

the isomorphism matchin the bases. Then

$$\phi(\vec{x}) = \langle F(\phi) \,|\, \vec{x}\rangle \quad \text{for all } \vec{x} \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{V}^*$$

Moreover for any basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ von $\mathcal{V}$

$$F(\vec{a}_i^*) = \vec{a}_i{}'$$

i.e. the dual baais is matvhed with the reciprocal basis. If the columns of A are the coordinates of the $\vec{a}_i$, then the colums of $A^{-t} = (A^{-1})^t$ are the coordintes of the $\vec{a}_j{}'$ - w.r.t. the basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ and one has

$$A^{-t}A = E$$

whence

$$\langle \vec{a}_i{}' \,|\, \vec{a}_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}, \quad \det(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}') = \frac{1}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}$$

Moreover, $\vec{a}_i{}'' = \vec{a}_i$; as well as $\vec{a}_i{}' = \vec{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ if and only if $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ is an ON-basis.

Proof. The first identity is linear in all arguments, thus it suffices to check for substituions of $\vec{e}_j$ and $\vec{e}_i^*$

$$\vec{e}_j^*(\vec{e}_i) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{array}\right\} = \langle \vec{e}_j \,|\, \vec{e}_i\rangle = \langle F(\vec{e}_j^*) \,|\, \vec{e}_i\rangle$$

It follows

$$\langle F(\vec{a}_j^*) \,|\, \vec{a}_i\rangle = \vec{a}_j^*(\vec{a}_i) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{array}\right\}$$

It follows $F(\vec{a}_j^*) = r_j \vec{a}_j{}'$ whence

$$1 = \langle r_j \vec{a}_j{}' \,|\, \vec{a}_j\rangle = \frac{r_j}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3) = r_j$$

The rows of A^{-1} are the coordinates of the $\vec{a}_j^*$ whence of the $F(\vec{a}_j^*)$; i.e. the colums of A^{-t} are the coordinates of the $\vec{a}_j{}'$. $\Box$

Kapitel 2

Homogeneous coordinates and projective space

Homogeneous coordinates provide a more convenient way to describe objects in affine spaces. In particular, transformation formulas appear as special cases of transformation formulas of the linear case.

The idea behind comes from central prespective drawing: Given a plane $\mathbb{P}$ in 3-space and a center Z not on $\mathbb{P}$, there is a 1-1-correspondence between points P on $\mathbb{P}$ and lines l through Z with $l \not\parallel \mathbb{P}$: $P = l \cap \mathbb{P}$.

Lines $l \parallel \mathbb{P}$ may be interpreted as *points at infinity* added to the plane $\mathbb{P}$. This turns the affine plane $\mathbb{P}$ into a *projective plane*.

2.1 Projective description of hyperplanes and affine maps

2.1.1 Affine hyperplanes

For an $n+1$-dimensional affine space $(\mathbb{P}^+, V^+)$, a *hyperplane* is an affine subspace of the form

$$\mathbb{P} = V + O \;\text{ where }\; \dim V = n$$

Observe that every affine subspace $V + O$ of an affine space is an affine space $(V+O, V)$ canonically. Conversely, every affine space can be considered arising is this way from a space of higher dimension. This will be the situation referred to in this chapter.

Lemma 2.1.1 *Given an n-dimensional affine space $(\mathbb{P}, V)$ over K, there is an $n+1$-dimensional vector space V^+ having V as a subspace and an affine space $(\mathbb{P}^+, V^+)$ having $\mathbb{P}$ as a hyperplane $V + O$. If V is euclidean then V^+ may be choosen euclidean.*

Proof. We may assume $\mathbb{P} = V = \{0\} \times K^n$ Just choose $\mathbb{P}^= V^+ = K^{n+1}$. In the euclidean case we have $K = \mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^{n+1}$ with the canonical scalar product.□

Alternatively, for those who prefer unflexible notation:

$$V = \{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K,\ x_0 = 0\},\quad \mathbb{P} = \{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K,\ x_0 = 1\}$$

Also, quite often you will find x_{n+1} in place of x_0.

2.1.2 Intersection of lines and hyperplanes

Lemma 2.1.2 *If $\mathbb{P} + O$ is a hyperplane of $(\mathbb{P}^+, V^+)$ and $Z \in \mathbb{P}^+$ a point $\notin \mathbb{P}$, then*

$$\mathbb{P} \cap (\mathsf{span}\{\vec{x}\} + Z) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \vec{x} \notin V$$

For $\vec{x} \notin V$ there is a unique intersection point S

$$\{S\} = \mathbb{P} \cap (\mathsf{span}\{\vec{x}\} + Z)$$

and any $S \in \mathbb{P}$ occurs.

Proof. If $\vec{x} \notin V$ and if one adds $\vec{x}$ to a basis of V, then one obtains a $\dim V^+$-element independent set, whence a basis of V^+. Thus, each vector of V^+ can be uniquely represented as $\vec{u} + r\vec{x}$ with $\vec{u} \in V$ and $r \in K$. In particular, $\overrightarrow{ZO} = \vec{u} + r\vec{x}$. It follows

$$S = r\vec{x} + Z = -\vec{u} + O \in \mathbb{P} \cap (\mathsf{span}\{\vec{x}\} + Z).$$

If $P \in \mathbb{P} \cap (\mathsf{span}\{\vec{x}\} + Z)$ then $P = s\vec{x} + Z = \vec{w} + O$ with $\vec{w} \in V$ and it follows $\overrightarrow{ZO} = -\vec{w} + s\vec{x}$ whence $\vec{w} = -\vec{u}$ and $s = r$ by uniqueness. If $S \in \mathbb{P}$ is given, put $\vec{x} = \overrightarrow{ZS}$, then $\vec{x} \notin V$ since $Z \notin \mathbb{P}$.

If $\vec{x} \in V$, then $r\vec{x} + Z = \vec{u} + O$ with $\vec{u} \in V$ implies $\overrightarrow{OZ} = \vec{u} - r\vec{x} \in V$ whence $Z \in \mathbb{P}$, a contradiction. $\square$.

2.1.3 Projective description of hyperplanes

Vectors $\vec{x}, \vec{y} \in V^+ \setminus \{\vec{0}\}$ are *projectively equivalent*,

$$\vec{x} \sim \vec{y}, \quad \text{if } \vec{y} = r\vec{x} \text{ for some } r \in K$$

Obviuosly, $\sim$ is an equivalence relation on $V^+ \setminus \{\vec{0}\}$:

- $\vec{x} \sim \vec{x}$
- $\vec{x} \sim \vec{y}$ implies $\vec{y} \sim \vec{x}$
- $\vec{x} \sim \vec{y}$ and $\vec{y} \sim \vec{z}$ imply $\vec{x} \sim \vec{z}$.

Lemma 2.1.3 *Given a point $Z \notin \mathbb{P}$. there is a uniquely determined surjective map*

$$\pi : V^+ \setminus V \to \mathbb{P}, \quad \textit{such that } \vec{x} \sim \overrightarrow{Z\,\pi\vec{x}}$$

and one has

$$\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{Spann}\,\{\vec{x}\} + Z = \mathsf{Spann}\,\{\vec{y}\} + Z \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \sim \vec{y}$$

π is the *central projection* of $V^+ \setminus V'$ onto $\mathbb{P}$ with *center* Z. Proof. For any $\vec{x} \notin V$, by Lemma 2.1.2 there is a uniquely determined intersection point $P = r\vec{x} + Z$ and we put $\pi(\vec{x}) = P$. $\square$.

2.1.4 Points and lines in the euclidean plane

Considering a fixed plane ε in euclidean 3-space and point $Z \notin \varepsilon$ we may describe a line in ε as the intersection of a plane π through Z not parallel ε. And we may describe π by a normal vector $\vec{n}$, unique up to scaling.

- If the vectors $\vec{x}, \vec{y}$ describe distinct points P, Q on ε then $\vec{x} \times \vec{y}$ describes the line through PQ
- If the vectors $\vec{n}, \vec{m}$ lines l, g on ε then $l \parallel g$ if and only if $\vec{n} \times \vec{m} \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Otherwise, $\vec{n} \times \vec{m}$ describes the intersection point of l and g.

Indeed, since $\vec{n} \times \vec{m}$ is orthogonal to both $\vec{n}$ and $\vec{m}$, the point $\vec{n} \times \vec{m} + Z$ is on π as well as on the plane η through Z and g. Thus, the line h through Z and $\vec{n} \times \vec{m} + Z$ is in both planes. And $\vec{n} \times \vec{m} \notin \mathcal{V}_\varepsilon$ if and only if h meets ε if and only if l and g meet. And then the intersection points coincide. $\square$

2.2 Homogeneous coordinates and transformations

2.2.1 Homogeneous coordinates

Let α be a coordinate system of the affine space $(\mathbb{P}, V)$, i.e. one has origin $O_\alpha \in \mathbb{P}$ and basis $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ of V. Consider $(\mathbb{P}, V)$ a hyperplane of $(\mathbb{P}^+, V^+)$, Choose $Z \notin \mathbb{P}$ and $\vec{e}_0 = \overrightarrow{Z\,O_\alpha}$. Then $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ is a basis $\tilde{\alpha}$ of V^+.

Corollary 2.2.1 *For points $P \in \mathbb{P}$ and vectors $\vec{x} \in V^+ \setminus V$ one has*

$$P = \pi\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad p_i = x_i/x_0 \textit{ for } i = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}^{\tilde{\alpha}} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ P^\alpha \end{pmatrix}$$

where $x_0 \neq 0$

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{x_0}\vec{x} + Z = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n p_i \vec{e}_i \; + Z$$

The columns $\vec{x}^{\tilde{\alpha}}$ are the *homogeneous coordinates* of P w.r.t. α and are unique up to scaling with a factor $r \neq 0$. This provides a correspondence between points P of $\mathbb{P}$ and their homogeneous coordinates, bijective modulo projective equivalence - we write $P^{\tilde{\alpha}}$.

2.2.2 Homogeneous coordinate transformation

Now, let β be another coordinate system of $(\mathbb{P}, V)$, i.e. one has origin $O_\beta \in \mathbb{P}$ and basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ of V. In particular, one has the transformation matrix ${}_\alpha T_\beta$ and

$$ {}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta = (O_\beta)^\alpha = \overrightarrow{O_\alpha\, O_\beta}^\alpha $$

Let $\tilde{\beta} : \vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ the basis of V^+ associated with β, in particular

$$ \vec{v}_0 = \overrightarrow{Z\, O_\beta} $$

Lemma 2.2.2 *For all $P \in \mathbb{P}$*

$$ P^{\tilde{\alpha}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta P^{\tilde{\beta}} \quad \textit{where } {}_\alpha\tilde{T}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ {}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta & {}_\alpha T_\beta \end{pmatrix} $$

Proof. This is immediately clear from the fact that

$$ {}_\alpha\tilde{T}_\beta = {}_{\tilde{\alpha}} T_{\tilde{\beta}} $$

is the transformation matrix for the bases $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$ of V^+. $\square$.

Also, one can reduce this to the known transformation formulas for affine coordinates: Let $\vec{x} = \overrightarrow{Z\,P}$. Then $\vec{x}^{\tilde{\alpha}}$ resp. $\vec{x}^{\tilde{\beta}}$ are homogeneous coordinates of P w.r.t. α resp. β and

$$ {}_\alpha\tilde{T}_\beta \vec{x}^{\tilde{\beta}} = {}_\alpha\tilde{T}_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ P^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ {}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta + {}_\alpha T_\beta P^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ P^\alpha \end{pmatrix} = \vec{x}^{\tilde{\alpha}} \quad \square $$

2.2.3 Affine matrices

The set $\mathsf{AM}(m, n, K)$ of *affine matrices* consists of all matrices in $K^{m+1\,\times\, n+1}$ of the form

$$ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \text{ where } A \in K^{m \times n} \text{ and } \boldsymbol{t} \in K^m,\ \mathbf{0}^* \text{ the zero row } \in K^{n*} $$

Lemma 2.2.3 *The product and inverse of affine matrices, if it exists, is again affine*

$$ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{s} & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{s} + B\boldsymbol{t} & BA \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ -A^{-1}\boldsymbol{t} & A^{-1} \end{pmatrix} $$

In particular, it follows, that the invertible matrices in $\mathsf{AM}(n, n, K)$ form a subgroup of $\mathsf{GL}(n+1, K)$, the *affine group.*

Corollary 2.2.4

$$ {}_\beta\tilde{T}_\alpha = ({}_\alpha\tilde{T}_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ -\,{}_\alpha T_\beta^{-1}\,{}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta & {}_\alpha T_\beta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ -\,{}_\beta T_\alpha\,{}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta & {}_\beta T_\alpha \end{pmatrix} $$

2.3 Affine maps in homogeneous coordinates

2.3.1 Characterization of affine maps

Let $(\mathbb{P}, V)$ and $(\mathbb{P}', V')$ be affine spaces over K considered as hyperplanes in $(\mathbb{P}^+, V^+)$ and $(\mathbb{P}'^+, V'^+)$, respectively. Let $Z \in \mathbb{P}^+ \setminus \mathbb{P}$ and $Z' \in \mathbb{P}'^+ \setminus \mathbb{P}'$.

Lemma 2.3.1 *Let $\psi : V^+ \to V'^+$ be a linear map. The following are equivalent*

(1) $\psi(\overrightarrow{ZP}) + Z' \in \mathbb{P}'$ *for all* $P \in \mathbb{P}$

(2) $\psi(V) \subseteq V'$ *and* $\psi(\overrightarrow{ZO}) + Z' \in \mathbb{P}'$ *for some* $O \in \mathbb{P}$

(3) There is an affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ *such that*
$(*)$ $\psi(\overrightarrow{ZP}) = \overrightarrow{Z'\phi P}$ *for all* $P \in \mathbb{P}$

(4) There is an affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}''$ *such that for some fixed* $O \in \mathbb{P}$
$(**)$ $\psi|V = \phi_0$ *is the linear map associated with* ϕ *and* $\psi(\overrightarrow{ZO}) = \overrightarrow{Z'\phi O}$

Proof. $1 \Rightarrow 2$ is trivial. $2 \Rightarrow 1$: For $P \in \mathbb{P}$ we have $\overrightarrow{OP} \in V$ whence

$$\psi(\overrightarrow{OP}) \in V' \text{ and } \psi(\overrightarrow{ZP}) + Z' = \psi(\overrightarrow{OP}) + \psi(\overrightarrow{Z0}) + Z' \in \mathbb{P}'$$

$1 \Rightarrow 3$: $\phi(P) = \psi(\overrightarrow{OP}) + Z'$ defines an affine map $\mathbb{P}^+ \to \mathbb{P}'^+$ which restricts to a map $\mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ by hypothesis. $3 \Rightarrow 4$:

$$\psi(\overrightarrow{OP}) + \phi O = \psi(\overrightarrow{ZP}) - \psi(\overrightarrow{ZO}) + \phi O = \overrightarrow{Z'\phi P} - \overrightarrow{Z'\phi O} + \phi O = \overrightarrow{Z'\phi P} + Z' = \phi P$$

$4 \Rightarrow 2$ is trivial. $\square$

Corollary 2.3.2 *There is a bijective correspondence, given by* $(*)$ *resp.* $(**)$*, between affine maps* $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ *and linear maps* $\tilde{\phi} = \psi : V^+ \to V'^+$ *satisfying any of (1)-(4).*

Proof. Given ψ, there is ϕ according to the lemma and uniquely determined by (1) resp. (2). Given ϕ, choose $O \in \mathbb{P}$ and a basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ of V to obtain a basis $\overrightarrow{ZO}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ of V^+. Define the linear map $\psi : V^+ \to V'^+$ by $\psi(\vec{v}_i) = \phi_0(\vec{v}_i)$ and $\psi(\overrightarrow{ZO}) = \overrightarrow{Z'\phi O}$. Again, this is uniquely determined. $\square$.

2.3.2 Homogeneous matrix description of affine maps

Given coordinate systems α and β of $(\mathbb{P}, V)$ and $(\mathbb{P}', V')$, respectively, it follows

$$\phi(P)^{\tilde{\beta}} = {}_{\tilde{\beta}}\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}} P^{\tilde{\alpha}} \quad \text{with } {}_{\tilde{\beta}}\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \text{ where } A = {}_{\beta}\phi_{\alpha},\ \boldsymbol{t} = \phi(O_\alpha)^\beta$$

and, conversely, every such matrix description with an affine matrix yields an affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$. In case of 3 dimensions

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ t_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ t_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}$$

As shown for linear maps

- ${}_{\tilde{\gamma}}\widetilde{\psi \circ \phi}_{\tilde{\alpha}} = {}_{\tilde{\gamma}}\tilde{\psi}_{\tilde{\beta}} \cdot {}_{\tilde{\beta}}\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}}$

If $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ with coordinate system α we write $\phi_{\tilde{\alpha}} = {}_{\tilde{\alpha}}\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}}$. We have ϕ invertible if and only if $\tilde{\phi}$ is invertible and for the matrix it follows

- $\widetilde{\phi^{-1}}_{\tilde{\alpha}} = (\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}})^{-1}$,

2.3.3 Transformation

For an affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, considering it as a linear map $V^+ \to V^+$ and applying the transformaton formulas for linear maps, it follows

- $\tilde{\phi}_\alpha = {}_\alpha\tilde{T}_\beta \cdot \tilde{\phi}_\beta \cdot {}_\beta\tilde{T}_\alpha$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{v} & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{t}' & A' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{v} & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{v} + S\boldsymbol{t}' - SA'S^{-1}\boldsymbol{v} & SA'S^{-1} \end{pmatrix}$$

where $S = {}_\alpha T_\beta$

More generally, for an affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ and coordinate systems γ, δ of $\mathbb{P}'$ we have

- ${}_{\tilde{\delta}}\tilde{\phi}_{\tilde{\alpha}} = {}_\delta\tilde{T}_\gamma \cdot {}_{\tilde{\gamma}}\tilde{\phi}_{\tilde{\beta}} \cdot {}_\beta\tilde{T}_\alpha$

2.3.4 Affine coordinate description

Given coordinate systems α resp. β of the affine spaces $\mathbb{P}$ and $\mathbb{P}'$ and an affine map $\mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ from the homogeneous description we can read the following for affine coordinates

$$\boxed{\phi(P)^\beta = \phi(O_\alpha)^\beta + {}_\beta\phi_{0\alpha}P^\alpha}$$

In particular, for $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ and $\alpha = \beta$

$$\phi(P)^\alpha = \vec{t}_\alpha + \phi_{0\alpha}P^\alpha \quad \text{with “translation vector” } \vec{t}_\alpha = \overrightarrow{O_\alpha\phi(O_\alpha)}$$

Corollary 2.3.3 *Let $(\mathbb{P}, V)$ and $(\mathbb{P}', V')$ be affine spaces and $O, P_1, \dots, P_n$ points in $\mathbb{P}$ such that , $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ is a basis of V (.i.e. one gets a coordinate sytsem of $\mathbb{P}$). Let $O', P_1', \dots, P_n'$ be points in $\mathbb{P}'$. Then there is a uniquely determined affine map $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ such that $\phi(O) = O'$, $\phi(P_1) = P_1', \dots, \phi(P_n) = P_n'$. And ϕ has an inverse if and only if $\overrightarrow{O'P_1'}, \dots, \overrightarrow{O'P_n'}$ is a basis of V'.*

2.4 Projective extension of affine spaces

We extend the space by adding points at infinity, an idea due to the artists of renascimento: pencils of parallel lines are in 1-1-correspondence with points at infinity - the lines of the pencil are considered to meet at the associated point at infinity. In a perspective drawing, the image lines of the pencil actually meet at the image of that point. Cf K. Devlin, Mathematics: The Science of Patterns.

2.4.1 Affine incidence planes

We consider a set $\mathbb{P}$ of *points*, a set $\mathbb{L}$ of *lines*, and an *incidence* relation I between points and lines. We write $P\,I\,l$ if P is in relation with l, i.e. incident with l. If the point P is incident with the line l we also say that P is a point of/on l and l a line through P. Points on the same line are *collinear*. Two lines are *parallel* ($l \parallel h$) if they are identical or if they have no point in common. We say that two lines *meet* in a point P if P is the only point they have in common. A *triangle* is a triplet of non-collinear points.

The triplet $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ is an *affine incidence plane* if the follwoing axioms are satisfied

(A1) Given two distinct points there is a unique line through both of these points.

(A2) For any line l and point P there is a unique line $h \parallel l$ through P.

(A3) There are 4 points, no 3 of them collinear

By axiom (A1), non-parallel lines meet in a unique point.

Lemma 2.4.1 *The relation $\parallel$ is an equivalence relation on $\mathbb{L}$.*

Proof. Exercise. □ The *parallel pencils* $\Pi_l = \{h \mid h \parallel l\}$ are the classes of this equivalence relation.

Lemma 2.4.2 *If $(\mathbb{P}, V)$ is an affine space and $\dim V = 2$ then one obtains an affine incidence plane $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ where $\mathbb{L}$ consists of all $U + P$ with $P \in \mathbb{P}$ and U a 1-dimensional subspace of V and where $P\,I\,l \Leftrightarrow P \in l$. Moreover, the parallel pencils are the $\{U + P \mid P \in \mathbb{P}\}$ where U ranges over the 1-dimensional subspaces of V.*

Proof. Exercise. □

2.4.2 Projective planes

A *projective plane* is given by a set $\mathbb{P}^*$ of points, $\mathbb{L}^*$ of lines and an incidence relation I^* between points and lines such that

(P1) Any two distinct points are incident with a unique line.

(P2) Any two distinct lines have a unique point in common.

(P3) There are four points no three of which are collinear.

Proposition 2.4.3 *Let* $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ *be an affine plane and* l^* *the set of all its parallel pencils of lines. Put*

$$\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \cup l^*, \quad \mathbb{L}^* = \mathbb{L} \cup \{l^*\}, \qquad P\, I^*\, l \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} P \in \mathbb{P},\ l \in \mathbb{L},\ \textit{and}\ P\, I\, l \\ P \in l^*,\ l \in \mathbb{L}\ \textit{and}\ P = \Pi_l \\ P \in l^*\ \textit{and}\ l = l^* \end{cases}$$

Then $(\mathbb{P}^*, \mathbb{L}^*, I^*)$ *is a projective plane. Conversely, given a projective plane* $(\mathbb{P}^*, \mathbb{L}^*, I^*)$ *and any line* $l_\infty \in \mathbb{L}^*$ *one obtains an affine plane* $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ *with*

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^* \setminus l_\infty, \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}^* \setminus \{l_\infty\}, \quad P\, I\, l \Leftrightarrow P \in \mathbb{P},\ l \in \mathbb{L},\ \textit{and}\ P\, I^*\, l$$

2.4.3 The projective space associated with an affine space

For an affine space $(\mathbb{P}, V)$ with associated *affine incidence space* $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ is given

- $\mathbb{L}$ is the set of *affine lines* consisting of all $U + P$ where $P \in \mathbb{P}$ and U a 1-dimensional subspace of V
- the *incidence* I be given by $P\, I\, l \;\Leftrightarrow\; P \in l$

The associated *projective incidence space* $(\mathbb{P}^*, \mathbb{L}^*, I^*)$ is given by

- $\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \cup \mathbb{P}^\infty$ where the set $\mathbb{P}^\infty$ of *points at infinity* consists of all parallel pencils of lines, i.e. the $U^\infty = \{U + P \mid P \in \mathbb{P}\}$ where U is a 1-dimensional subspace of V
- $\mathbb{L}^* = \mathbb{L} \cup \mathbb{L}^\infty$ where the set $\mathbb{L}^\infty$ of *lines at infinity* consists of all parallel classes of planes, i.e. the $U^\infty = \{U + P \mid P \in \mathbb{P}\}$ where U is a 2-dimensional subspace of V
- *incidence* $P\, I^*\, l$ iff
  - $P\, I\, l$ for $P \in \mathbb{P}$ and $l \in \mathbb{L}$
  - $W = U$ for $P = W^\infty \in \mathbb{P}^*$ and $l = U + Q \in \mathbb{L}$
  - $W \subseteq U$ for $P = W^\infty \in \mathbb{P}^*$ and $l = U^\infty \in \mathbb{L}$

2.4.4 The projective space associated with a vector space

Given a vector space V^+ define the *projective incidence space* $(\mathbb{P}^\#, \mathbb{L}^\#, I^\#)$ associated with V^+ as

- $\mathbb{P}^\# = \{U \mid U \text{ vector subspace of } V,\ \dim U = 1\}$
- $\mathbb{L}^\# = \{U \mid U \text{ vector subspace of } V,\ \dim U = 2\}$

- $P\, I^{\#}\, l \;\Leftrightarrow P \subseteq l$ for $P \in \mathbb{P}^{\#}$ and $l \in \mathbb{L}^{\#}$

Theorem 2.4.4 *If* V *is a linear subspace of* V^+ *and* $\dim V = \dim V^+ - 1$ *then the projective incidence space associated with an affine space* $(\mathbb{P}, V)$ *is isomorphic to the projective incidence space associated with* V^+.

Proof. We may assume the situation as in Sect.10.1. Define $\phi_P : \mathbb{P}^{\#} \to \mathbb{P}^*$ by

$$\phi_P(U) = \begin{cases} S & \in \mathbb{P} \quad \text{for } U \not\subseteq V,\ \{S\} = U \cap (V+O) \\ U^\infty & \in \mathbb{P}^\infty \quad \text{for } U \subseteq V \end{cases}$$

and $\phi_L : \mathbb{L}^{\#} \to \mathbb{L}^*$ by

$$\phi_L(U) = \begin{cases} (U \cap V) + P & \in \mathbb{L} \quad \text{for } U \not\subseteq V,\ P \in (U+Z) \cap (V+O) \\ U^\infty & \in \mathbb{L}^\infty \quad \text{for } U \subseteq V \end{cases}$$

Observe that $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$ for $\dim U = 2$ since otherwise $\dim(U+V) = 2 + n > n + 1 \dim V^+$. For $U \not\subseteq V$ it follows $\dim(U \cap V) = 1$. Choosing $\vec{x} \in U \setminus V$ we get some $P \in (\mathsf{span}\{\vec{x}\} + Z) \cap (V+O) \subseteq (U+Z) \cap (V+O)$ whence $(U \cap V) + P \subseteq (U+Z) \cap (V+O)$. Now, $2 = \dim(U+Z) > \dim((U+Z) \cap (V+O)) \geq 1 = \dim((U \cap V)+P)$ whence $(U \cap V)+P = (U+Z) \cap (V+O)$.

Thus, ϕ_P and ϕ_L are well defined. It is easy to see that these maps are bijective and $W\, I^{\#}\, U \;\Leftrightarrow\; \phi_p(W)\, I^*\, \phi_L(U)$. □

2.5 Projective incidence spaces

2.5.1 Axioms and examples

Projective incidence spaces are defined as follows

(P1) Any two distinct points are on a unique line.

(P2) On any line there are at least three distinct points.

(P3) Given pairwise distinct points P_0, P_1, P_2, P_3 and lines l_i through P_i, P_{i+1} (indices modulo 4), if l_0, l_2 have a point in common then so have l_1, l_3.

Desargues' Theorem can be stated as an axiom

(P4) Let A, B, C and A', B', C' be triples of non-collinear points and O a point such that each triplet $O, A, A',\ O, B, B'$ and O, C, C' consists of pairwise distinct collinear points. Then the lines through A, B and A', B' meet in Q, those through A, C and A', C' in R, and those through B, C and B', C' in P such P, Q, R are collinear.

Corollary 2.5.1 *The projective incidence space associated with an affine space* $(\mathbb{P}, V)$ *satisfies (P1)-(P4).*

Proof. These are easily verified for the projective incidence space associated with V^+. □

2.5.2 Projective 3-space

Given a projective incidence space, as subset $\mathbb{S}$ of $\mathbb{P}^*$ is a *subspace* if for all $P \neq Q$ in $\mathbb{S}$, if P, Q, R are collinear then $Q \in \mathbb{S}$. Of course, any subset $\mathbb{X}$ of $\mathbb{P}$ is contained in a smallest subspace, the *subspace generated* by $\mathbb{X}$. A subspace generated by 3 non-collinear points is called a *plane*. If $\mathbb{P}^*$ is generated by 4 points not generating a plane, then is a *projective 3-space*. The following modifications of the axioms of affine 3-space can be shown, elementarily - and provide an equivalent axiomatization for projective 3-spaces.

1. A line is incident with a plane if and only if each of its points is incident with that plane.
2. Any two distinct points are on a unique line.
3. On any line there are at least three distinct points.
4. Any triangle is contained in a unique plane.
5. Each plane contains a triangle.
6. If two distinct points of a line are on a plane, then that line is on that plane.
7. Any two distinct lines on the same plane have a (unique) point in common.
8. Any two distinct planes have exactly one line in common.
9. There are four non-complanar points.

Again, axioms 1-6 allow us to think of lines and planes as particular sets of points.

Corollary 2.5.2 *The points and lines on a fixed plane in projective 3-space form a projective plane.*

Lemma 2.5.3 *If two lines of projective 3-space meet in a point then they are on a unique plane.*

Proof. Let P be the intersection point of l and h (which is unique by axiom b), Q a second point on l, R on h. P, Q, R is a triangle by axiom b and determines a plane π by axiom d. Thus, l and h are contained in π by axiom f. □

Lemma 2.5.4 *In projective 3-space, a plane and a line not on that plane meet in a unique point.*

Proof. Choose a point P on π not on l. Then P and l are contained in a unique plane π'. π and π' meet in a line h by axiom h. l and h meet in a point Q by axiom g. Q is on π and l and the only such point by axiom f. □

Given a plane π and a point Z not on π, by the lemma, for each point $P \neq Z$ we have a unique intesection point ϕP of π and the line through Z, P (exercise). Such map is called a *central projection* and takes lines not through Z to lines on π.

2.5.3 Desargues' Theorem

Theorem 2.5.5 *(P4) holds in any projective space which contains 4 non-complanar points.*

Proof. All given points belong to the subspace generated by O, A, B, C. Thus, it suffices to consider the case of 3-space. The two triangles determine planes π and π'. Since the lines through A, A' and B, B' meet in O, by Lemma 2.5.3 we have A, B, A', B' in a plane so that the lines h through A, B and h' through A', B' meet in some point Q (by axiom g). Since A, B are on π we have h on π by axiom f and Q on π by axiom a. Similarly, Q on π'. That one has R and P both on π and π' follows in the same manner.

Now, assume that $\pi \neq \pi'$. By axiom h these planes meet in some line l and all three points Q, R, P are on that intersecting line.

If $\pi = \pi'$ choose a point Z not on π, $\tilde{A}$ a third point on the line through A, Z and $\tilde{A}'$ as the intersection of the lines through $O, \tilde{A}$ and Z, A'. Then, applying the preceding case to the triangles $\tilde{A}, B, C$ and $\tilde{A}', B', C'$ we get collinear points $P, \tilde{Q}, \tilde{R}$. The central projection given by Z and π leaves B, C, B', C', O, P fixed, takes $\tilde{A}$ to A, $\tilde{A}'$ to A' and the collinear triplet $P, \tilde{Q}, \tilde{R}$ to the collinear triplet P, Q, R looked for. $\square$.

Following the pattern of the preceeding section, affine incidence spaces may be extended to projective incidence spaces. To prove the affine version of Desargues' Theorem choose O as the point at infinity of the parallel pencil given by the line through A, A' - which also contains the lines through B, B' and C, C' (by transitivity of $\|$). Let Q be the point at infinity given by the parallel lines through A, B and A', B', R that given by the lines through B, C and B', C'. By Desargues' Theorem for projective 3-space, the lines through A, C and A', C' meet at a point P collinear with Q, R. But this means that P is also at infinity and so the lines through A, C and A', C' are parallel. Thus, A, A', C, C' is a parallelogram, too. $\square$

Theorem 2.5.6 *Every affine incidence space* $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ *having 3 non-collinear points and satisfying (P4) is obtained from an affine space* $(\mathbb{P}, V)$.

Sketch of proof was given in Ch.4 and 5.

Corollary 2.5.7 *Every projective incidence space having 3 non-collinear points and satisfying (P4) is isomorphic to the projective space associated with some vector space.*

Sketch of proof. Consider a maximal proper subspace H of $\mathbb{P}^*$. Then $\mathbb{P} = \mathbb{P}^* \setminus H$ is an affine space and $\mathbb{P}^*$ is isomorphic to the projective space associated with V^+.

2.5.4 Non-desarguesian planes *

While Desargues' Theorem holds in affine and projective 3-space as well as in higher dimension, it may fail in planes. For example, the $\mathbb{P}$ be the set $\mathbb{R}^2$

of all pairs (x, y) of real numbers and fix some $c > 0$. Let $\mathbb{L}$ consist of all subsets of $\mathbb{P}$ of the following form $(x_0, a, b \in \mathbb{R})$

$$\{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \ \ \{(x, y) \mid y = \left\{ \begin{array}{ll} ax + b & \text{for } x \geq 0 \\ cax + b & \text{for } x \leq 0 \end{array} \right\}$$

and define $P\,I\,l$ if and only if $P \in l$. This defines an affine plane in which Desargues' Theorem holds if and only if $c = 1$. In the latter case, we have the coordinate version of the euclidean plane and this can be generalised to systems of 'numbers' (skew-fields) like the reals. Actually, every desarguean plane is isomorphic to such and has prime power order when it is finite.

2.5.5 Orders of planes *

Let n be a natural number. An affine plane $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, I)$ has *order* n if it contains one line having exactly n points. Then the following hold

1. $n \geq 2$.
2. Each line contains exactly n points,
3. Through each point there are exactly $n + 1$ lines.
4. Each parallel pencil contains exactly n lines.
5. There are exactly $n + 1$ parallel pencils.
6. $\mathbb{P}$ has n^2 and $\mathbb{L}$ $n(n + 1)$ elements.

There is no affine plane of order 10 - see C.W.H. Lam, The search for a finite projective plane of order 10, Amer. Math. Monthly 98 (4) (1991), 305-318

Proposition 2.5.8 *Given a finite projective plane (i.e. $\mathbb{P}^*$ is finite), there is $n \in \mathbb{N}$ (the* order *of the plane) such that every line has exactly $n + 1$ points and any point is incident with exactly $n + 1$ lines.*

Both proofs are left as exercises. Observe that things become more transparent in the projective setting.

Kapitel 3

Affine Abbildungen in Zahlenebene und Raum

3.1 Komplexe Zahlen*

3.1.1 Motivation

Eine quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ ist gleichbedeutend mit $(x+\frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$ (quadratische Ergänzung), also hat man

$$x = -\frac{p}{2} \pm a \quad \text{falls } a^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Um eine solche Gleichung für beliebige reelle p, q lösen zu können, muss man also nur zu jedem reellen d eine 'Zahl' a mit $a^2 = d$ haben. Und dazu genügt es, eine 'Zahl' j mit $j^2 = -1$ zu haben. Mithilfe einer solchen 'imaginären' Zahl konnten die Mathematiker des Renascimento sogar Gleichungen 3. und 4. Grades lösen. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ und eine solche Zahl j führt zum Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*. Dass und wie die Erweiterung möglich ist, wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Wir schreiben j für die imagiäre Einheit statt des in der Mathematik gebräuchlichen i.

3.1.2 Zahlenebene

Die Vektorrechnung liefert einen handfesten Zugang zu den komplexen Zahlen. Dazu sei in der Ebene, hier die *Zahlenebene* genannt, Skalarprodukt und Orientierung (üblicherweise "gegen die Uhr') gegeben, sowie Ursprung O und eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gegeben. Dann können wir natürlich zwei "Zahlen" vektoriell addieren. Für eine "Zahl" z, d.h. einen (Orts)Vektor $z = \vec{a}$, sei das *Argument* $\phi = arg(z)$ der Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{a}$, wobei $0 \leq \phi < 2\pi$ im Sinne der positiven Orientierung gemessen wird. Wir schreiben $|z| = \|z\|$. Dann können wir einen Winkel χ durch eine Zahl "u" mit $|u| = 1$, $\arg(u) = \chi$ eindeutig notieren und die Drehung von Punkten z um den Winkel χ als Multiplikation mit u beschreiben

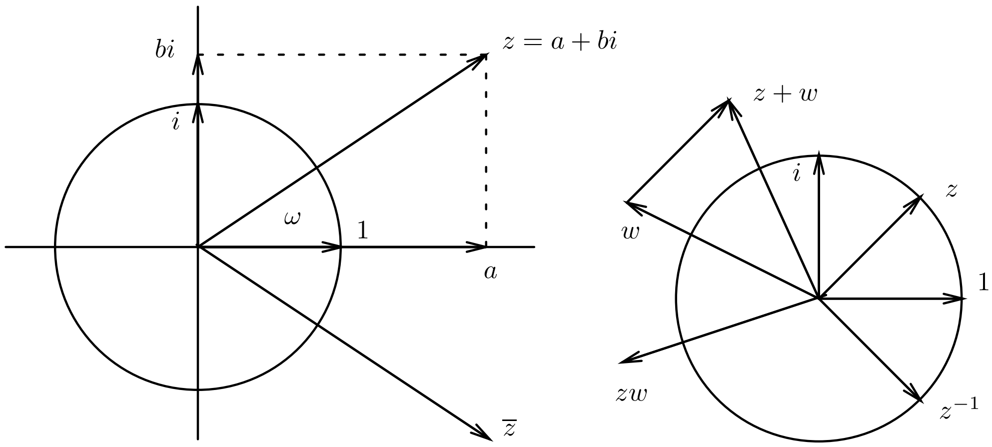
$$uz \text{ hat Länge } |z| \text{ und Argument } \arg(uz) = \arg(u) + \arg(z)$$

(bis auf Vielfache von 2π). Das motiviert die allgemeine Definition des Produkts

$$zw \text{ hat Länge } |zw| = |z||w| \text{ und Argument } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

(bis auf Vielfache von 2π). Der Kehrwert ergibt sich dann so

$$z^{-1} \text{ mit } |z^{-1}| = |z|^{-1}, \ \arg(z^{-1}) = -\arg(z).$$



Schreibt man $0 = \vec{0}, 1 = \vec{e}_1$ so zeigen einfache geometrische Überlegungen, dass die Körperaxiome gelten: Da wir jedes z als ru mit $|u| = 1$ und $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ schreiben können. kommt es bei der Multiplikation nur auf Multiplikation mit Zahlen von Länge 1 an, und die können wir als Drehungen verstehen. Z.B. bei $(x + y)u$ mit $|u| = 1$ wird das von x und y aufgespannte Parallelogramm in das von xu und yu aufgespannte gedreht und die Diagonale $x + y$ geht dabei in die Diagonale $xu + yu$ über, also $(x + y)u = xu + yu$.

3.1.3 Kartesische Darstellung

Die reellen Zahlen kann man auf natürliche Weise mit den Zahlen auf der *reellen Achse* durch O in Richtung $\vec{e}_1$ identifizieren. Schreibt man j (in der Mathematik meist i) für die *imaginäre Einheit* $\vec{e}_2$, so hat jede Zahl eine eindeutige (*kartesische*) Darstellung in der Form

$$z = a + bj, \quad a, b \text{ reell} .$$

Dabei heisst $a = \mathsf{Re}(z)$ der *Realteil*, $b = \mathsf{Im}(z)$ der *Imaginärteil* von z. Die Länge oder der Betrag und das Argument ergeben sich als

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(a + bj) \Leftrightarrow a = \cos\phi \text{ und } b = \sin\phi$$

und man mag auch $\phi = \arctan b/a$ schreiben, wenn man weiss, wie das gemeint ist. Für das Rechnen mit der imaginären Einheit ergibt die Geometrie

$$j^2 = (-j)^2 = -1, \ \ j^3 = 1/j = -j, \ j^4 = 1, \quad 1/-j = j.$$

Dann folgt mit den Körperaxiomem für reelle a, b, c, d

$$(a+bj)+(c+dj) = (a+c)+(b+d)j, \quad (a+bj)(c+dj) = (ac-bd)+(ad+bc)j$$

$$\frac{1}{a+bj} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}j.$$

Ist $z = a+bj$ mit reellen a, b, so heisst $z^* = a-bj$ (auch als $\overline{z}$ geschrieben) , das Spiegelbild an der reellen Achse, die zu z *konjugierte* Zahl und es gilt

$$|z| = \sqrt{zz^*}, \quad \mathsf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+z^*), \quad \mathsf{Im}(z) = \frac{1}{2j}(z-z^*).$$

Die Konjugation verträgt sich mit Addition und Multiplikation

$$(z+w)^* = z^* + w^*, \quad (zw)^* = z^*w^*$$

Es folgt

$$zw^* + z^*w = 2\mathsf{Re}(zw^*) = 2\mathsf{Re}(z^*w)$$

$$zw^* - z^*w = 2j\mathsf{Im}(zw^*) = -2j\mathsf{Im}(z^*w)$$

3.1.4 Quadratische Gleichungen

Die Lösungen der Gleichung $z^2 = (c+di)^2 = a+bi$ kann man ganz gut kartesisch angeben; wegen $c^2+d^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ und $c^2-d^2 = a$ hat man $2c^2 = a+\sqrt{a^2+b^2}$, andererseits $2cdi = bi$, also

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}, \quad d = \frac{b}{2c}.$$

Mit der p-q-Formel folgt, dass es zu je zwei komplexe Zahlen p, q komplexe Zahlen x_1, x_2 gibt mit

$$x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$$

nämlich

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm z \quad \text{falls } z^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Für reelle p, q folgende Fälle möglich

$\frac{p^2}{4} - q = 0$	$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2}$
$\frac{p^2}{4} - q > 0$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ x_1 \neq x_2$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$\frac{p^2}{4} - q < 0$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}, \ x_2 = \overline{x}_1$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm j\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

3.1.5 Affine Abbildungen in der Zahlenebene

In der Zahlenebene $\mathbb{C}$ lassen sich einige Arten von Abbildungen besonders komfortabel beschreiben. Wir notieren, ob die Abbildung Längen (L), orientierte Winkel (oW), nicht orientierte Winkel (W) erhält

- *Translation*: $f(z) = z + \alpha$ mit festem $\alpha \in \mathbb{C}$ — L, oW
- *Ursprungsspiegelung* $f(z) = -z$ — L, oW
- *Drehung* mit Zentrum 0: $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$ — L, oW
- *Spiegelung an reeller Achse*: $f(z) = z^*$ — L, W
- *Streckung*: $f(z) = rz$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ — oW
- *Drehstreckung* mit Zentrum 0: $f(z) = \alpha z$ — oW
- *Ganzlineare Abbildung*: $f(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha \neq 0$ — oW

Eine Drehstreckung ist also eine Drehung gefolgt von einer Streckung, eine ganzlineare Abbildung ist eine Drehstreckung gefolgt von einer Translation.

Korollar 3.1.1 *Ganzlineare Abbildungen sind affin. Sie überführen Geraden in Geraden und Kreise in Kreise - bzw. in Punkte falls* $\alpha = 0$

Drehstreckungen mit anderem Zentrum bzw. Spiegelungen an anderen Geraden erhält man, indem man mit Verschiebung bzw. Drehung in die bekannte Situation übergeht, dort ausführt und dann wieder zurückgeht

- Drehstreckung mit Zentrum ζ: $f(z) = \alpha(z - \zeta) + \zeta = \alpha z + \zeta(1 - \alpha)$
- Spiegelung an Gerade durch 0 mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha(\alpha^{-1}z)^* = \alpha^2 z^*$ mit $\alpha = \cos\phi + j\sin\phi$
- Spiegelung an Gerade durch ζ mit Steigungswinkel ϕ: $f(z) = \alpha^2(z^* - \zeta^*) + \zeta$

3.1.6 Komplexe Zahlen als Drehstreckungen

Die Summe $f + g$ von zwei linearen Abbildungen f, g der Ebene definieren wir als

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

und rechnen leicht nach, dass $f + g$ wieder linear ist. Fassen wir die Ebene als $\mathbb{C}$ auf, und sind f, g Drehstreckungen mit Zentrum 0

$$f(z) = \alpha z, \quad g(z) = \beta z$$

so ist

$$(f + g)(z) = \alpha z + \beta z = (\alpha + \beta)z$$

wieder eine Drehsteckung, und ebenso

$$(-f)(z) = -(\alpha z) = (-\alpha)z$$

Damit können wir Drehstreckungen mit Zentrum 0 addieren und multiplizieren entsprechend den zugehörigen komplexen Zahlen und so mit den komplexen Zahlen identifizieren.

Die Drehstreckung

$$f(z) = \alpha z = r(\cos\phi + j\sin\phi)z$$

wird durch die Matrix

$$A = r\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

beschrieben, nämlich

$$\alpha 1 = \alpha, \quad \alpha j = r(-\sin\phi + j\cos\phi)$$

also

$$(*) \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a = r\cos\phi,\ b = r\sin\phi.$$

Umgekehrt ist jede Matrix dieser Form die Matrix einer Drehstreckung und wir können sie mit der komplexen Zahl $a + bj$ identifizieren. Wird $g(z) = \beta$ durch die Matrix B beschrieben so $(g\circ f)(z) = \beta\alpha z$ durch die Matrix BA, d.h. die komplexe Multiplikation kann als Matrixmultipliaktion bzw. verstanden werden. Die Addition entspricht der Matrizenaddition:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Geht man von der Menge $\mathcal{M}$ aller Matrizen der Gestalt $(*)$ aus, so sieht man leicht, dass für $A, B \in \mathcal{M}$ auch

$$A + B \in \mathcal{M}, \quad -A \in \mathcal{M}, \quad O \in \mathcal{M}, AB \in \mathcal{M}, \ E \in \mathcal{M}$$

und sogar $AB = BA$ und $A^{-1} \in \mathcal{M}$ für $A \neq O$. Da sich die weiteren Rechengesetze aus der Matrizenrechnung ergeben, folgt, dass $\mathcal{M}$ ein Körper ist - ein weiterer Zugang zu den komplexen Zahlen.

Will man hier rein geometrisch denken, so hat braucht man eine geometrische Charakterisierung der Drehsteckungen mit gegebenem Zentrum O: sie lassen O fest und erhalten Längen und Orientierung. Dass die Summe dann wieder eine ist, wird etwas mühsam.

3.1.7 Gebrochen lineare Abbildungen

Eine *gebrochen lienare Abbildung* von $\mathbb{C}$ in sich ist von der Form

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \gamma \neq 0 \text{ oder } \delta \neq 0$$

d.h. nur definiert für z mit $\gamma z + \delta \neq 0$. Die *Inversion am Einheitskreis* ist definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für } z \neq 0$$

Lemma 3.1.2 *Jede gebrochen lineare Abbildung $f(z) = (\alpha z+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}$ ist die Hintereinanderausführung $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ von erst einer ganzlinearen Abbildung f_1, der Inversion f_2 am Einheitskreis, und einer ganzlinearen Abbildung f_3 falls $\gamma \neq 0$. Andernfalls f ganzlinear.*

Beweis.

$$z_1 = f_1(z) = \gamma z + \delta$$

$$z_2 = f_2(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

$$z_3 = f_3(z_2) = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} z_2 + \frac{\alpha}{\gamma} \quad \Box$$

3.1.8 Inversion am Einheitskreis

Satz 3.1.3 *Bei der Inversion am Einheitskreis gehen ineinander über (und umgekehrt)*

- *Eine Gerade g durch 0 in eine ebensolche*
- *Eine Kreislinie K mit $0 \notin K$ in eine ebensolche*
- *Eine Gerade mit $0 \notin g$ in eine Kreislinie mit 0 in$K$*

Dabei wird 0 als Bild eines Punktes $\infty \notin \mathbb{C}$ aufgefasst, der auf allen Geraden liegend gedacht wird.

Beweis. Beachte, dass

$$\frac{1}{z} = \alpha \frac{1}{\alpha z} \quad \text{mit } \alpha \neq 0$$

Also darf man sich die abzubildende Gerade oder Kreislinie in eine günstige Position drehstrecken, dann invertieren und wieder "zurück"drehstrecken. Kurz, man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit schon annehmen, dass sie günstig liegt. Bei den Greaden durch 0 geht es auch ohne das: das Bild ist die an der reellen Achse gepiegelte Gerade.

Fall 2: Gerade g mit $0 \notin g$. O.B.d.A. ist g parallel zur imaginären Achse, also

$$g = \{a + jy \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } a > 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

Sei

$$z = a + jy, \quad f(z) = x_1 + jx_2 \quad \text{mit } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Dann

$$a + jy = (x_1 + jx_2)^{-1} = (x_1 - jx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$$

$$a = \mathsf{Re}(a + jy) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$$

$$ax_1^2 + ax_2^2 - x_1 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{a}x_1 = 0$$

Der Ansatz für einen Kreis durch $c \in \mathbb{R}$ ergibt

$$0 = (x_1 - c)^2 + x_2^2 - r^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2cx_1 + c^2 - r^2$$

und wird gelöst durch

$$c = \frac{1}{2a} = r$$

Fall 3: Kreis K mit $0 \notin K$. O.B.d.A.

$$K = \{z \mid |z - 1| = r\} = \{z \mid zz^* - z - z^* + 1 - r^2 = 0\}$$

Insbesondere $r \neq 1$. Für $w = \frac{1}{z}$ ergibt sich die zu $z \in K$ äquivalente Bedingung

$$\frac{1}{ww^*} - \frac{1}{w} - \frac{1}{w^*} + 1 - r^2 = 0$$

und durch weitere Äquivalenzumformung (Multiplikation mit $ww^* \neq 0$ und Umstellung)

$$(1 - r^2)ww^* - w - w^* + 1 = 0$$
$$ww^* - sw - sw^* + s = 0 \quad \text{Multiplikation mit } s = \frac{1}{1 - r^2} \neq 0$$
$$(w - s)(w^* - s) - s^2 + s = 0$$
$$|w - s|^2 = s^2 - s$$

Aber $s^2 > 0$ und aus $1 - r^2 < 1$ folgt dass $s = s^2(1 - r^2) < s^2$, also hat man den Bild-Kreis

$$\{f(z) \mid z \in K\} = \{w \mid |w - s|^2 = s^2 - s\} \quad \Box$$

3.2 Bewegungen in Raum$^{\#}$

3.2.1 Bewegungen und orthogonale Abbildungen

Eine *Bewegung* ist eine abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eines euklidischen affinen Raums in sich

$$|\phi(P)\phi(Q)| = |PQ| \quad \text{für alle } P, Q \in \mathcal{P}$$

Lemma 3.2.1 *Jede Bewegung ist eine affine Abbildung. Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist Bewegung. Translationen sind Bewegungen.*

Beweis. Die Gleichung $\lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ kann äquivalent durch eine Bedingung an λ und die Abstände der Punkte P, Q, R, S ersetzt werden. $\Box$

Lemma 3.2.2 *Jede Bewegung ist eine affine Abbildung.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass eine Beziehung $\overrightarrow{RS} = \lambda\overrightarrow{PQ}$ durch Abstände ausgedrückt werden kann. Bestimme dazu Q' mit $\overrightarrow{PQ'} = \lambda\overrightarrow{PQ}$. Dies bedeutet

- $|PQ'| = |PQ| + |QQ'|$ im Falle $\lambda \geq 1$
- $|PQ| = |PQ'| + |Q'Q|$ im Falle $0 \leq \lambda \leq 1$
- $|QQ'| = |Q'P| + |PQ|$ im Falle $\lambda \leq 0$

Dass $PQ'RS$ ein Parallelogramm bilden, bedeutet, dass sich die Daigonalen halbieren, d.h. dass es einen Punkt X gibt, mit $|PS| = 2|PX| = 2|XS|$ und $|QR| = 2|QX| = 2|XR|$. Diese Beziehungen übertragen sich aich die Bilder unter der Bewegung ϕ, Somit $\overrightarrow{\phi R\phi S} = \lambda\overrightarrow{\phi P\phi Q}$. □

Ein Endomorphismus ϕ eines euklidischen Vektorraumes V ist eine *orthogonale* Abbildung, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt (die Äquivalenz ergibt sich daraus, dass die Länge aus dem Skalarprodukt definiert werden kann und umgekehrt - $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}(|\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2)$

- $\langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$
- $|\phi(\vec{x})| = |\vec{x}|$ für alle $\vec{x} \in V$

Korollar 3.2.3 *Eine affine Selbstabbildung ϕ eines euklidischen affinen Raumes ist genau dann eine Bewegung, wenn die zugehörige lineare Abbildung ϕ_0 orthogonal ist.*

Beweis. $|\vec{x}| = |\overrightarrow{O, \vec{x} + O}|, \quad |\phi_0(\vec{x})| = |\overrightarrow{\phi(O)\phi(\vec{x}+O)}|$ und die Behauptung ist klar. □ Beispiele von Bewegungen mit Fixpunkt O sind in der Ebene Drehungen und (senkrechte) Spiegelungen an einer Geraden, im Raum Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen. Wir werden später zeigen, dass damit alle Fälle erfasst sind.

3.2.2 Matrixbeschreibung

Für einen Endomorphismus ϕ eines endlichdimensionalen euklidischen Raumes sind äquivalent

(1) ϕ ist orthogonal

(2) Das Bild einer/jeder ON-Basis ist ON-Basis

(3) Bzgl. eines/jedes Paares von ON-Basen ist ${}_\alpha\phi_\beta$ orthogonal

Beweis.1 $\Rightarrow$ 2 ist trivial. 2 $\Rightarrow$ 3. Die Spalten der Matrix ${}_\beta\phi_\alpha$ von ϕ bzgl. der ON-Basen α, β sind die Koordinaten der Bilder $\phi(\vec{e}_j)$ der ON-Basis α : $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ also orthonormal, da die $\phi(\vec{e}_j)$ eine ON-Basis bilden. Also ist ${}_\beta\phi_\alpha$ orthogonal.
3 $\Rightarrow$ 1. Sei $A = {}_\beta\phi_\alpha$ orthogonal. Dann

$$\langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = (\phi(\vec{x})^\beta)^*\phi(\vec{y})^\beta = (A\vec{x}^\alpha)^*A\vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^*A^*A\vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^*E\vec{y}^\alpha = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$

Korollar 3.2.4 *Eine orthogonale Abbildung ist durch die Bilder von* $\dim V - 1$ *unabhängigen Vektoren schon zweideutig bestimmt - eindeutig bei Vorgabe der Orientierung.*

3.2.3 Determinante

Sei eine ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des Raumes gewählt. Für eine reelle 3×3-Matrix A definieren wir

$$\det A = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \quad \text{mit } \vec{a}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + a_{3j}\vec{e}_3$$

d.h. in den Spalten der Matrix A stehen die Koordinaten der $\vec{a}_j$

$$A = (\vec{a}_1^\alpha \; \vec{a}_3^\alpha \; \vec{a}_3^\alpha)$$

Dann gilt

Satz 3.2.5 $\det(AB) = \det A \, \det B$. $\det A = \pm 1$ *falls A orthogonal.*

Beweis. Sei A fest, B variabel. Die Abbildung $\boldsymbol{b} \mapsto A\boldsymbol{b}$ ist linear, d.h. sie erfüllt (M1) und (M2). Also erfüllen beide Abbildungen

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2.\vec{b}_3) \mapsto \det AB \qquad \text{und } (\vec{b}_1, \vec{b}_2.\vec{b}_3) \mapsto \det A \cdot \det B$$

wobei $\vec{b}_j = b_{1j}\vec{e}_1 + b_{2j}\vec{e}_2 + b_{3j}\vec{e}_3$ die Bedingungen (D1-3) und $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \mapsto \det A$. Daher stimmen sie überein. Die zweite Behauptung folgt daraus. dass in diesem Falle $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ON-Basis ist. $\square$

Wir vermerken die wichtigen Spezialfälle

Korollar 3.2.6

$$\det(rA) = r^n \det A, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad \det(S^{-1}AS) = \det(A).$$

Insbesondere folgt die Unabhägigkeit von der Wahl der ON-Basis: Bezüglich einer weiteren ON-Basis β haben wir

$$\det(\vec{a}_1^\beta, \vec{a}_2^\beta, \vec{a}_3^\beta) = \det(\,_\beta T_\alpha \vec{a}_1^\alpha, \,_\beta T_\alpha \vec{a}_2^\alpha, \,_\beta T_\alpha \vec{a}_2^\alpha)$$

$$= \det \,_\beta T_\alpha A = \det \,_\beta T_\alpha \det A = \det A$$

Für 2×2 Matrizen geht alles entsprechend einfacher.

Korollar 3.2.7 *Für einen Endomorphismus ϕ des Raumes bzw. der Ebene hängt* $\det \phi_\alpha$ *nicht von der Basis α ab.*

Wir definieren dies als die *Determiante* $\det \phi$ der Abbildung. Die anschauliche Bedeutung in der Ebene ist die Fläche der Bildes des Einheitsquadrats, in Raum das Volumen des Bildes dees Einheitswürfels. Die Determinate ist somit der “Vergrößerungsfaktor”. Beweis. Transformationsformel und Kor.3.2.6.

Korollar 3.2.8 *Eine affine Abbildung ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Eine orthogonale Abbildung ϕ hat* $\det \phi = \pm 1$

3.2.4 Ebene orthogonale Abbildungen

Satz 3.2.9 *Eine orthogonale Abbildung ϕ in der Ebene ist entweder Drehung (falls $\det\phi = 1$) oder Spiegelung an einer Geraden (falls $\det\phi = -1$).*

Beweis. Wir benutzen wieder mal Ortsvektoren und legen eine positiv orientierte ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ fest. Das Bild $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ist wieder eine ON-Basis und positiv orientiert, falls $\det\phi = 1$. Die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren bestimmen sich dann laut Drehmatrix. Ist $\det\phi = -1$, so ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ negativ orientiert und somit

$$(*)\ \ \angle\vec{e}_1, \vec{b}_2 = \angle\vec{e}_1, \vec{b}_1 - 90^o = \angle\vec{e}_2, \vec{b}_1$$

Andererseits $|\vec{b}_1 - \vec{e}_2| = |\phi(\vec{b}_1) - \vec{b}_2|$, also $\phi(\vec{b}_1) = \vec{e}_1$. Entsprechend $\phi(\vec{b}_2) = \vec{e}_2$. Wegen (*) ist die Winkelhalhierende g zu $\vec{e}_1, \vec{b}_1$ auch die zu $\vec{b}_2, \vec{e}_2$ und es handlelt sich somit um die Spieglung an g - weils für die Basis stimmt.

3.2.5 Orthogonale Abbildungen im Raum

Satz 3.2.10 *Sei ϕ eine orthogonale Abbildung eines 3-dimensionalen euklidischen Raums und $A = \phi_\alpha$ bzgl. einer Basis α. Dann $\det A = \pm 1$ und es gibt es eine ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ mit*

$$\phi_\beta = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Jenachdem ob $\det A = 1$ oder -1 handelt es sich um Drehung bzw. Drehspiegelung mit Winkel ω und Achse $\vec{w}_1$. Ist α-ON-Basis, so ist A orthogonal,

Korollar 3.2.11 *(Euler) Eine Bewegung mit Fixpunkt ist Drehung oder Drehspiegelung.*

Korollar 3.2.12 *Die Inversen von Drehungen sind Drehungen, von Drehspiegelungen sind Drehspiegelungen. Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen bzw. zweier Drehspiegelungen ist eine Drehung*

Lemma 3.2.13 *Zu jeder orthogonalen Abbildung ϕ_0 des Raumes gibt es einen Vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ mit $\phi_0(\vec{w}) = \pm\vec{w}$.*

Beweis. Wir dürfen $\det\phi_0 = 1$ annehmen - sonst betrachten wir $-\phi_0$. Sei ϕ die zugehörige affine Abbildung mit Fixpunkt O. Wir wählen einen Punkt $A \neq O$. Ist $\phi(A) = A$, sind wir fertig. Andernfalls setzen wir

$$B = \phi(A),\ \ C = \phi(B) = \phi(\phi(A))$$

Insbesondere gilt $B \neq C$ und

$$|OA| = |OB| = |OC|$$

Sei zunächst $A \neq C$ angenommen. Seien E_1 und E_2 die Mittelebenen senkrecht auf der Strecke AB bzw. BC

$$E_i = \{P \mid |PA| = |PB|\}, \quad E_2 = \{P \mid |PB| = |PC|\} = \phi(E_1)$$

Beide enthalten O, haben also eine Schnittgerade g. Sei nun P ein Punkt von g. Dann folgt nach Definition von E_1

$$|PA| = |PB| = |PC|$$

Aus $P \in E_1$, folgt $\phi(P) \in E_2$ und somit

$$|\phi(P)B| = |\phi(P)C|$$

Schliesslich

$$|\phi(P)B| = |\phi(P)\phi(A)| = |PA|$$

und es folgt die Gleichheit aller dieser Strecken, insbesondere

$$|PB| = |\phi(P)B|, \ \ |PC| = |\phi(P)C|$$

Weil O Fixpunkt ist, gilt auch

$$|PO| = |\phi(P)O|$$

d.h. P und $\phi(P)$ haben von den drei Punkten O, B, C jeweils denselben Abstand - und diese liegen nicht auf einer Geraden weil $|OB| = |OC|$. Da die Orientierung erhalten bleibt, folgt $\phi(P) = P$.

Es bleibt der Fall, dass $\phi(\phi(A)) = A$ also $\phi_0(\phi_0(\vec{a})) = \vec{a}$ für ein $\vec{a} \neq \vec{0}$. Dann $\phi(\vec{w}) = \vec{w}$ für $\vec{w} = \vec{a} + \phi_0(\vec{a})$. □

Beweis des Satzes. Sei $\vec{w}_1$ normierter Vektor mit $\phi(\vec{w}_1) = \pm\vec{w}_1$ und ergänze zu ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. Es gilt für $i = 2, 3$, dass $\langle \phi\vec{w}_i \mid \vec{w}_1 \rangle = \pm\langle \phi\vec{w}_i \mid \phi\vec{w}_1 \rangle = \pm\langle \vec{w}_i \mid \vec{w}_1 \rangle = 0$. Also hat ϕ bzgl. β die orthogonale Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $B = (b_{ij})$ orthogonale 2×2-Matrix, Ist $\det B = 1$, so B Drehmatrix und ϕ Drehung bzw. Drehspiegelung mit demselben Winkel. Andernfalls beschreibt B eine Spieglung. Also gibt es ON-Basis $\vec{w}_1, \vec{w}_2', \vec{w}_3'$ so, dass ϕ die folgende Matrix hat

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen ergibt sich die gewünschte Form mit $\omega = \pi$. □

3.2.6 Eulersche Winkel

Satz 3.2.14 *Zu zwei gegebenen aufeinander senkrechten Achsenrichtungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum lässt sich jede Drehung in der Form $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ schreiben, wobei ϕ_1, ϕ_3 Drehungen um $\vec{a}$ und ϕ_2 Drehung um $\vec{b}$.*

Beweis. Es genügt zu positiv orientierten ON-Basen $\vec{e}_i$ und $\vec{f}_i$ Drehungen ϕ_1, ϕ_3 um $\vec{e}_1$ und ϕ_2 um $\vec{e}_2$ so anzugeben, dass $\phi(\vec{f}_i) = \vec{e}_i$ für $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$. Dazu wähle ϕ_1 so, dass $\phi_1(\vec{f})_1 \in \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_3$. und ϕ_2 so, dass $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_1)) = \vec{e}_1$. Nun bilden $\vec{e}_1$, $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_2))$, $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_3))$ eine positiv orientierte ON-Basis und diese kann durch ϕ_3 in $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ überführt werden. □

Hat man Drehungen ϕ_1, ϕ_3 um $\vec{e}_3$ mit Winkeln ψ und ω und ϕ_2 um $\vec{e}_1$ mit Winkel θ so erhält man bzgl. dieser Basis die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\psi - \sin\omega\sin\psi\cos\theta & -\sin\omega\cos\psi - \cos\omega\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\omega\sin\psi + \sin\omega\cos\psi\cos\theta & -\sin\omega\sin\psi + \cos\omega\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\omega\sin\theta & \cos\omega\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hierbei ist ϕ_1 die Drehung um $\vec{e}_3$ mit Winkel ω, ϕ_2 die Drehung um $\vec{e}_1$ mit Winkel θ und ϕ_3 die Drehung um $\vec{e}_3$ mit Winkel ψ.
Dieselbe Drehung (mit derselben Matrix) kann man aber auch als Hintereinanderausführung $\chi_3 \circ \chi_2 \circ \chi_1$ von 3 Drehungen um zwei der (mitbewegten) Achsen a_1, a_3 eines Körpers sehen:

- a_3 liegt in Richtung $\vec{e}_3$ und χ_1 ist die Drehung um a_3 mit Winkel ψ
- a_1 liegt nun in Richtung von $\chi_1(\vec{e}_1)$ und χ_2 ist die Drehung um a_1 mit Winkel θ
- a_3 liegt nun in Richtung von $\chi_2\chi_1(\vec{e}_3)$ und χ_3 ist die Drehung um a_3 mit Winkel ω

Das folgt sofort aus folgendem

Lemma 3.2.15 *Sind bzgl. einer ON-Basis A und B die Matrizen der Drehungen ϕ bzw. χ um die Achse $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ mit Winkel ω bzw. θ, so ist AB die Matrix von $\rho \circ \phi$, wobei ρ die Drehung um $\phi(\vec{b})$ mit Winkel θ ist.*

Beweis. Die ON-Basis sei $\vec{e}_i$. Die Matrix von ρ bzgl. der Basis $\phi(\vec{e}_i)$ ist B, da $\phi(\vec{b})$ bzgl. dieser Basis dieselben Koordinaten hat wie $\vec{b}$ bzgl, $\vec{e}_i$. Die Matrix A ist auch die Matrix der Basistransformation von der neuen Basis $\phi(\vec{e}_i)$ zurück zur alten Basis $\vec{e}_i$. Somit hat ρ bzgl. der alten Basis die Matrix ABA^{-1} und $\rho \circ \phi$ die Matrix $ABA^{-1}A = AB$. □.

Kapitel 4

Quadratische Formen und Kegelschnitte

4.1 Quadratische Formen und Hauptachsen*

4.1.1 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Eine reelle Funktion $f(x_1, x_2) = z$ zweier reeller Variablen x_1, x_2 ordnet jedem Paar reller Zahlen ein reelle Zahl zu. Beispiel: Jedem Koordinatenpaar von Punkten einer Karte wird die entsprechende Höhe im Gelände zugeordnet. Man kann sich dann den Graphen der Funktion als Fläche im Raum denken - die Geländeoberfläche. Zu einer vorgegebenen Höhe h hat man in der Karte die *Höhenlinie*, angegeben bzgl. eines kartesischen Koordinatensytems α als

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ f(x_1, x_2) = h\}$$

Ist die Funktion genügend glatt, insbesondere ohne senkrechte oder gar überhängende Abstürze und scharfe Grate, so kann man sie nach Taylor in der Nähe jedes Punktes (p_1, p_2) durch ein Polynom ausdrücken. Insbesondre in der Nähe des Urspungs

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{i,j}^{i+j \leq N} b_{ij} x_1^i x_2^j \quad \text{für } x_1 \approx 0,\ x_2 \approx 0$$

Dabei ist im allgemeinen $N = \infty$, häufig darf man jedoch die höheren Potenzen vernachlässigen und kommt mit $N = 1$ bzw. $N = 2$ aus. In letzteren Falle haben wir dann

$$f(x_1, x_2) \approx b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{20}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

Die Koeffizienten erhalten wir durch partielles Ableiten an der Stelle - hier $(0, 0)$

$$b_{00} = f(0,0),\ b_{10} = \frac{\partial z}{\partial x_1},\ b_{01} = \frac{\partial z}{\partial x_2},\ b_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ b_{02} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},\ b_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Im Allgemeinen muss man x_i durch $x_i - p_i$ ersetzen. Hat man in einem Punkt (o.B.d.A. dem Punkte $(0, 0)$) einen (relativen) Extremwert, so muss die Tangentialebene an die Fläche in diesem Punkt horizontal sein, was sich in $b_{10} = b_{01} = 0$ ausdrückt. Ausserdem ist der Wert von b_{00} belanglos. Also geht es um die *quadratische Form*

$$(1)\;\; Q(x_1, x_2) = b_{20}x_1^2 + b_{20}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

Die Punkte mit horizontaler Tangentialebene haben stets ein bestimmtes Muster von Höhenlinien und durch Wahl eines geeigneten neuen Koordinatensystems x'_1, x'_2 und reeller Zahlen λ_1, λ_2 kann man immer erreichen, dass das Gelände beschrieben wird durch

$$(2)\;\; \tilde{Q}(x'_1, x'_2) = \lambda_1 {x'}_1^2 + \lambda_2 {x'}_1^2$$

Berggipfel	Maximum	konzentische Ellipsen	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$
Seegrund	Minimum	konzentrische Ellipsen	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$
Sattel		Hyperbelpaar	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
Rinne/Rücken		parallele Geraden	ein $\lambda_i = 0$
Ebene		$\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Bei einer Wanderung auf einem in der Karte als Kreis um den betreffenden Punkt eingetragenen Weg, wird die maximale bzw. minimale Höhe geanu dann erreicht, wenn der Weg eine dieser neuen Koordinatenachsen kreuzt: Ist $\lambda_i \geq \lambda_j$, so wird das Maximium bei der Achse x'_i, das Minimum bei x'_j angenommen.

4.1.2 Flächen zweiter Ordnung

Beispiele von Kurven zweiter Ordnung hatten wir gerade: die Höhenlinien von quadratischen Formen wie in (1). Bei den Flächen wollen wir uns auch beschränken auf die, die von quadratischen Formen herrühren und sich bezüglich eines kartesischen Koorinatensystems α beschreiben lassen als

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ Q(x_1, x_2, x_3) = c\}$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

Vostellen kann man sich dabei Isothermen bzw. Isobaren, nicht auf einer simplen Wetterkarte, sondern mit Berücksichtigung der Höhe. Um Beispiele diskutieren zu können, nehmen wir erst mal $c > 0$ und

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	Ellipsoid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 < 0$	einschaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < 0$	einschaliges Hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 = 0$	elliptischer Zylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$	2 parallele Ebenen

Entsprechend bei Vertauschen der Indices bzw. $c < 0$ (bei den Ellipsoiden bzw. elliptischen Zylindern wird's dann leer). Auch in diesem Falle sind die Koordinatenachsen dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen Maximum bzw. Minimum von $Q(x_1, x_2, x_3)$ unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ angenommen wird, d.h. wenn man Q als Funktion nur auf der Einheitskugel betrachtet. Euler hat (fast) gezeigt, dass man stets ein Koordinatensystem findet so, dass es genauso wie in den Beispielen ausssieht.

4.1.3 Bilineare Formen

Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Seine Elemente schreiben wir als $\vec{v}$. Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{rclcrcl} \Phi(\vec{v}+\vec{w},\vec{u}) &=& \Phi(\vec{v},\vec{u})+\Phi(\vec{w},\vec{u}) & \quad & \Phi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) &=& \Phi(\vec{u},\vec{v})+\Phi(\vec{u},\vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v},\vec{w}) &=& r\Phi(\vec{v},\vec{w}) & & \Phi(\vec{v},r\vec{w}) &=& r\Phi(\vec{v},\vec{w}) \end{array}$$

Sei $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_n}$ eine Basis von V. Dann gibt es eine bijektive Entsprechung zwischen Bilinearformen Φ auf V und Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vermöge

$$\boxed{\Phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}^{\alpha})^t A \vec{y}^{\alpha}, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j))_{n\times n}}$$

(die transponierte Matrix zu X schreiben wir als X^t). $A = \Phi^{\alpha}$ heisst dann die *(Gram)-Matrix* von Φ bzgl. α. Die Form Φ ist *symmetrisch*, d.h.

$$\Phi(x,y) = \Phi(y,x) \text{ für alle } x,y \in V \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A$$

Die zugehörige *quadratische Form* $Q : V \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcll} Q(\vec{x}) &=& \Phi(\vec{x},\vec{x}) = (\vec{x}^{\alpha})^t A \vec{x}^{\alpha} = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j & \text{mit } \vec{x}^{\alpha} = (x_1,\ldots,x_n)^t \\ &=& \sum_i q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j & \text{mit } q_{ii} = a_{ii} \text{ und } q_{ij} = 2a_{ij} \end{array}$$

und muss dann, wenn man die q_{ij} und die Matrix A angeben will beachten, dass

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2}q_{ij} & \text{falls } i < j \text{ bzw. } j < i \end{cases}$$

Und kann man Φ aus Q zurückgewinnen: $\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$. Eine reelle quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ ist natürlich eine reelle Funktion in n Variablen und man veranschaulicht sich sie durch Niveau-Hyperflächen, für $n = 2$ also durch Höhenlinien.

4.1.4 Transformation

Ist β eine weitere Basis, so werden die Koordinaten von Vektoren transformiert nach dem Ansatz

$$\vec{x}^{\alpha} = {}_{\alpha}T_{\beta}\vec{x}^{\beta}$$

wobei in den Spalten der Transformationsmatrix ${}_{\alpha}T_{\beta}$ die Koordinaten der neuen Basisvektoren bzgl. der alten Basis α stehen. Wer hier einen Isomorphismus sehen will, nehme den von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}^{\beta} \mapsto \vec{x}^{\alpha}$ - d.h. die Umrechnung der Koordinaten. Für die Basisbeschreibungen der Form gilt dann

$$\boxed{\Phi^\beta = {}_\alpha T_\beta^t \Phi^\alpha \, {}_\alpha T_\beta}$$

Beweis. $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$, $\vec{y}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta$, also

$$(\vec{x}^\beta)^t \, {}_\alpha T_\beta^t \Phi^\alpha \, {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta = ({}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta)^t \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^t \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$$

4.1.5 Metrik

Physiker sprechen statt von einer symmetrischen Bilinearform auch auch von einem *symmetrischen Tensor*. Wichtigstes Beispiel ist der *metrische Tensor* $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$. Für ihn gilt

$$\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2$$

Hat $\vec{x}$ Länge 1, so ist $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ gerade die Projektion von $\vec{y}$ auf $\vec{x}$, aufgefasst als Skalar. Und $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufeinander senkrecht stehen. D.h. dieser Tensor definiert die Begriffe Länge, Orthogonalität und Winkel und kann umgekehrt schon aus der Länge definiert werden (wobei es dann auf die Längeneinheit ankommmt). Er ist durch seine *positive Definitheit* ausgezeichnet

$$\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle > 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}$$

Abstrakt gesehen ist jeder positiv definite symmetrische Tensor genausogut wie der metrische - wenn es einem nichts ausmacht, in einer Richtung in Meter, in der zweiten in Fuss, in der dritten in Ellen zu messen.

4.1.6 Trägheitstensor

Wie Sie alle vom Karusellfahren her wissen, ergibt sich das Trägkeitsmoment $J(\vec{a})$ eines starren Körpers mit der Massendichte $m(\vec{x})$ (wir benutzen Ortvektoren bzgl. Ursprung O) bzgl. einer durch O gehenden Achse $\vec{a}$ (mit $|\vec{a}| = 1$) als

$$J(\vec{a}) = \int m(\vec{x}) \cdot |\vec{x} \times \vec{a}|^2 \, d\vec{x}$$

dabei ist $|\vec{x} \times \vec{a}|$ der Abstand des durch $\vec{x}$ gegebenen Punktes P von der Achse $\vec{a}$. Statt des Integrals dürfen Sie sich eine Summation über Würfelchen $d\vec{x}$ denken. In der Tat, denkt man sich die Masse M im Schwerpunkt P des Karusellfahrers konzentiert und als $\vec{a}$ die Achse des Karusells, so ist $J(\vec{a}) = M|\vec{x} \times \vec{a}|$ und das wird kleiner, wenn P näher zur Achse rückt. Da M und die Energie erhalten bleiben, muss die Winkelgeschwindigkeit zunehmen. Euler hat gezeigt, dass J in der Tat eine quadratische Form ist. Den Tensor, der hinter dem Trägheitemoment steckt, erhält man nämlich ganz einfach als

$$\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \int m(\vec{x}) \cdot \langle \vec{x} \times \vec{a} \,|\, \vec{x} \times \vec{b} \rangle \, d\vec{x}$$

Bezüglich irgendeiner Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat man also für $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{v}_i$

$$J(\vec{a}) = J(\vec{v}_1)a_1^2 + J(\vec{v}_2)a_1^2 + J(\vec{v}_3)a_3^2 + 2d_{12}a_1a_2 + 2d_{13}a_{13} + 2d_{23}a_2a_3$$

Hat man eine Orthonormalbasis gewählt und den Ursprung im Schwerpunkt des Körpers, so dann man die d_{ij} als *Deviationsmomente* deuten: sie beschreiben die Ablenkung in Richtung auf die Achse $\vec{v}_j$ bei Rotation um die Achse $\vec{v}_i$.

Die *Hauptachsen* sind nach Euler (oder J.A. von Segner) diejenigen $\vec{a}$, für die $J(\vec{a})$ maximal bzw. minimal ist (cum grano salis). Euler hat gezeigt, dass es sowas gibt und dass die auch noch aufeinander senkrecht stehen, also eine Orthonormalbasis bilden. Wenn man eine Basis aus Hauptachsen zugrundelegt, gilt

$$J(\vec{a}) = J(\vec{v}_1)a_1^2 + J(\vec{v}_2)a_1^2 + J(\vec{v}_3)a_3^2 \quad \text{für } \vec{a} = \sum_i a_i\vec{v}_i$$

Die $J(\vec{v}_i)$ heissen *Hauptträgheitsmomente*. Insbesondere tritt bei Rotation um eine Hauptachse keine Deviation auf, am stabilsten ist die Lage bei Rotation auf die Achse mit maximalem Trägheitsmoment.

4.1.7 Definitheit

Eine quadratische Form Q heisst

$$\begin{array}{rcl rcl} \textit{positiv definit} & \Leftrightarrow & Q(\vec{x}) > 0\ \forall \vec{x} \neq \vec{0} & \textit{positiv semi-definit} & \Leftrightarrow & Q(\vec{x}) \geq 0\ \forall \vec{x} \\ \textit{negativ definit} & \Leftrightarrow & Q(\vec{x}) < 0\ \forall \vec{x} \neq \vec{0}, & \textit{negativ semi-definit} & \Leftrightarrow & Q(\vec{x}) \geq 0\ \forall \vec{x} \\ \textit{indefinit} & \Leftrightarrow & \text{sonst} & & & \end{array}$$

Eine symmetrische Matrix heisst X-*definit*, falls sie bzgl. einer (und dann jeder) Basis eine X-definite Form definiert. Natürlich ist A genau dann negativ (semi) definit, wenn $-A$ positiv (semi) definit ist.

4.1.8 Hauptachsentransformation

Sei V nun auch noch ein euklidischer Raum, d.h. mit einem Skalarprodukt ausgestattet. ON-Basis bedeutet Orthonormalbasis bzgl. dieses Skalarprodukts.

Satz 4.1.1 *Zu jeder reellen symmetrischen Bilinearform Φ gibt es eine ON-Basis β so, dass Φ^β (reelle) Diagonalmatrix ist.*

Die Basisvektoren $\vec{v}_i$ aus β bzw. die durch sie bestimmten Achsenrichtungen bilden dann ein *Hauptachensystem* für Q und die Diagonaleinträge $\lambda_i = Q(\vec{v}_i)$ die zugehörigen *Eigenwerte*. Alle zu einem Eigenwert λ gehörigen Hauptachsenvektoren $\vec{v}_i$ (d.h. mit $\lambda_i = \lambda$) spannen den *Eigenraum* E_λ auf. Sind nun die z_i die Koordinaten bzgl. β, so können wir Q in der *Hauptachsenform* schreiben

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 z_1^1 + \ldots + \lambda_n z_n^2 \quad \text{für } \vec{x} = \sum_i z_i\vec{v}_i$$

Korollar 4.1.2 • *Äquivalent sind*

  - *Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Minimum nämlich* 0,
  - *alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ (> 0).*
  - *Q ist positiv semidefinit (positiv definit)*

- *Äquivalent sind*
  - *Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Maximum nämlich* 0,
  - *alle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$ (< 0),*
  - *Q ist negativ semidefinit (negativ definit)*

In beiden strikten Fällen, und nur in diesen, hat man elliptische Niveau-Hyperflächen.

Korollar 4.1.3 *Das Maximum von Q unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$ ist der grösste Eigenwert $\lambda_{\max}$, das Minimum der kleinste Eigenwert $\lambda_{\min}$. Sie werden gerade auf den zugehörigen Eigenräumen angenommen.*

Zusatz 4.1.4 *Die Eigenwerte und Eigenräume sind eindeutig bestimmt. Vektoren aus Eigenräumen zu veschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht. ON-Basen der Eigenräume ergänzen sich zu einem Hauptachsensystem.*

Die Korollare liest man sofort ab. Den Beweis von Satz und Zusatz führen wir über die zugehörige symmetrische Bilinearform Φ und ihre Matrix A. Wir beginnen mit $n = 2$. Sei eine ON-Basis α gegeben. Wir suchen ON-Basis

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \quad \text{mit } \Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

Dazu der Ansatz

$$\vec{v}_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0$$

Also

$$(a_{11} - a_{22})x_1 x_2 - a_{12}x_1^2 + a_{21}x_2^2 = 0$$

$$at^2 + bt - a = 0 \quad \text{mit } t = \frac{x_2}{x_1}, \; a = a_{12} = a_{21}, \; b = a_{11} - a_{22}$$

$$t_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1}$$

Daraus x_1 und x_2 und die $\vec{v}_i$ durch Normieren. Hat man $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ so ist der Eigenraum die ganze Ebene und auch λ eindeutig, nämlich $\lambda = Q(\vec{x})$ für alle $\vec{x}$ auf dem Einheitskreis. Andernfalls sind λ_1 und λ_2 als maximaler bzw. minimaler Wert von Q auf dem Einheitskreis bestimmt und werden gerade an den Hauptachsen angenommen - weshalb die auch eindeutig sind.

Nun gehts weiter mit Induktion. Mit analytischem Gelaber folgt, dass es auf der Einheitshyperkugel $\{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ irgendwo am heissesten ist, d.h. es ein $\vec{v}_1$ gibt mit $Q(\vec{v}_1) =: \mu$ maximal. Die darauf orthogonalen Vektoren bilden einen

Untervektorraum $U = \vec{v}_1^\perp$ und für die Einschränkung von Φ auf U können wir's schon anch Induktionsannahme. d.h. es gibt ON-Basis $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ von U mit

$$\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \; i, j > 1$$

Für jedes $i > 1$ haben wir aber den von $\vec{v}_1, \vec{v}_i$ aufgespannten 2-dimensionalen Untervektorraum U_i und da haben wir's ehrlich schon gemacht, sogar mit Zusatz. Weil $Q(\vec{v}_1)$ maximal ist und $\vec{v}_1, \vec{v}_i$ ON-Basis von U_i ist's ein Hauptachsensystem für die Einschränkung von Φ auf U_i, also

$$\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 \quad \text{für } i > 1$$

Das war's für den Satz. Offensichtlich ist μ als Maximum eindeutig bestimmt und der zugehörige Eigenraum E_μ wird gerade von den $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$ und $Q(\vec{v}) = \mu$ erzeugt (und ist damit auch eindeutig bestimmt). Weil ein $\vec{v}$ das auch Anteile in anderen Achsenrichtungen hat, den Maximalwert nicht annehmen kann. Hat man nun irgendein Hauptachsensystem, so liegen die Achsen zu Eigenwerten $\lambda_i < \mu$ in dem Raum $E_\mu^\perp$ aller zu E_μ orthogonalen Vektoren. Der und die Eischränkung von Φ sind eindeutig bestimmt und es folgt alles weitere mit Induktion. □

4.1.9 Ausartung

Die symmetrische Bilinearform Φ bzw. die zugehörige quadratische Form Q heisst *ausgeartet*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

(1) 0 ist ein Eigenwert

(2) Es gibt $\vec{v} \neq 0$ mit $\Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x}$

(3) $\det \Phi^\alpha = 0$ für eine/jede Basis α

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: In einem Hauptachsensystem wähle $\vec{v}$ zum Eigenwert 0. $2 \Rightarrow 3$. Bei Basistransformation $\det S^t A S = (\det S)^2 \det A$. $3 \Rightarrow 1$: Für ein Hauptachsensystem β ist $\det \Phi^\beta = \prod_i \lambda_i$. □

Korollar 4.1.5 *Eine nicht ausgeartete quadratische Form ist pos./neg. definit genau dann, wenn sie pos./neg. semidefinit ist.*

4.1.10 Klassifikation

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation ergeben sich für $n = 2$, neben dem uninteressanten Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, die folgenden Fälle ($\kappa \neq 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$)

Eigenwerte	Definitheit	Höhenlin	Fläche	offen	lok. Verh.
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	positiv	Ellipse	ellipt. Paraboloid	oben	Min.echt
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	negativ	Ellipse	ellipt. Paraboloid	unten	Max.echt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	indefinit	Hyperbel	hyperbol.Parabol.		Sattelpkt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	pos.semidef. ausg.	$\|$ Ger.	parabol.Zylinder	oben	Minimum
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	neg.semidef. ausg.	$\|$ Ger.	parabol.Zylinder	unten	Maximum

Für $\kappa = 0$ hat man Punkt, 2 schneidende Geraden, bzw. Doppelgerade als Höhenlinie.

4.1.11 Geometrisches Beispiel

Gegeben sei bzgl. einer ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Form

$$Q(\vec{x}) = 2x_2(x_1 + x_3) \quad \text{für } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Gesucht ist unter den Vektoren mit $|\vec{x}| = 1$ einer mit $Q(\vec{x})$ maximal. Bei festem x_2 liegen die $(x_1, x_3)^t$ auf einem Kreis und man hat $x_1 + x_3$ zu maximieren. Aus Symmetriegründen muss dann $x_1 = x_3$ sein. Das gesuchte Maximum ist also $\max 4x_2x_1$ auf dem Kreis $\{\vec{x} | |\vec{x}| = 1, x_1 = x_3\}$. Wieder aus Symmetriegründen wird das Maximum bei $x_2 = 1/\sqrt{2}$ angenommen. Ergänzung zu ON-Basis.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \; \vec{w}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3^\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_3) \\ \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}. \quad t := x_2'/x_3', \; t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \sqrt{2}, \; t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{w}_2 + t_1\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 + t_2\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Hauptachsenrichtungen von $\Phi|(\mathbb{R}\vec{w}_2 + \mathbb{R}\vec{w}_3)$. Die Hauptachsen durch Normierung.

$$\vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_3^\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{EW } \lambda_i = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_i), \; \lambda_1 = \sqrt{2}, \; \lambda_2 = 0, \; \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Die Kennfläche ist ein hyperbolischer Zylinder.

4.1.12 Trägheitssatz

Satz 4.1.6 *Zu jeder symmetrischen Bilinearform Φ gibt es eine Basis β so, dass*

$$\Phi^\beta = \begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Signatur *p, q der Form Φ eindeutig bestimmt. (*Sylvester*)*

Beweis. Mit Diagonaliserung erhält man eine reelle Diagonalmatrix $D = T^tAT$ mit Daigonaleinträgen d_{ii}. Setze $S = T\tilde{D}P$, wobei $\tilde{D}$ Diagonalmatrix mit Einträgen $\tilde{d}_{ii} = 1/\sqrt{|d_{ii}|}$ bzw. 0 ist und P passende Permutationsmatrix. Natürlich kann auch schon vorher permutiert werden.

Zur Eindeutigkeit genügt es, den Fall zu betrachten, dass $A' = S^tAS$ und A Diagonalmatrizen sind, und die ersten p bzw. k Diagonaleinträge 1, die nächsten q bzw. l -1 und die restlichen 0 sind. $S^tA = A'S^{-1}$ hat offenbar Spaltenrang $p+q$ und Zeilenrang $k+l$, also $r = p+q = k+l$. Mit der Koordinatentransformation $\boldsymbol{y} = S^{-1}\boldsymbol{x}$ gilt

$$|x_1|^2+\ldots+|x_p|^2-|x_{p+1}|^2-\ldots|x_r|^2 = \boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x} = |y_1|^2+\ldots+|y_k|^2-|y_{k+1}|^2-\ldots-|y_r|^2.$$

Angenommen $p > k$. Dann wird durch $x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ und $y_1 = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_1 = 0, \ldots, y_k = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_k = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem von weniger als n Gleichungen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, also hat man eine Lösung $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Dann folgt aber $|x_1|^2+\ldots+|x_p|^2 = -(|y_{k+1}|^2+\ldots+|y_r|^2) \leq 0$, und damit $x_1 = \ldots x_p = 0$ und doch $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Den Fall $p < k$ schliesst man durch Vertauschen der Rollen von A und A' aus.

4.1.13 Zerlegung

Satz 4.1.7 *Zu jeder quadratischen Form Q auf V gibt es eine orthogonale Zerlegung*

$$V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0 \text{ und } \lambda_+ > 0 > \lambda_-$$

so, dass $\dim V_+, \dim V_-$ *die Signatur von Q ist und*

$$Q(\vec{v}) \geq \lambda_+|\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_+, \ \ Q(\vec{v}) \leq \lambda_-|\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_-, \ Q(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in V_0$$

Beweis. Seien $V_0 = E_0$ und V_+ bzw. V_- Summe der Eigenräume zu positiven bzw. negativen Eigenwerten. Sei λ_+ der kleinste positive, λ_- der grösste negative Eigenwert. Sind die $\vec{v}_i, (i \in I)$ die Hauptachsenvektoren zu den $\lambda_i > 0$ so

$$Q(\vec{v}) = Q(\sum_{i\in I} x_i\vec{v}_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i\in I}\lambda_+ x_i^2 = \lambda_+\sum_{i\in I} x_i^2 = \lambda_+|\vec{v}|^2 \quad \text{für } \vec{v} \in V_+$$

Entsprechend für V_-. □

4.1.14 Symmetrischer Gauss

Die Eigenwerte kann man im wirklichen Leben nur numerisch bestimmen - und auch das ist ziemlich aufwendig. Oft braucht man aber nur ihre Vorzeichen und die können wir, dank Sylvester, ablesen, wenn wir SAS^t diagonal haben mit invertierbarem $S = {}_\alpha T_\beta^t$.

Satz 4.1.8 *Zu jeder reellen symmetrischen Bilinearform Φ auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum gibt es eine Basis β so, dass Φ^β Diagonalmatrix ist*

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i d_i x_i y_i$$

$$\boxed{\text{Zu jedem symmetrischen } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ gibt es invertierbares } S \text{ so, dass } S^tAS \text{ diagonal}}$$

Sind alle Hauptminoren $\det A_{\leq k} \neq 0$*, so kann man* S *als obere Dreiecksmatrix wählen.*

Dabei ist der *Hauptminor* $A_{\leq k}$ die durch die ersten k Zeilen und Spalten gegebene $k \times k$-Untermatrix von A.

Um ein S zu finden, erinnern wir uns, dass nach Gauss jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatizen ist (solchen die die Zeilenumformungen beschreiben). Wir machen also jeweils eine Zeilenumformung gefolgt von der analogen Spaltenunformung, um die Symmetrie zu erhalten, bis wir am Ziel sind.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symmetrischer Gaussalgorithmus: Man kombiniere das Transformationsschema mit dem Zeilen-Gaussalgorithmus zur Bestimmung einer oberen Stufenform. Man erhält symmetrische A_k, also

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & + \end{pmatrix}, \quad A_{k+1} = T_{k+1} A_k T_{k+1}^t, \; S_0 = E, \; S_{k+1} = S_k T_{k+1}^t$$

wobei D_k Diagonalmatrix. Sind alle Hauptminoren $\neq 0$, so gilt stets $a_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$, d.h. man kann die T_{k+1} als untere und somit alle S_k als obere Dreiecksmatrizen wählen.

- Gegeben sei $A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & \begin{pmatrix} b_{k+1,k+1} & \dots & b_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k+1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

- Ist $b_{k+1,k+1} \neq 0$, so bewirke durch Zeilenscherungen, dass die neue $k+1$-te Zeile von 'A' ausserhalb der Diagonalen nur noch Nullen enthält. Ändere die Werte über der Diagonalen von 'A' so, dass wieder eine symmetrische Matrix entsteht

- Ist $b_{k+1,k+1} = 0$ so suche vorher $i > k+1$ mit $b_{i,i} \neq 0$ und vertausche $k+1$-te und i-te Zeile in 'A', ebenso für Spalten von 'A'

- Ist $b_{ii} = 0$ für alle $i > k$, so suche vorher $j > i > k$ mit $b_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$. Addiere in 'A' die j-Zeile zur i-ten und die j-te Spalte zur i-ten. Das ergibt i-ten Diagonaleintrag $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$.

- Ist dummerweise immer $b_{ij} + b_{ij} = 0$, so addiere in 'A' das b_{ij}-fache der j-te Zeile zur i-ten Zeile das b_{ij}-fache der j-ten Spalte zur i-ten Spalte. Das ergibt i-ten Diagonaleintrag $2b_{ij}b_{ij} \neq 0$.

- Sind alle $b_{ij} = 0$ für $j > i > k$, so rufe 'Gott sei Dank'

4.1.15 Definitheitskriterium

Satz 4.1.9 *Für eine symmetrische Matrix A sind gleichwertig:*

- *A ist positiv definit.*
- *Es gibt eine invertierbare Matrix W mit $A = WW^t$.*
- *Die Hauptminoren $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ von A haben* $\det A_{\leq k} > 0$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar nach dem Trägheitssatz. Also ist für positiv definites A die Determinante $\det A = \det(W^tW) = \det W^t \det W = |\det W|^2 > 0$. Andererseits sind für positiv definites A alle Hauptminoren $A_{\leq k}$ positiv definit: für die durch $A_{\leq k}$ definierte quadratische Form $Q_{\leq k}$ gilt: $Q_{\leq k}(x_1, \ldots, x_k) = Q(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) > 0$ falls ein $x_i \neq 0$. Also $\det A_{\leq k} > 0$ für alle k.
Sei nun (3) vorausgesetzt, insbesondere $a_{11} \neq 0$. Also hat man im symmetrischen Gaussalgorithmus sofort $A \rightsquigarrow B = TAT^t$ und es bleibt nur zu zeigen, dass B wieder die Voraussetzung erfüllt. Man beachte, dass für die Hauptminoren gilt $B_{\leq k} = T_{\leq k} A_{\leq k} T_k^t$ d.h. sie haben Determinante $|\det T_{\leq k}|^2 \det A_{\leq k} > 0$. Ist C der $n-1 \times n-1$-Minor $C = (b_{ij})_{1<i,j}$ so ist $C_{\leq k}$ Minor von $B_{\leq k+1}$ und es gilt $\det(B_{\leq k+1}) = a_{11} \det C_{\leq k}$. Also hat C nur positive Hauptminoren und das Verfahren führt zu einer Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen, also schliesslich mit dem Produkt S der Matrizen aus den Einzelschritten zu $SAS^t = E_n$ und $A = WW^t$ mit $W = S^{-1}$.

4.2 Real quadratic and bilinear forms

4.2.1 Graphs and extremal values of real functions in 2 variables

A real function $z = f(x_1, x_2)$ of two real variables x_1, x_2 associates with each pair of real numbers a real number. E.g. with each ccordinate pair of a point on a map one associates the height of the coorresponding point in the landscape. Thus, the graph of a function may be thought of as a surface in space. For given height h one has the *isohypse* of *contour line*

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ f(x_1, x_2) = h\}$$

If the function is suffiently smooth in the neighbourhood of the point (p_1, p_2), it can be locally approximated by polynomials. E.g. for the origin

$$f(x_1, x_2) \approx \sum_{i,j}^{i+j\leq N} b_{ij} x_1^i x_2^j \quad \text{für } x_1 \approx 0,\ x_2 \approx 0$$

For many purposes, $N = 2$ is good enough

$$f(x_1, x_2) \approx b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{02}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

The coefficients are obtained as the partial derivatives at the point, here $(0,0)$

$$b_{00} = f(0,0),\ b_{10} = \frac{\partial z}{\partial x_1},\ b_{01} = \frac{\partial z}{\partial x_2},\ b_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ b_{02} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},\ b_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$$

In general, x_i has to be replaced by $x_i - p_i$. Having an extremal value at $(0,0)$ implies that the tangent plane to the surface has to be horizontal, which means $b_{10} = b_{01} = 0$. The value of b_{00} does not matter. What matters is the *Hesse form*

$$(1)\ \ Q(x_1, x_2) = b_{20}x_1^2 + b_{02}x_2^2 + b_{11}x_1x_2$$

A function given as in (1) is called a *real quadratic form* in 2 variables. It will be shown that choosing a suitable ON-coordinate system with new coordinates noted as x_1', x_2' there are real numbers λ_1, λ_2 such that (1) is transformed into

$$(2)\ \ \tilde{Q}(x_1', x_2') = \lambda_1 {x'}_1^2 + \lambda_2 {x'}_1^2$$

Now, the status of $(0,0)$ w.r.t extremal values, the graphs, and the isohypses can be determined easily

maximum	elliptic paraboloid, open down	concentric ellipses	$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$
minimum	elliptic paraboloid, open up	concentric ellipses	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$
saddle point	hyperbolic paraboloid	pair of hyperbolas	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
impr. extremum	parabolic cylinder	pair of parallel lines	one $\lambda_i = 0$
constant 0	plane	$\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Also observe that the extremal values of Q for points on a given circle with center in the origin occur at the points on the new coordinate axes, i.e. with $x_i' = 0$ for one i.

4.2.2 Quadratic forms in 3 variables and surfaces

A quadratic form in 3 variables is given as

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

with corresponding surfaces

$$\{P \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ Q(x_1, x_2, x_3) = h \neq 0\}$$

which can be imagined as isotherms or isobars of a 3D distribution of temperature resp. pressure. The graph of such form is a 3-dimensional subset of 4-space. Again, reduction will be possible to forms as

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$$

With $h > 0$ one gets the surfaces

$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	ellipsoid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 < 0$	connected hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 < 0$	unconnected hyperboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 = 0$	elliptic cylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_3 = 0$	hyperbolic cylinder
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$	2 parallel planes

Permuting indices resp. $h < 0$ gives analoguous results or the empty set. The coordinate axes are distinguished locating the maximum resp. minimum of $Q(x_1, x_2, x_3)$ under the condition $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$, i.e. considering Q on the unit sphere.

4.2.3 Bilinear forms

In order to define quadratic forms in an axiomatic algebraic setting, we have to consider forms in 2 vectorial arguments. Let V be a real vector space and recall the definition of a *bilinear form* on V: a map $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{v}+\vec{w},\vec{u}) &= \Phi(\vec{v},\vec{u}) + \Phi(\vec{w},\vec{u}) & \qquad \Phi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) &= \Phi(\vec{u},\vec{v}) + \Phi(\vec{u},\vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v},\vec{w}) &= r\Phi(\vec{v},\vec{w}) & \Phi(\vec{v},r\vec{w}) &= r\Phi(\vec{v},\vec{w}) \end{aligned}$$

Shortly, a map which is linear in both arguments.

Now, let $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_n}$ be a basis of V. Then there is a 1-1-correspondence between bilinear forms Φ on V and matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ given by

$$\boxed{\Phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^t A \vec{y}^\alpha, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j))_{n\times n}}$$

$A = \Phi^\alpha$ is called the *(Gram)-matrix* of Φ w.r.t. α. The form Φ is *symmetric*, i.e.

$$\Phi(x,y) = \Phi(y,x) \text{ for all } x, y \in V \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A$$

The *quadratic form* $Q : V \to \mathbb{R}$ associated with a bilinear from Φ is given by

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \Phi(\vec{x},\vec{x}) = (\vec{x}^\alpha)^t A \vec{x}^\alpha = \textstyle\sum_{ij} a_{ij}x_ix_j & \quad &\text{with } \vec{x}^\alpha = (x_1,\ldots,x_n)^t \\ &= \textstyle\sum_i q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j & &\text{with } q_{ii} = a_{ii} \text{ and } q_{ij} = 2a_{ij} \end{aligned}$$

Observe, that

$$(*) \;\; Q(r\vec{x}) = r^2 Q(\vec{x}).$$

Abstractly, $Q : V \to \mathbb{R}$ is a map such that (*) holds and

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$$

is a symmetric bilinear form. Then $Q(\vec{x}) = \Psi(\vec{x},\vec{x})$. If Q is derived from Φ, then $\Psi = \Phi$ if and only if Φ is symmetric. Observe that, given Q in terms of the q_i and q_{ij} one obtains the symmetric matrix A such that $Q(\vec{x}) = \vec{x}^{\alpha t} A \vec{x}^\alpha$ by

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ii} & \text{if } i = j \\ \frac{1}{2}q_{ij} & \text{if } i < j \text{ resp. } j < i \end{cases}$$

An important class of symmetric bilinear forms are the scalar products. These are also *positive definite*: $\Phi(\vec{x},\vec{x}) > 0$ for $\vec{x} \neq \vec{0}$.

4.2.4 Inertial tensors

The inertial momentum $J(\vec{a})$ of a rigid body with mass density $m(\vec{x})$ (expressed via position vectors w.r.t. origin O) w.r.t an axis through O given by $\vec{a}$ (with $|\vec{a}| = 1$) is determined as

$$J(\vec{a}) = \int m(\vec{x}) \cdot |\vec{x} \times \vec{a}|^2 \,\mathrm{d}\vec{x}$$

where $|\vec{x} \times \vec{a}|$ is the distance of the point P given by $\vec{x}$ from the axis given by $\vec{a}$. In place of the integral you may think of a summation over small cubes $d\vec{x}$. Indeed, thinking the mass M located in the point P one has $J(\vec{a}) = M|\vec{x} \times \vec{a}|^2$. Euler has shown that J is a quadratic form. The bilinear form behind is

$$\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \int m(\vec{x}) \cdot \langle \vec{x} \times \vec{a} \,|\, \vec{x} \times \vec{b} \rangle \,\mathrm{d}\vec{x}$$

W.r.t an arbitrary basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ one has for $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{v}_i$

$$J(\vec{a}) = J(\vec{v}_1)a_1^2 + J(\vec{v}_2)a_1^2 + J(\vec{v}_3)a_3^2 + 2d_{12}a_1a_2 + 2d_{13}a_{13} + 2d_{23}a_2a_3$$

For an ON-basis and O the center of mass, the d_{ij} are *deviation momenta* which describe the deviation towards the axis $\vec{v}_j$ given a rotation with axis $\vec{v}_i$.

4.3 $*$-Sesquilinear forms

4.3.1 Fields with involution

As we will see, the proper concepts of linearity and symmetry for forms defined on complex vector spaces have to be formulated using conjugation. The general concept behind is that of a field with involution.

Recall that, given a field K, an *automorphism* of K is an isomorphism $r \mapsto r^*$ of K onto K, i.e. a bijective map such that

$$(r+s)^* = r^* + s^*, \quad (rs)^* = r^*s^*, \quad \text{whence } 0^* = 0,\ 1^* = 1, (-r)^* = -r^*$$

We say that r^* is *conjugate* to r. One has an *involution* if, in addition, $\forall r.\ r^{**} = r$ Examples:

- $\forall r.\ r^* = r$ i.e. $^* = id$, identiy - usually for $K = \mathbb{R}$
- $r^* = (a+bi)^* = \overline{r} = a - bi$ usually for $K = \mathbb{C}$
- $r^* = a - b\sqrt{2}$ for $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

4.3.2 Adjoint matrix

Let K be a field with involution. For $A \in K^{m\times n}$ we define the *adjoint matrix* A^* (or A^H) as the transpose of the conjugate

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{m1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & \dots & a_{nm}^* \end{pmatrix} \in K^{n\times m} \qquad \text{i.e. } (a_{ij})^* = (a_{ij}^*)^t$$

It follows that (if the operations can be carried out)

- $(A+B)^* = A^* + B^*$, $\quad (rA)^* = r^*A^*$, $\quad (AB)^* = B^*A^*$, $\quad E^* = E$, $\quad A^{**} = A$
- A invertible $\Rightarrow$ $\; A^*$ invertible and $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
- $\det(A^*) = (\det A)^*$

4.3.3 $*$-sesquilinear forms

In the sequel, let K be a field with involution and V a K-vector space. A $*$-*sesquilinear form* on V is a map

$$\Phi : V \times V \to K \qquad \text{i.e. } \Phi(\vec{v},\vec{w}) \in K$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{v}+\vec{w},\vec{u}) &= \Phi(\vec{v},\vec{u}) + \Phi(\vec{w},\vec{u}) & \qquad \Phi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) &= \Phi(\vec{u},\vec{v}) + \Phi(\vec{u},\vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v},\vec{w}) &= r^*\Phi(\vec{v},\vec{w}) & \Phi(\vec{v},r\vec{w}) &= r\Phi(\vec{v},\vec{w}) \end{aligned}$$

Examples

- Bilinear forms on $\mathbb{R}$-vector spaces where $r^* = r$ for all r. In particular the scalar product of an euclidean vector space
- Each matrix $A \in K^{n\times n}$ defines a $*$-sesquilinear form on K^n by
$$\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{y} = \sum_{ij} a_{ij}x_i^*y_j$$

Many authors define sesquilinearity exchanging the roles of the arguments. If one does so, the matrix description is $\boldsymbol{x}^tA\overline{\boldsymbol{y}}$. We adopted the more convenient version common in Numerical Analysis.

4.3.4 Gram-matrix

Given a basis $\alpha : \vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ of V there is a 1-1-correspondence between $*$-sesquilinear forms Φ on V and matrices $A \in K^{n\times n}$ such that

$$\boxed{\Phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^*A\vec{y}^\alpha, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j))_{n\times n}}$$

$A = \Phi^\alpha$ is the *(Gram)-matrix* of Φ w.r.t. α.

Proof. A $*$-sesquilinear form is uniquely determined by its values an pairs of basis vectors: if $\vec{x} = \sum_i x_i\vec{v}_i$ and $\vec{y} = \sum_j y_j\vec{v}_j$ then

$$\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_i x_i^*\Phi(\vec{v}_i,\vec{y}) = \sum_i x_i^* \sum_j y_j\Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j) = \sum_{i,j} x_i^*y_j\Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j)$$

4.4 Transformation of sesquilinear forms

4.4.1 Transformation

If β is another basis, then

$$\boxed{\Phi^\beta = {}_\alpha T_\beta^* \Phi^\alpha \, {}_\alpha T_\beta}$$

Proof. $\vec{x}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$, $\vec{y}^\alpha = {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta$, thus

$$(\vec{x}^\beta)^* \, {}_\alpha T_\beta^* \Phi^\alpha \, {}_\alpha T_\beta \vec{y}^\beta = ({}_\alpha T_\beta \vec{x}^\beta)^* \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^* \Phi^\alpha \vec{y}^\alpha = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$$

4.4.2 Rank

- If A and B are Gram-matrices of the same $*$-sesquilinear form Φ, then $\mathsf{rank}A = \mathsf{rank}B$ and there are $0 \neq r \in K$ such that $\det B = rr^* \det A$
- T.f.a.e.
  - $\det A \neq 0$ for some/each Gram-matrix of Φ
  - $\vec{0}$ is the unique vector $\vec{v}$ with $\forall \vec{w}.\ \Phi(\vec{w}, \vec{v}) = 0$
  - $\vec{0}$ is the unique vector $\vec{v}$ with $\forall \vec{w}.\ \Phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$

If the equivalent conditions hold, we say that Φ is *non-degenerate*.

Proof. $B = S^*AS$ implies $\mathsf{rank}A = \mathsf{rank}B$ since S and S^* are invertible. Moreover, $\det B = rr^* \det A$ with $r = \det S \neq 0$. Given $\vec{v}$, choosing a basis α one has $\forall \vec{w}.\ \Phi(\vec{w}, \vec{v}) = 0$ equivalent to $A\vec{v}^\alpha = 0$ - consider $\vec{w}^\alpha = \boldsymbol{e}_i$. Hence, $\vec{v} \neq \vec{0}$ may occur if and only if $\det A = 0$. Analoguously, $\forall \vec{w}.\ \Phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ i.e. $(\vec{v}^\alpha)^* A = 0$ i.e. $A^* \vec{v}^\alpha = 0$ with $\vec{v} \neq 0$ iff $\det A^* = (\det A)^* = 0$.

4.4.3 Elementary tranformations

Recall that every invertible matrix S is a product of elementary matrices $S = T_1 \cdot \ldots \cdot T_m$. Then the transformation with S can re writtn as

$$S^*AS = T_m^* \cdot \ldots \cdot T_1 A T_1 \cdot \ldots T_m^*$$

which leads to the following scheme of computation with matrix pairs $A_k|S_k$

$$A = A_0 \mid E = S_0, \ldots A_k \mid S_k, \quad A_{k+1} = T_{k+1}^* A_k T_{k+1} \mid S_{k+1} = S_k T_{k+1}, \ldots$$

Now, multiplying with an elementary matrix T on the right amounts to a column operation. The *adjoint row operation* is given by multiplying with T^* on the left. This yileds the following algorithm

- on the S_k perform a column operation
- on A_k perform the same column operation and then the adjoint row operation
- $[Sk := Sk + rSl]^* = [Zk := Zk + r^* Zl]$
- $[Sk := rSk]^* = [Zk := r^* Zk]$
- $[Sk \leftrightarrow Sl]^* = [Zk \leftrightarrow Zl]$

Example

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\rightsquigarrow}{S1 \leftrightarrow S2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\rightsquigarrow}{Z1 \leftrightarrow Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} S2 := S2 + iS1 \\ \rightsquigarrow \\ S3 := S3 + (i-1)S1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 1-i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} Z2 := Z2 - iZ1 \\ \rightsquigarrow \\ Z3 := Z3 - (i+1)Z1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 2-2i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\rightsquigarrow}{S3 := S3 - S2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1 \\ 2-2i & 1+i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\rightsquigarrow}{Z3 := Z3 - Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1 \\ -1-2i & 1-i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$S^*AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & i & 1+i \\ 0 & 1-i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 3 & 2i & 0 \\ -1-2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.4 Triangular form

Lemma 4.4.1 *Let $r^* = \overline{r}$ on $\mathbb{C}$. For any $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ there is invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ such that S^*AS is a lower trangular matrix.*

Algorithm. Case 1: If $a_{11} \neq 0$ transform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & O \\ + & A_1 \end{pmatrix} = S_1^* A S_1 \text{ with } S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Determine S_2 such that $S_2^* A_1 S_2$ is lower triangular and put

$$S = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & S_2 \end{pmatrix}$$

Case 2: $a_{11} = 0$ but there is i with $a_{ii} \neq 0$. Choose a permutation matrix P such that $P^* AP$ has first entry $\neq 0$ and continue as in case 1.
Case 3: $a_{ii} = 0$ for all i but $a_{ij} + a_{ji} \neq 0$ for some i, j. Transform with $[Si := S_i + S_j]$ and continue as in case 2.
Case 4: $a_{ij} = -a_{ji}$ for all i, j but some $a_{kl} \neq 0$. Then $ia_{kl} + \bar{i}a_{lk} = 2ia_{kl} \neq 0$ for some k, l. Transform with $[Sk := Sk + iSl]$ and continue as in case 2.
Case 5. $a_{kl} = 0$ for all k, l. Relax. $\square$

4.5 *-Hermitean forms

4.5.1 Adjoint of a form

With each $*$-sesquilinear form Φ we have the *adjoint* $*$-sesquilinear from Φ^*

$$\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^*$$

Proof. $\Phi^*(r\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, r\vec{x}))^* = (r\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*(\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$ and $\Phi^*(\vec{x}, r\vec{y}) = (\Phi(r\vec{y}, \vec{x}))^* = (r^*\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^{**}(\Phi(\vec{x}, \vec{y}))^* = r\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$.

The adjoint form comes with the adjoint matrix (since $(\boldsymbol{y}^* A\boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{x}^* A^* \boldsymbol{y}$)

$$\boxed{(\Phi^*)^\alpha = (\Phi^\alpha)^*}$$

4.5.2 *-Hermitean $*$-sesquilinear forms

A sequilinear form Φ on V is *$*$-hermitean* or *self adjoint*, if $\Phi = \Phi^*$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V.\ \ \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y})^* \text{ i.e. } \Phi^\alpha = (\Phi^\alpha)^* \text{ w.r.t. some/each basis } \alpha$$

Φ is *$*$-skew hermitean* if $\Phi = -\Phi^*$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V.\ \ \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = -\Phi(\vec{x}, \vec{y})^* \text{ i.e. } \Phi^\alpha = -(\Phi^\alpha)^* \text{ w.r.t. some/each basis } \alpha$$

A matrix A is *$*$-(skew) hermitean* , if $A^* = A$ resp. $A^* = -A$.

A $*$-sesquilinear form Φ on V is *orthosymmetric* if

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \quad \text{for all } \vec{x},\, \vec{y} \in V$$

This includes all $*$-(skew)hermitean forms.

If U is a vector subspace of V then the restriction $\Phi|U$ of Φ is $*$-sesquilinear and inherits any of the above properties which apply to Φ.

4.5.3 $*$-Hermitean forms

The $*$- *hermitean form* Q associated with the $*$-hermitean $*$-sequilinear form Φ is

$$Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x},\vec{x}) = (\vec{x}^\alpha)^* A\vec{x}^\alpha = \sum_{ij} a_{ij} x_i^* x_j \quad \text{with } A = \Phi^\alpha, \boldsymbol{x} = \vec{x}^\alpha$$

Observe that

$$Q(\lambda\vec{x}) = \lambda\lambda^* Q(\vec{x})$$

4.5.4 Diagonalizing $*$-hermitean forms

An obvious but important observation is the following: Given a $*$-sesquilinear form Φ on V and a basis $\beta : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, then

$$\boxed{\Phi^\beta \text{ is diagonal if and only if } \Phi(\vec{v}_i,\vec{v}_j) = 0 \text{ for all } i \neq j}$$

Such β are called Φ- *orthogonal bases.* For $*$-hermitean forms, it suffices to consider all $i < j$ resp. all $i > j$.

Theorem 4.5.1 *Let $1+1 \neq 0$ in K. For any $*$-hermitean form Φ on a finite dimensional K-vector space there is a β such that Φ^β is diagonal*

$$\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_i d_i x_i^* y_i, \quad Q(\vec{x}) = \sum_i d_i x_i^* x_i \quad \textit{for } \boldsymbol{x} = \vec{x}^\beta,\ \boldsymbol{y} = \vec{y}^\beta$$

$$\boxed{\textit{For any } *\textit{-hermitean } A \textit{ there is invertible } S \textit{ with } S^*AS \textit{ diagonal}}$$

If one has all principal minors $\det A_{\leq k} \neq 0$*, then one can choose S upper triangular.*

The *principal minor* $A_{\leq k}$ is the $k \times k$-matrix $(a_{ij})_{i,j \leq k}$ having entries only from the first k columns and rows of A.

$*$-Gaussian algorithm: Combine the scheme of transformations with the Gaussian algorithm on columns for determining lower echelon form. This provides $*$-hermitean A_k, whence

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & + \end{pmatrix}, \quad D_k \text{ diagonal}$$

If all principal minors have determinant $\neq 0$ then $a^{(k)}_{k+1,k+1} \neq 0$, i.e. no permutations are needed and one can choose the T_{k+1} whence all S_k upper triangular.

- ▶ Assume that $1 + 1 \neq 0$
- ▶ Given $A_k = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & \begin{pmatrix} b_{k+1,k+1} & \ldots & b_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k+1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

- If $b_{k+1,k+1} \neq 0$, apply column shearings to ensure that the $k+1$-th row of 'A' has 0 outside the diagonal. Apply the same shearing to 'S'. Change the values below the diagonal of 'A' to produce a $*$-hermitean matrix (this is the effect of applying the adjoint row shearings)
- If $b_{k+1,k+1} = 0$ then first search for $i > k+1$ with $b_{i,i} \neq 0$ and exchange $k+1$-th with i-th column in 'A' and in 'S', same for rows of 'A'
- If $b_{ii} = 0$ for all $i > k$, then first search for $j > i > k$ with $b_{ij} \neq 0$ and $b_{ij} + b_{ij}^* \neq 0$. Add in 'A' and 'S' the j-th column to the i-th column and then in 'A' the j-th row to the i-th row. This turns the i-th diagonal entry into $b_{ij} + b_{ij}^* \neq 0$.
- If, stupidly, always $b_{ij} + b_{ij}^* = 0$, then first search for $b_{ij} \neq 0$ and add in 'A' and 'S' the b_{ij}^*-fold of the j-th column to the i-th column and then in 'A' the b_{ij}-fold of the j-th row to the i-th row. This yields i-th diagonal entry $2b_{ij}b_{ij}^* \neq 0$.
- If $b_{ij} = 0$ for all $j > i > k$, relax.

Bonus problem. Find a trick to deal with the case where $1+1=0$ but $r^* \neq r$ for some $r \in K$. What happens if $1+1=0$ and $r^* = r$ for all r?
Examples

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S2 := S2 + \frac{1}{2}S1 \\ \leadsto^* \\ S3 := S3 - \frac{1}{2}S1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \leadsto^* \\ S3 := S3 - \frac{1}{3}S2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S1 := \frac{1}{2}S1 \\ \leadsto^* \\ S2 := \frac{1}{3}S2 \\ S3 := \frac{1}{\sqrt{2}}S3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leadsto^* \\ S1 := S1 - iS2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & i & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i & -i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S2 := S2 - \frac{i}{2}S1 \\ \leadsto^* \\ S3 := S3 - \frac{1}{2}S1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -i & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leadsto^* \\ S3 := S3 - iS2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{i}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

4.6 Hermitean forms

4.6.1 Hermitean sesquilinear forms

Let $\mathbb{K}$ be a subfield of $\mathbb{R}$ with $r^* = r$ for all r or $\mathbb{K}$ a subfield of $\mathbb{C}$ closed under conjugation with $r^* = \overline{r}$ for all r, Then, a $*$-sesquilinear form will just be called *sesquilinear*. Moreover, a $*$-(skew)hermitian sequilinear form or matrix is called (*skew*) *hermitean*. Observe that then $a_{ii} \in \mathbb{R}$ for all i resp.

$\Phi\vec{x},\vec{x}) \in \mathbb{R}$ for all $\vec{x}$. If $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ then instead of (skew)hermitean we say (*skew) symmetric.*

If Φ hermitean or symmetric, one can recover Φ from Q (so that one can just address Q as a *hermitean form*)

$$\mathsf{Re}\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\mathsf{Re}(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$$

$$\mathsf{Im}\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \mathsf{Re}\Phi(\vec{x},-i\vec{y})$$

Indeed, $Q(\vec{x}+\vec{y}) = 2\mathsf{Re}\Phi(\vec{x},\vec{y})$ and $\mathsf{Re}\Phi(\vec{x},-i\vec{y}) = \mathsf{Re}(-i\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \mathsf{Im}\Phi(\vec{x},\vec{y})$.

Observe that all the determinants of Gram-matrices of a hermitean form are real and that all have the same sign.
Proof. $\det A = \det(A^*) = (\det A)^*$, thus real and $(\det S)^*(\det S) = |\det S|^2 > 0$.

For an orthosymmetric sequilinear form of $\mathsf{rank}\Phi \geq 2$ on a $\mathbb{C}$-vector space there is always a hermitean Ψ and $c \in C$ such that $\Phi = c\Psi$, cf Huppert, Angewandte Lineare Algebra V.2.5).

4.6.2 Sylvester's theorem of inertia

Theorem 4.6.1 *For any hermitean form Φ on a finite dimensional $\mathbb{K}$-vector space there is a basis β such that*

$$\Phi^\beta = \begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

The signature p, q *of Φ is uniquely determined.*

Proof. Diagonalizing one obtains a hermitean diagonal matrix $D = T^*AT$ with real diagonal etries d_{ii}. Let $S = T\tilde{D}P$, where $\tilde{D}$ is diagonal with entries $\tilde{d}_{ii} = 1/\sqrt{|d_{ii}|}$ resp. 0 and P a suitable permutation matrix.

For uniqueness it suffices to consider the case that $A' = S^*AS$ and A are diagonal, the frist p resp. k diagonal entries are 1, the next q resp. l are -1, and the remaining ones 0. Obviously, $S^*A = A'S^{-1}$ has column rank $p+q$ and row rank $k+l$, whence $r = p+q = k+l$. The coordinate transformation $\boldsymbol{y} = S^{-1}\boldsymbol{x}$ yields

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \ldots |x_r|^2 = \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x} = |y_1|^2 + \ldots + |y_k|^2 - |y_{k+1}|^2 - \ldots - |y_r|^2.$$

Assume $p > k$. Then, if $[B]_i$ denotes the i-th row of B,

$$x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0, \quad y_1 = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_1 = 0, \ldots, y_k = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_k = 0$$

is a homogeneous system of less than n linear equation in variables $x_1, \ldots, x_n$ whence it has a solution $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. It follows

$$0 \leq x_1|^2 + \ldots + |x_p|^2 = -(|y_{k+1}|^2 + \ldots + |y_r|^2) \leq 0$$

whenve $x_1 = \ldots x_p = 0$ and $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, a contradiction. The case $p < k$ is dealt with exchangig the roles of A and A'. $\square$

4.6.3 Definiteness

For any hermitean Φ on an n-dimensional $\mathbb{K}$-vector space resp. (Gram)-matrices A one defines

positively definite	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}.\ \Phi(\vec{x},\vec{x}) > 0$	$\Leftrightarrow p = n$
positively semi-definite	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}.\ \Phi(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$	$\Leftrightarrow q = 0$
negatively definite	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}.\ \Phi(\vec{x},\vec{x}) < 0$	$\Leftrightarrow q = n$
negatively semi-definite	$\Leftrightarrow \forall \vec{x} \neq \vec{0}.\ \Phi(\vec{x},\vec{x}) \leq 0$	$\Leftrightarrow p = 0$
indefinite	else	

A semidefinite matrix is invertible if and only if it is definite. Φ is negatively definite if and only if $-\Phi$ is positively definite.

Theorem 4.6.2 *For a hermitean matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ t.f.a.e.:*

- *A is positively definite.*
- *There is invertible $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (which can be choosen upper triangular) with $A = S^*S$.*
- *The principal minors $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ of A have* $\det A_{\leq k} > 0$.

Proof. By Sylvester's theorem, one has for positively definite A determinant $\det A = \det(S^*S) = \det S^* \det S = |\det S|^2 > 0$. 2 $\Rightarrow$ 1: $\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = (S\boldsymbol{x})^*(S\boldsymbol{x}) > 0$ if $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (whence $S\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$). 1 $\Rightarrow$ 3: If A is positively definite, then so are all principal minors $A_{\leq k}$: for the quadratic form $Q_{\leq k}$ defined by such one has $Q_{\leq k}(x_1,\ldots,x_k) = Q(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0) > 0$ if some $x_i \neq 0$. Thus $\det(A_{\leq k}) > 0$.
3 $\Rightarrow$ 2: In particular $a_{11} \in \mathbb{R}$ since A is hermitean. Now, $a_{11} > 0$ by hypothesis. Let

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

The principal minors $(AT)_{\leq k}$ of AT are of the form $A_{\leq k}T_{\leq k}$ and $\det T_{\leq k} = 1$. Applying T^* on the left and with a similar observation one obtains hermitean

$$T^*AT = B = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \det A_{\leq k} = \det(T^*_{\leq k}A_{\leq k}T_{\leq k}) = \det B_{\leq k} = a_{11}\det C_{\leq k-1}$$

Thus, the principal minors of C have real determinants > 0 and by inductive hypothesis there is an upper triangular matrix U with $C = U^*U$. Then

$$A = S^*S \text{ with } \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & O \\ O & U \end{pmatrix} T^{-1}$$

4.6.4 Cholesky matrix decomposition

The matrix S provided by the proof is upper triangular, Thus, for positively definite A one can solve

$$\boxed{R^*R = A \quad R \text{ upper triangular}}$$

computing R row by row

- ► $r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - (|r_{1k}|^2 + \ldots + |r_{k-1,k}|^2)}$
- ► $r_{kj} = \frac{1}{r_{kk}}[a_{kj} - (r_{k1}r_{1j} + \ldots + r_{k,k-1}r_{k-1,j})]$

Since triangular matrices are easy to invert this procedure can be used to solve systems of linear equations with positively definite matrix.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.6.5 Radical

Given an *-hermitean form Φ on a vector space V define the *radical*

$$\mathsf{rad}\Phi = \{\vec{x} \in V \mid \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ for all } \vec{y} \in V\}$$

Lemma 4.6.3 $\mathsf{rad}\Phi$ *is a vector subspace. If $\beta : \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ is a basis such that Φ^β is diagonal, then*

$$\mathsf{rad}\Phi = \mathsf{span}\{\vec{w}_i \mid \Phi(\vec{w}_i, \vec{w}_i) = 0\}.$$

$\dim \mathsf{rad}\Phi = \dim V - \mathsf{rank}\Phi^\gamma$ *where γ is any basis of V.*

Proof. Consider $\vec{x}, \vec{z} \in \mathsf{rad}\Phi$. Then $\Phi(r\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = \Phi(r\vec{x}, \vec{y}) + \Phi(r\vec{x}, \vec{y}) = r^*\Phi(\vec{x}, \vec{y}) + 0 = r^* \cdot 0 = 0$ for all $\vec{y} \in V$. Thus, $\mathsf{rad}\Phi$ is a linear subspace. Now, choose a basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ of $\mathsf{rad}\Phi$ and complete to a basis α of V. Then

$$A = \Phi^\alpha = \begin{pmatrix} O_{k,k} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

and by Thm.4.5.1 there is an invertible matrix S_{22} such that $S_{22}^*A_{22}S_{22} = D_{22}$ is diagonal. With

$$S = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & S_{22} \end{pmatrix} = {}_\alpha T_\beta \text{ one gets } S^*AS = \begin{pmatrix} O_{k,k} & O \\ O & D_{22} \end{pmatrix} = D$$

which diagonal. For $\beta : \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ we have $\vec{w}_i = \vec{v}_i$ for $i \leq k$. Moreover, $d_{ii} \neq 0$ for $i > k$ since otherwise $\Phi(\vec{w}_i, \vec{w}_j) = 0$ for all j and so $\vec{w}_i \in \mathsf{rad}\Phi$. Thus, $\mathsf{rank}A = \mathsf{rank}D = n - k = \dim V - \dim \mathsf{rad}\Phi$. And we know $\mathsf{rank}\Phi^\gamma = \mathsf{rank}A$ for any basis γ of V. Now, given β such that $D = \Phi^\beta$ is diagonal, w.l.o.g. exactly the first k diagonal entries are $\neq 0$. It follows $U = \mathsf{span}\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\} \subseteq \mathsf{rad}\Phi$ and $n - k = \mathsf{rank}D$ whence $\dim U = \dim \mathsf{rad}\Phi$ and so $U = \mathsf{rad}\Phi$. $\square$

4.6.6 Decomposition of a hermitean space

Lemma 4.6.4 *Given a hermitean form Φ on a $\mathbb{K}$-vector space and subspaces U_0, U_+, and U_- such that $U_0 \subseteq \mathsf{rad}\Phi$, $\Phi|U_+$ is positive definite, and $\Phi|U_-$ is negative definite, it folows that the sum $U_0 + U_+ + U_-$ is direct.*

Proof. If $\vec{x} \in U_0 \cap U_+$ then $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ and $\vec{x} = \vec{0}$ by definiteness of $\Phi|U_+$. If $\vec{x} \in U_- \cap (U_0 + U_+)$, then $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ with $\vec{y} \in U_0$ and $\vec{z} \in U_+$ whence $0 \geq \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \Phi(\vec{y}, \vec{y}) + \Phi(\vec{y}, \vec{z}) + \Phi(\vec{z}, \vec{y}) + \Phi(\vec{z}, \vec{z}) = \Phi(\vec{y}, \vec{y}) + \Phi(\vec{z}, \vec{z}) \geq 0$ and so $\vec{x} = \vec{0}$. Thus, $U_- \cap (U_0 + U_+) = \{\vec{0}\}$ and the sum $U_0 + U_+ + U_-$ is direct by Thm.??. □

A direct decomposition $V = \bigoplus_i U_i$ is Φ- *orthogonal* if $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ for all $i \neq j$ and $\vec{x} \in U_i$, $\vec{y} \in U_j$.

Theorem 4.6.5 *For a hermitean form Φ on a finite dimensional $\mathbb{K}$-vector space let*

$$p = \max\{\dim U \mid \Phi|U \textit{ is positive definite}\}, \quad q = \max\{\dim U \mid \Phi|U \textit{ is negative definite}\}$$

Consider subspaces V_+ and V_- of V such that $\Phi|V_+$ is positive definite and $\Phi|V_-$ is negative definite. Then

$$V = \mathsf{rad}\Phi \oplus V_+ \oplus V_- \;\Leftrightarrow\; \dim V_+ = p \textit{ and } \dim V_- = q$$

Moreover, there exists a Φ-orthogonal such decomposition.

This provides another proof of uniqueness in Sylvester's Theorem. *Proof.* The existence follows from Thm.4.5.1: let V_0, V_+ and V_- be spanned by vectors in β such that the corresponding diagonal entry is $= 0$, > 0, and < 0 respectively. And this is even Φ-orthogonal. Given any decomposition, consider a subspace U_+ such that $\Phi|U_+$ is positive definite and $\dim U_+ \geq \dim V_+$. By Lemma 4.6.4, the sum $W = U_+ + \mathsf{rad}\Phi + V_-$ is direct. Therefore, $\dim V \geq \dim W = \dim U_+ + \dim \mathsf{rad}\Phi + \dim V_- \geq \dim V = \dim V_+ + \dim \mathsf{rad}\Phi + \dim V_-$ and $\dim U_+ = \dim V_+$. This shows $\dim V_+ = p$. Similarly, $\dim V_- = q$.

By existence, it follows $\dim V = \dim \mathsf{rad}\Phi + p + q$. Thus, if $\dim V_+ = p$ and $\dim V_- = q$ and $W = \mathsf{rad}\Phi + V_+ + V_-$ then the sum is direct by Lemma 4.6.4 and so $W = V$. □

4.7 Principal axes for hermitean forms

In this section, V is an n-dimensional euclidean resp. unitary space with scalar product $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$. In addition, we consider a hermitean (resp. symmetric in case $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) form Φ on V and look for ON-bases β giving convenient descriptions of Φ. In other terms, given a $n \times n$-matrix $A = \Phi_\alpha$ w.r.t an ON-basis α, we look for transformations with unitary (resp. orthogonal) S to a diagonal matrix $S^* A S = \Phi_\beta$. That such exists, is due to the symmetry property of the matrix A - to be hermitean. The problem can be also understood as follows

- Given two hermitean forms Φ_1, Φ_2, one of them positively definite, find a basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ orthogonal w.r.t both forms. i.e. $\Phi_k(\vec{v}, \vec{v}_j) = 0$ fpr $i \neq j$ and $k = 1, 2$
- Given two hermitean matrices A_1, A_2, one of them positively definite, find an invertible S such that $S^* A_k S$ is diagonal for $k = 1, 2$

4.7.1 Motivation

Given a quadric in space or plane, one looks for a simple description also allowing to discuss properties of metric geometry as distance and area. This requires orthogonal transformation. For the plane, this has been done by the ancient Greek, for space by L.Euler.

The second motivation comes from mechanics: the study of momentum of inertia of a rigid body w.r.t a gven axis, done by J.A. von Segner and L.Euler. Again, only orthogonal transformation makes sense. Here, the ON-basis β is called a system of principal axes. As alrady observed by Euler, the maximum and the minimum of the momentum $J(\vec{a})$ of intertia (w.r.t an axis given by $\vec{a}$ with $|\vec{a}| = 1$) is obained at two of the principal axes. We use this as the basic idea to prove existence.

Lemma 4.7.1 *Consider real numbers $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \lambda_n$. Then*

$$\sum_i \lambda_i r_i \quad \textit{with } r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \sum_i r_i = 1 \quad \textit{is maximal iff } r_{k+1} = \ldots = r_n = 0$$

Proof. Clearly, if all $r_i = 0$ for all $i > k$ then the value is constant $= k\lambda_1$. Now, given $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ with $\sum s_i = 1$ define

$$r_1 = s_1 + \sum_{i>k} s_i, \quad r_i = s_i \ (2 \leq i \leq k), \quad r_i = 0 \, (i > k)$$

It follows $\sum_i r_i = 1$ and $\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i r_i$ since $\lambda_i s_i \leq \lambda_1 s_i$, Moreover, proper inequality takes place if and only if $s_i \neq 0$ for some $i > k$. $\square$

4.7.2 Principal axes transformation

Theorem 4.7.2 *For any hermitean form Φ on a unitary or euclidean space there is an ON-basis β such that Φ^β is a diagonal matrix.*

The basis vectors $\vec{v}_i$ in β resp. the axes given by them form a *system of principal axes* for Φ resp. the associated hermitean (resp. quadratic) form Q and the diagonal entries $\lambda_i = Q(\vec{v}_i)$ are the associated *eigenvalues*, shortly *EW*s (`Eigenwerte`). The set of $\vec{v}_i$ with $\lambda_i = \lambda$ spans the *eigenspace* E_λ. Denoting by z_i the coordinates w.r.t. β, we can write Q in the form

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1 |z_1|^2 + \ldots + \lambda_n |z_n|^2 \quad \text{for } \vec{x} = \sum_i z_i \vec{v}_i$$

Corollary 4.7.3 *Eigenvalues and eigenspaces of Φ are uniquely determined. V is the orthogonal sum of the eigenspaces of Φ. Choosing for each eigenspace an ON-basis, the union forms a system of principal axes.*

Length 1 vectors in the eigenspace E_λ will also be called *eigenvectors* shortly EV (`Eigenvektoren`) w.r.t. the EW λ

Corollary 4.7.4 *The maximum of Q under the restriction $|\vec{x}| = 1$ is the maximal eigenvalue $\lambda_{\max}$, the minimum the minimal eigenvalue $\lambda_{\min}$.*

$$E_{\lambda_{\max}} = \{\vec{x} \in V \mid |\vec{x}| = 1,\ Q(\vec{x}) = \lambda_{\max}\}, \quad E_{\lambda_{\min}} = \{\vec{x} \in V \mid |\vec{x}| = 1,\ Q(\vec{x}) = \lambda_{\min}\}$$

Corollary 4.7.5 • *All eigenvalues are real.*

- *T.f.a.e.*
  - *Q has (strict) minimum at $\vec{0}$. namely* 0,
  - *all eigenvalues $\lambda_i \geq 0$ (> 0).*
  - *Q is positively semidefinite (positively definite)*
- *T.f.a.e.*
  - *Q has a (strict) maximum at $\vec{v}$, namely* 0,
  - *all eigenvalues $\lambda_i \leq 0$ (< 0),*
  - *Q is negatively semidefinite (negatively definite)*

Corollary 4.7.6 Φ *is degenerate if and only if* 0 *is an eigenvalue.*

Corollary 4.7.7 *A matrix $A \in R^{n\times n}$ is symmetric if and only if there is an orthogonal matrix S such that S^tAS is diagonal. A matrix $A \in C^{n\times n}$ is hermitean if and only if there exists an unitary matrix U such that U^*AU is real diagonal.*

The theorem and first corollary are shown by induction on $n = dimV$. That eigenvalues are real follows from the fact that the diagonal matrix Φ^β is hermitean. The second Corollary follows immediately from Lemma 4.7.1 for $\lambda_{\max}$, considering $-Q$ for $\lambda_{\min}$. The remaining claims follow from the theorem, immediately.

Let $n = 2$ and A the Gram-matrix of Φ w.r.t an ON-basis α. We look for an ON-basis

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \quad \text{with } \Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

Observe that vectors with coordinates

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

are orthogonal to each other and have the same length $\sqrt{1 + |t|^2}$. Thus we have to solve

$$(1,\ t)A\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{t} \end{pmatrix}^* A \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

which amounts to solving the quadratic equation

$$(a_{11} - a_{22})t - a_{21}t^2 + a_{12} = 0$$

If A is a real matrix, then we get

$$at^2 + bt - a = 0 \quad \text{with } a = a_{12} = a_{21},\ b = a_{22} - a_{11}$$

$$t_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1} \in \mathbb{R} \quad (\text{ and } t = \pm 1 \text{ if } a_{11} = a_{22})$$

In any case, this yields $t \in \mathbb{C}$ and

$$\vec{v}_1^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+|t|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+|t|^2}} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

If $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ then the eigenspace is the whole plane and λ unique, namely $\lambda = Q(\vec{x})$ for all $\vec{x}$ with $|wx| = 1$. Otherwise, λ_1 and λ_2 are determined as the maximal resp. minimal value of Q for $|\vec{x}| = 1$ and are obtained exactly at the principal axes - which then are also unique.

Now we proceed by induction. With analytical small talk we derive that there is some $\vec{v}_1$ with $Q(\vec{v}_1) =: \mu$ maximal under the restriction $|\vec{v}_1| = 1$. Let $U = \vec{v}_1^\perp$ and apply inductive hypothesis to $\Phi|U$ to obtain an ON-basis $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ of U such that

$$\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j\ i, j > 1$$

For any $i > 1$ we consider $U_i = \mathsf{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_i\}$ and $\Phi|U_i$. Now, $\dim U_i = 2$, a case already dealt with. Since $Q(\vec{v}_1)$ is maximal under $|\vec{x}| = 1$ and $\vec{v}_1, \vec{v}_i$ an ON-basis of U_i we have a system of principal axes for $\Phi|U_i$, in particular

$$\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 \quad \text{for } i > 1$$

This proves the theorem. Evidently, $\mu = \lambda_{\max}$ is uniquely determined as the maximum of Q under $|\vec{x}| = 1$ and the eigenspace E_μ is spanned by the $\vec{v}$ with $|\vec{v}| = 1$ and $Q(\vec{v}) = \mu$ whence it is also uniquely determined.

Moreover, for any systems of principal axes, the axes with eigenvalueen $\lambda_i < \mu$ belong to $E_\mu^\perp$ which is unqiquely determined. Now, consider $\Phi|E_\mu^\perp$ and use inductive hypothesis to derive the uniqueness claims. $\square$

The euclidean case $n = 2$ can be dealt with geometrically: Consider the real function

$$f(\omega) = \Phi(\begin{pmatrix} cos\omega \\ \sin\omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\omega \\ \cos\omega \end{pmatrix}) \quad \omega \in \mathbb{R}$$

By symmetry of Φ we have $f(\frac{\pi}{2}) = -f(0)$ which implies that $f(\omega) = 0$ for some $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4.7.3 Geometric example

Given w.r.t ON-basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ the quadratic form

$$Q(\vec{x}) = 2x_2(x_1 + x_3) \quad \text{for } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Determine a vector with $|\vec{x}| = 1$ and $Q(\vec{x})$ maximal. Fixing x_2, the $(x_1, x_3)^t$ lie on a circle and the task is to maximize $x_1 + x_3$. Due to symmetry this implies $x_1 = x_3$. Thus the maximum is $\max 4x_2x_1$ on the circle $\{\vec{x}||\vec{x}| = 1, x_1 = x_3\}$. Again due to symmetry, the maximum on the sphere is obtained at $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Completion to ON-basis.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^{\alpha} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \vec{w}_2^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_3) \\ \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}. \quad t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \sqrt{2},\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{w}_2 + t_1\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 + t_2\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

These provide the directions of principal axes of $\Phi|(\mathbb{R}\vec{w}_2 + \mathbb{R}\vec{w}_3)$. Normalizing one gets the principal axes.

$$\vec{v}_2^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3^{\alpha} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{EW } \lambda_i = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_i),\ \lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

The surface defined by the quadric is a hyperbolic cylinder $\sqrt{2}y_1^2 - \sqrt{2}y_3^2 = 1$.

4.7.4 Decomposition of a real quadratic form

Theorem 4.7.8 *For any quadratic form Q on the euclidean space V there is an orthogonal decomposition*

$$V = V_+ \oplus^{\perp} V_- \oplus^{\perp} V_0 \ \textit{and}\ \lambda_+ > 0 > \lambda_-$$

such that $\dim V_+, \dim V_-$ *is the signature of Q and*

$$Q(\vec{v}) \geq \lambda_+|\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_+, \ \ Q(\vec{v}) \leq \lambda_-|\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_-, \ Q(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in V_0$$

Proof. Let $V_0 = E_0$ and V_+ resp. V_- the sums of eigenspaces w.rt. positive resp. negative eigenvalues. Let λ_+ be te minimal positive, λ_- the maximal negative eigenvalue. Choosing the $\vec{v}_i, (i \in I)$ as to provide the principal axes for the $\lambda_i > 0$ one has

$$Q(\vec{v}) = Q(\sum_{i \in I} x_i\vec{v}_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i \in I} \lambda_+ x_i^2 = \lambda_+ \sum_{i \in I} x_i^2 = \lambda_+|\vec{v}|^2 \quad \text{for } \vec{v} \in V_+$$

Analogously for V_-. □ Put $E_\lambda = 0$ if λ is not an EW of Q.

4.8 Computation and application

4.8.1 Jacobi rotation method: An example

We discuss, just by an example, an early numerically sound approach to eigenvalue problems. It proceeds by a series of basis transformations, where each basis arises from the preceeding one keeping all but two basis vectors and replacing the latter by an ON-basis of their span such that the sum of squares of all non-diagonal entries decreases, properly.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ has EW/principal axes } -\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ and } \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_1 = S_1^t A S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ EW/principal axes } -1 : \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and } \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \ A_2 = S_2^t A_1 S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ U = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

In general, this will proceed forever. By construction, the matrices A_n converge to a diagonal matrix D. Moreover, some subsequence of the matrices $U_n = S_1 \cdot \ldots \cdot S_n$ will converge to a matrix U such that

$$U^* A U = D$$

providing the principal axes transformation. In particular, the diagonal entries of the A_n will converge to eigenvalues.

4.8.2 Jacobiverfahren *

Ursprung vieler Verfahren zur Bestimmung der EW einer symmetrischen Matrix A ist das folgende Verfahren von Jacobi. Sei σA die Quadratsumme der $n(n-1)/2$ Einträge oberhalb der Diagonalen: $\sigma A = \sum_{i<j} a_{ij}^2$. Dass A Diagonalmatrix ist, bedeutet gerade $\sigma A = 0$, und dem wollen wir nun durch ein Iterationsverfahren immer näher kommen.

Lemma 4.8.1 *Zu jeder symmetrischen $n \times n$-Matrix A_k gibt gibt es eine orthogonale Matrix S_{k+1}, sodass*

$$\sigma A_{k+1} \leq q \sigma A_k \ \textit{für } A_{k+1} = S_{k+1}^t A_k S_{k+1} \ \textit{und } q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}.$$

Sei nun $A_0 = A$ und die A_k, S_k induktiv nach dem Lemma bestimmt. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \sigma A_k = 0$. Die Produktmatrizen $U_k = S_1 \cdot \ldots \cdot S_k$ sind ebenfalls orthogonal. Fasst man $n \times n$-Matrizen als n^2-Tupel auf, so bilden die orthogonalen Matrizen eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ bestehend aus den $(u_{11}, u_{12} \ldots, u_{nn})$, die den Gleichungen $\Sigma_i u_{ij}^2 = 1$ und $\Sigma_i u_{ij} u_{ik} = 0$ für $j \neq k$ genügen - insbesondere $|u_{ij}| \leq 1$, Also hat die Folge U_k eine konvergente Teilfolge U_{k_l} mit Limes U - und U ist auch orthogonal.

$$\sigma(U^t AU) = \lim_{l\to\infty} \sigma(S_{k_l}^t \cdot \ldots \cdot S_1^t AS_1 \cdot \ldots \cdot S_{k_l}) \leq \lim_{l\to\infty} q^{k_l} \sigma A = 0$$

und somit ist $U^t AU$ Diagonalmatrix. Das Dumme ist: Nur der oberste Chef von Herrn Bolzano weiss, welche U_k zu der konvergenten Teilfolge gehören. Nur wenn man n verschiedene EW hat, konvergieren die U_k gegen 'das' Hauptachsensystem.

Beweis des Lemmas. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir A und nehmen an, dass a_{12}^2 das grösste der a_{ij}^2, $i < j$, ist (andernfalls muss man die Basis umordnen, d.h. mit einer Permutationsmatrix transformieren). Über den Fall n=2 finden wir eine Drehmatrix D_ϕ, sodass

$$D_\phi^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} D_\phi$$

Diagonalmatrix ist und setzen

$$S = \begin{pmatrix} D_\phi & 0 \\ 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

Für $A' = S^t AS$ haben wir $a'_{12} = 0$, $a'_{ij} = a_{ij}$ für $2 < i \leq j$ und

$$a'_{1j} = a_{1j} \cos\phi + a_{2j} \sin\phi, \quad a'_{2j} = -a_{1j} \sin\phi + a_{2j} \cos\phi$$

und damit $\sigma A' = \sigma A - a_{12}^2 \leq q\sigma A$.

Man kann zeigen, dass die Diagonalelemente $a_{ii}^{(k)}$ von A_k um weniger als $\sqrt{q^k \sigma A}$ von den in passender Reihenfolge genommenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ abweichen. Dieselbe Schranke gilt für $|A\boldsymbol{u}_j^k - \lambda_j \boldsymbol{u}_j^k|$, d.h. die Spalten von U_k verhalten sich im Rahmen der Rechengenauigkeit wie Eigenvektoren, obwohl die Abweichung (gemessen an den Winkeln) von einer tatsächlichen Basis von Eigenvektoren absolut gross sein kann.

Es gibt jedoch eine wichtige Abänderung des Verfahrens (nach Givens), in der man A durch endlich viele Drehungen auf Tridiagonalgestalt transformiert. Von da kann man auf das charakteristische Polynom kommen, und die Nullstellen mit Näherungsverfahren berechnen.

4.8.3 Comment

Our proof of the theorem on principal axes is an existence proof adequate to the geometric nature of the problem. Unfortunately, unless there are n

distinct EW, none close to another, there is no constructive procedure for finding the vectors according to the existence proof. In iterative approaches like Jacobi's, the approximations of EV will not converge.

Thus, it is reasonable to determine the EW, first. Determining zeros of polynomials explicitely using roots, is impossibe in general for degree ≥ 5 and a mess for degree 3 and 4. But, there are constructive methods for approximations of zeros. Moreover, Numerical Analysis provides a great variety of iterative methods for approximating EWs of symmetric and hermitean matrices.

4.8.4 Right eigenvectors

For a hermitean form we have defined eigenvectors w.r.t. an eigenvalue λ as length 1 members of the eigenspace. We shall give a more direct definition for sesquilinear forms on unitary resp, euclidean spaces, in general.

Given the sesquilinear form Φ on the euclidean or unitary space V a vector $\vec{v}$ a *right eigenvector* w.r.t. the *right eigenvalue* $\lambda \in \mathbb{K}$ if and only if

- $|\vec{v}| = 1$
- $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) = \lambda$
- $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$ forall $\vec{x} \perp \vec{v}$ resp. $\Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$ forall $\vec{x} \perp \vec{v}$

Lemma 4.8.2 *Let A be the matrix of Φ w.r.t. the ON-basis α and $\vec{v} = 1$. Then $\vec{v}$ is a right EV w.r.t the EW λ if and only if*

$$(A - \lambda E)\vec{v}^{\alpha} = \mathbf{0}$$

The right EW are exactly the zeros of the characteristic polynomisl $\chi_A(x) = \det(A - xE)$.

Proof. Writing $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{x}$ for the α-coordinates having a right EV $\vec{v}$ means

$$\boldsymbol{v}^* A \boldsymbol{v} = \lambda, \text{ i.e. } \boldsymbol{v}^*(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = 0, \quad \text{and } \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{v} = 0 \text{ if } \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{v} = 0$$

equivalently (since $\vec{v}$ and the $\vec{x} \perp \vec{v}$ span V)

$$\boldsymbol{x}^*(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{x}$$

i.e. $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Of course, if such solution $\boldsymbol{v}$ of the homogeneous system of linear equations exists, then $\det(A - \lambda E) = 0$. Conversely, if $\det(A - \lambda E) = 0$, then there exists a nontrivial solution, whence also $\boldsymbol{v}$ of length 1. Then $0 = \boldsymbol{x}^*(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{v}$ which implies $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = \vec{x}^* A \vec{v} = 0$ if $\vec{x} \perp \vec{v}$ and $\Phi(\vec{v}, \vec{v}) = \boldsymbol{v}^* A \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}^* \boldsymbol{v} = \lambda$. □

Corollary 4.8.3 *For hermitean and real symmetric forms, $\vec{v}$ is an EV w.r.t. EW λ if and only if $\vec{v}$ is a rigth EV w.r.t. rigth EW λ.*

Proof. By the Theorem on Principal Axes one may assume that A is diagonal. Then the equivalence is obviuos. □

4.8.5 Algebraic recipe for principal axes

Suited only for fake problems.

- Given the hermitean/symmetric form Φ on the unitary resp. euclidean space V by the matrix $A = \Phi_\alpha$ w.r.t. ON-basis α
- Determine the characteristic polynomial $\det(A - xE)$ and its distinct zeros $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in $\mathbb{R}$
- For each λ_i determine a basis for the solution space of $(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{C}^n$ resp. $\mathbb{R}^n$
- Use the Gram-Schmidt process to produce an ON-basis $\vec{v}_{i1}^\alpha, \ldots, \vec{v}_{ik_i}^\alpha$ of the solution space of $(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{C}^n$ resp. $\mathbb{R}^n$
- The $\vec{v}_{11}, \ldots, \vec{v}_{mk_m}$ form a system of principal axes for Φ
- The $\vec{v}_{11}^\alpha, \ldots, \vec{v}_{mk_m}^\alpha$ form the columns of the unitary/orthogonal transformation matrix S
- The diagonal matrix S^*AS has real diagonal entries $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_m, \ldots, \lambda_m}_{k_m}$

Example. Given w.r.t ON-basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ the quadratic form

$$Q(\vec{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \quad \text{for } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(x) = (3-x)[(2-x)^2 - 1], \ \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 1$$

Determine ON-basis for the solution space of $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \vec{v}_1^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine ON-basis for the solution space of $(A - 1E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \vec{v}_3^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.8.6 Singular value decomposition

Lemma 4.8.4 *For $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ the matrices A^*A and AA^* are hermitean resp. symmetric and positively semidefinite. They are positively definite if A is invertible.*

Proof. $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ and $\boldsymbol{x}^*A^*A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^*(A\boldsymbol{x}) = |A\boldsymbol{x}|^2 \geq 0$.

Theorem 4.8.5 *For any matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ there are unitary $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ and $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ and a real diagonal matrix Σ with diagonal entries $\sigma_i > 0$ such that*

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

The singular values σ_i *are unique up to ordering and given as the square roots of EW of AA^*.*

Within the matrices

$$\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

the blocks O have to be choosen adequately. This results into a matrix

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ O \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} \Delta & O \end{pmatrix}$$

with diagonal matrix Δ with possible diagonal entries 0. In the literature, also singlar values 0 are admitted, corresponding to diagonal entriss in this matrix notation.

Algorithm (for exercises)

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- Use the principal axes algorithm to determine unitary S such that
$$S^*A^*AS = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad D \in \mathsf{GL}(k, \mathbb{K})$$
- $V = S$, $\Sigma = \sqrt{D}$ i.e. with diagonal entries $\sqrt{d_{ii}}$
- For $i \le k$ divide the i-th columns of AS by $\sqrt{d_{ii}}$ to obtain an ON-system (the remaining ones are $\mathbf{0}$)
- Complete to ON-basis which provides the columns of U. Thus
$$U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Proof. Indeed, the columns $\boldsymbol{x}_i$ with $i > k$ of AS are zero, since

$$\boldsymbol{x}_i^* \cdot \boldsymbol{x}_i = 0$$

Thus

$$AS = AS \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$U = U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_l \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix}$$

$$U^*AV = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} S^*A^*AS + \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_l \end{pmatrix} U^*AS \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} D + O = \begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

since the last l rows of U^*, i.e. the last l columns of U are orthogonal to the first k columns of AS (by orthonormal completion) and the remaining columns of AS are zero. □

4.8.7 Square root of a matrix

Theorem 4.8.6 *For any positively semidefinite $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ there is exactly one positivly semidefinite matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ such that $B^2 = A$.*

Proof. There is unitary resp. orthogonal S with $S^*AS = D$ diagonal, where the diagonal entires are the eigenvalues λ_i, whence real and ≥ 0. Let $\sqrt{D}$ be the diagonal matrix with diagonal entries $\sqrt{\lambda_i}$, whence $\sqrt{D}^2 = D$. Then put

$$B = S\sqrt{D}S^*$$

Uniqueness. If $\vec{v}$ is an EV of B w.r.t. EW μ, then $\vec{v}$ is EV of A w.r.t. EW μ^2. Thus the eigenspace $E_\mu(B)$ of B w.r,t μ is contained in the eigenspace $E_{\mu^2}(A)$ of A w.r.t. μ^2. Due to $\mu \geq 0$, distsinct μ give distinct μ^2, whence

$$\sum_\mu \dim E_\mu(B) = n = \sum_m u \dim E_{\mu^2}(A), \quad E_\mu(B) \subseteq E_{\mu^2}(A)$$

and so $E_\mu(B) = E_{\mu^2}(A)$. Therefore, the the eigenspaces of B and, consequently, B are uniquely determined. □

4.9 Normal matrices and sesquilinear forms

Here, we consider unitary spaces of finite dimension. Our aim is to characterize those sesquilinear forms which can be described by a diagonal matrix w.r.t a suitable ON-basis. We look at matrices first.

4.9.1 Schur's Lemma

Corollary 4.9.1 *In a unitary space, each sesquilinear form admits a right EV.*

Proof. Let A be the matrix of Φ w.r.t. an ON-basis β. By the Fundamental Theorem of Algebra, Choose λ as a zero of $\det(A - xE)$ and $\vec{v}^\beta$ as a nontrivial solution of $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. The claim follows with Lemma 4.8.2. □

Theorem 4.9.2 *For any sesquilinear from Φ on a finite dimensional unitary space there is an ON-basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ such that*

$$\forall i > j.\ \ \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$$

Each $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ admits a transformation by a unitary matrix S to upper triangular form $A' = S^*AS$ with its right EWs on the diagonal. If A is real with only real right EWs, then S can be choosen orthogonal.

Proof by induction on n: Choose $\vec{v}_1$ by the corollary and $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ as ON-basis of the orthogonal complement $\vec{v}_1^\perp$ of $\vec{v}_1$ and suitable for the restriction $\Phi|\vec{v}_1^\perp$. □

Algorithm (for exercises)

- ► Given sesquilinear form Φ by its Gram-matrix $A = \Phi_\alpha$ w.r.t. ON-basis α
- ► Determine the characteristic polynomial $\mathsf{Det}(A - \xi E)$ and its zeros, i.e. the EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{C}$ (with multiplicity).
- ► Determine a sequence $A_0 = A \mid U_0 = E, \dots, A_n \mid U_n$ of matrix pairs where U_k is unitary and

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & + \\ O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{with } D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & + & \dots & + \\ 0 & \lambda_2 & & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

- ► Iteration: Determine EV $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \mathbb{C}^{n-k}$ ov B_k w.r.t. EW λ_{k+1} solving $(B_k - \lambda_{k+1}E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
- ► Complete $\boldsymbol{v}_{k+1}$ to ON-basis $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ of $\mathbb{C}^{n-k}$
- ► Let T be the matrix with columns n $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Put

$$U_{k+1} = U_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}, \quad A_{k+1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T^* \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}$$

- ► $A_n = U_n^* A U_n$ is upper triangular, U_n unitary.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4i \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\det(A - \xi E) = (1-\xi)(3-\xi)(2i-\xi) - 12 - 4(1-\xi) - 3(4i-\xi) \\ &= (4i-\xi)(\xi^2 - 4\xi) + 4(\xi - 4) = \\ &= (\xi - 4)[\xi(4i - \xi) + 4] = -(\xi-4)(\xi-2i)^2 \end{aligned}$$

$$\text{EW } 4: \quad (A - 4E) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -4+4i \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

normalize und complete to ON-basis $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = S_1^* A S_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & + \\ O & B \end{pmatrix}$

$$\det(B - \xi E) = -\xi((4i - \xi) - 4 = \xi^2 - 4i\xi - 4 = (\xi - 2i)^2, \quad \text{EW } 2i$$

$(B - 2iE)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ normalize and complete to ON-basis $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$T^*BT = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad S = S_1 S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -i \\ \sqrt{2} & 1 & i \\ 0 & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S^*AS = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} + \sqrt{2}i & \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 0 & 2i & 4 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

4.9.2 Normal matrices

Matrices A with $AA^* = A^*A$ are *normal*. Hermitean, unitary and diagonal matrices are normal, obviuosly.

Lemma 4.9.3 *If A is normal and U unitary, then U^*AU is normal.*

Proof.. $(U^*AU)^*U^*AU = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = u^*AU(U^*AU)^*$. □
Warning: Under non-unitary transformation normality can be lost

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.9.4 *Let $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ with $AA^* = A^*A$ and $a_{i1} = 0$ for $i12$. Then also $a_{1j} = 0$ for $j > 1$*

Proof

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & + & \dots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & + & \dots & \end{pmatrix},\quad A^* \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{a}_{12} & + & \dots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & + & \dots & \end{pmatrix},$$

Hence we get the first entry of $AA^* = A^*A$

$$a_{11}\overline{a}_{11} = a_{11}\overline{a}_{11} + a_{12}\overline{a}_{12} + \ldots + a_{1n}\overline{a}_{1n}$$

It follows $\quad |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2 = 0 \quad$ and $\quad a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$ □

Corollary 4.9.5 *Any normal triangular matrix is diagonal.*

Proof by induction.

$$A = \begin{pmatrix} a & O \\ O & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} aa^* & O \\ O & BB^* \end{pmatrix} = AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} a^*a & O \\ O & B^*B \end{pmatrix}$$

where B is triangular with $BB^* = B^*B$. By inductive hypothesis B is diagonal, whence A, too.. □

4.9.3 Spectral theorem for matrices

Theorem 4.9.6 *A matrix $A \in C^{n \times n}$ is normal if and only if there is unitary U such that $D = U^*AU$ is diagonal.*

Proof. By Schur there is unitary U such that $D = U^*AU$ is upper triangular. By the above lemmata, D is also normal whence diagonal. The converse is obvious. □

4.9.4 Normal sesquilinear forms

Theorem 4.9.7 *For a sesquilinear form Φ on unitary V t.f.a.e.*

(1) There is an ON-basis γ of V such that Φ^γ is diagonal

(2) Φ^β is normal for some/each ON-basis β

(3) If $\vec{v}$ is a right EV *of Φ then it is also a* left EV *i.e. $|\vec{v}| = 1$ and $\Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$ for all $\vec{x} \perp \vec{v}$*

Forms satisfying these conditions are *normal*. Proof. 2 $\Rightarrow$ 1. Assume that $A = \Phi^\beta$ is normal for some ON-basis β. By the Spectral Theorem we have unitary U such that $D = U^*AU$ is diagonal. Let γ such that $U = {}_\beta T_\gamma$. Then $D = \Phi^\gamma$. Conversely $1 \Rightarrow 2$ by Lemma 4.9.3.

$2 \Rightarrow 3$. Given a right EV $\vec{v}$ one may assume $|\vec{v}| = 1$ and complete to an ON-basis β. By hypothesis, $A = \Phi^\beta$ is normal and the $a_{i1} = 0$ for $i > 1$. By Lemma 4.9.4 it follows $a_{1j} = 0$ for $j > 1$. But this means that $\vec{v}$ is a left EV.

$3 \Rightarrow 1$: Proof by induction on $\dim V$. Choose $\vec{v}_1$ as a normed EV of Φ according to Cor.4.9.1. Let $U = \vec{v}_1^{\perp}$. Consider any right EV $\vec{v}$ of $\Phi|U$. We claim that $\vec{v}$ is also a right EV of Φ. So let $\vec{x} \in V$ with $\vec{x} \perp \vec{v}$. We have $\vec{x} = r\vec{v}_1 + \vec{u}$ with $\vec{u} \in U$ and $\vec{u} \perp \vec{v}$ whence $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. It follows $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = \overline{r}\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 0 = 0$. Thus, $\vec{v}$ is a right EV of Φ, indeed. By hypothesis, $\vec{v}$ is also a left EV of Φ, whence of $\Phi|U$. Now, by inductive hypothesis there is an ON-basis $\delta : \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ of U such that $(\Phi|U)^\delta$ is diagonal. Let $\gamma = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Then Φ^γ is diagonal. $\square$

Comment. For orthosymmetric forms one may avoid the use of the Fundamental Theorem and proceed as for hermitean forms: one chooses the normed vector $\vec{v}_1$ (which is to become the first EV) such that $Q(\vec{v}_1) = (\mathsf{Re}Q(\vec{v}_1), \mathsf{Im}Q(\vec{v}_1))$ is maximal under the lexicographic order on real and imaginary parts.

This approach fails for normal forms, in general. The reason is that the restriction of a normal form to a subspace may fail to be normal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A is a multiple of an orthogonal matrix whence normal. B describes the restriction to $\mathsf{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ but is not normal.

Later, we will obtain a proof for normal matrices which does not use the Fundamental Theorem, but uses only the Theorem on Principal axes for hermitean matrices. Though, this proof is more appropriately considered with in the framework of endomorphisms.

4.10 Quadratic sets and transformation

A general assumption for this chapter is that K is a field with $1 + 1 \neq 0$. For affine spaces over K, we study quadratic equations and the point sets they define w.r.t. a coordinate system. We first show that by transformation to a new coordinate system and then multiplication with a constant one may achieve one of 3 types of a standard form description. We then characterize these types by properties of the point set $\mathcal{Q}$ - which implies that no two distinct types may be obtained. For $K = \mathbb{R}$ we strengthen the standard form to a proper canonical form w.r.t. affine resp. euclidean tranformation. Finally, assuming existence of square roots we show that the point set $\mathcal{Q}$ determines the the equation up to a constant factor.

4.10.1 Affine description of quadric sets

Given a finite dimensional affine space $(\mathbb{P}, V)$, a *quadratic set* is a set $\mathcal{Q}$ of points such that

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) + \phi(\vec{x}) + c = 0\}$$

where

- Φ is a symmetric bilinear form on V with associated quadratic form Q
- ϕ is a linear form on V
- c is a constant in K
- O is an point (origin) in $\mathbb{P}$

Given a basis $\alpha : \vec{v}_1 \ldots, \vec{v}_n$ of V, the Gram-matrix A of Φ, and the matrix $\boldsymbol{b}^t$ of ϕ (w.r.t. the bases α of V and 1 of K) this reads

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid \vec{x}^\alpha = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \vec{x} + c = 0\}$$

In homogeneous coordinates w.r.t. $O_\alpha = O$ we get, immediately,

$$(*)\quad \mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid (P^{\tilde{\alpha}})^t \tilde{A} P^{\tilde{\alpha}} = 0\} \quad \text{where } \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} & A \end{pmatrix}$$

To recover the affine description just choose $P^{\tilde{\alpha}}$ with first entry 1.

4.10.2 Affine transformation

W.r.t. a new coordinate system β we get

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid (P^{\tilde{\beta}})^t ({}_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}}^t \tilde{A}\, {}_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}}) P^{\tilde{\beta}} = 0\}$$

Thus, if the transformation matrix is

$$S = {}_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ \mathbf{t} & T \end{pmatrix}$$

then the new matrix is

$$S^t \tilde{A} S = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{t}^t \\ \mathbf{0} & T^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ \mathbf{t} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{t}^t \\ \mathbf{0} & T^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{t} & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t T \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{t} & AT \end{pmatrix}$$

$$S^t\tilde{A}S = \begin{pmatrix} c + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}^t A\boldsymbol{t} & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t T + \boldsymbol{t}^t AT \\ T^t\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + T^t A\boldsymbol{t} & T^t AT \end{pmatrix}$$

If the origin is unchanged, we have $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ and

$$S^t\tilde{A}S = \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t T \\ T^t\frac{1}{2}\boldsymbol{b} & T^t AT \end{pmatrix}$$

If only the origin is changed then $T = E$ and

$$S^t\tilde{A}S = \begin{pmatrix} c + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}^t A\boldsymbol{t} & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t + \boldsymbol{t}^t A \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{t} & A \end{pmatrix}$$

It follows that, whether a point set $\mathcal{Q}$ can be described as a quadratic set, does not depend on the choice of origin.

Multiplying the equation with a constant $k \neq 0$ does not change the associated quadratic set. Since scalars commute with matrices, it follows that the description $\tilde{A}'$ of a quadratic set arises from the description $\tilde{A}$ by changes of coordinate systems and multiplications with constants is and only if

$$S^t\tilde{A}S = k\tilde{A}' \quad \text{with } k \neq 0.$$

Warning. So far we deal with a quadratic set only in connection with a description w.r.t. an origin resp. a coordinate system. That, given such data, the description is unique up to a constant factor will be shown later under assumptions on the quadratic set ($\mathcal{Q}$ not to be contained in a hyperplane) and on the field (which could be avoided).

4.10.3 First reduction step

By the symmetric Gaussian algorithm, we can choose T such $D = T^t AT$ is diagonal. And we may achieve that $\lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow i \leq r$ for the diagonal entries λ_i of D

$$D = \begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad D_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Thus, with

$$_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^t \\ \boldsymbol{0} & T \end{pmatrix}$$

we obtain

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid (P^{\tilde{\beta}})^t \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^t \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{d} & D \end{pmatrix} P^{\tilde{\beta}} = 0\} \quad \text{where } D \text{ is diagonal and } \boldsymbol{d} = T^t\boldsymbol{b}$$

Now, apply the transformation

$$_{\tilde{\beta}}T_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{t} & P \end{pmatrix} \text{ with } t_i = -\frac{d_i}{2\lambda_i} \text{ for } i \leq r \text{ and } t_i = 0 \text{ for } i > r$$

where $P = P_\sigma$ is the permutation matrix for $\sigma = (i\, n)$ if $d_n = 0$ but $d_i \neq 0$ for some $i > r$ or, otherwise, $P = E$. Let

$$c' = c + \boldsymbol{d}^t \boldsymbol{t} + \boldsymbol{t}^t D \boldsymbol{t}.$$

Then we obtain the description of the quadratic set $\mathcal{Q}$ in the form

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid (P^{\tilde{\gamma}})^t \begin{pmatrix} c' & \boldsymbol{0}^t & \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} & D_r & O \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{c} & O & O \end{pmatrix} P^{\tilde{\gamma}} = 0\}$$

Multiplying with suitable factor we have (where $P^\gamma = \boldsymbol{y}$)

(a) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + c_{r+1} y_{r+1} + \ldots + c_n y_n + c' = 0\},\ c_n = -1$ if $c_i \neq 0$ for some

4.10.4 Second reduction step

Now, assume $r < n$ and $c_n = -1$ in (a). The associated coordinate system is written as $\gamma : O_\gamma, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$. Define

$$U = \mathsf{Span}\{\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n\}, \quad \boldsymbol{c} = (c_{r+1}, \ldots, c_n),\ c_n = -1$$

Choose the new coordinate system $\delta : O_\delta, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ such that

- $\vec{w}_j = \vec{u}_j$ for $j \leq r$ and $\vec{w}_n = \vec{u}_n$

- for $r < j < n$: $\vec{w}_j = \sum_{i=r+1}^n w_{ij} \vec{u}_j$ with $\sum_{i=r+1}^n c_j \vec{w}_{ij} = 0$
which means that $\vec{w}_j$ is in the hyperplane H of U defined by the equation $\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$

- Observe that $\vec{w}_n = \vec{u}_n \notin H$ and put $O_\delta = c' \vec{u}_n + O_\gamma$, a point in $H + O_\gamma$

Then

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid (P^{\tilde{\delta}})^t \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_n^t \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{e_n} & D \end{pmatrix} P^{\tilde{\delta}} = 0\}$$

$$(b)\ \ \mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \lambda_1 z_1^2 + \ldots + + \lambda_r z_r^2 - z_n = 0\} \text{ where } P^\delta = \boldsymbol{z}$$

A suitable transformation matrix is

$$_{\tilde{\gamma}}T_{\tilde{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^t & \boldsymbol{0}^t \\ \boldsymbol{0} & E_r & O \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -c' \end{pmatrix} & O & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ c_{r+1} & c_{r+2} & \ldots & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

4.10.5 Euclidean reduction steps

Working within euclidean space, all coordinate systems should have orthonormal bases. We can get $D = T^t AT$ diagonal with orthogonal T using principal axes transformation and the eigenvalues λ_i as diagonal entries. Thus, we may arrive at (a). If $r < n$ and $c_n \neq 0$ we choose the new basis δ orthonormal: $\vec{w}_n \in H^\perp$ and determine $\vec{w}_r, \ldots, \vec{w}_{n-1}$ e.g. by the Gram-Schmidt procedure within U. Then

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\sum_{i=r+1}^{n} c_i\vec{u}_i, \quad {}_{\tilde{\gamma}}T_{\tilde{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & E_r & O \\ -c'\boldsymbol{e}_n^{n-r} & O & W \end{pmatrix}$$

where the colums of W are the coordinates of the $\vec{w}_i$ w.r.t. the $\vec{u}_i$ ($i = r+1, \ldots, m$).

4.10.6 Standard form

Theorem 4.10.1 *Given an n-dimensional affine space* $(\mathbb{P}, V)$ *and a quadratic set*

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid \vec{x}^\alpha = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t\vec{x} + c = 0\}$$

one can effectively determine coordinate system δ*, such that transforming to* δ *and then multiplying with a suitable factor, one obtains a decription of* $\mathcal{Q}$ *in one of the following forms where* $\mu_i \neq 0$

(1) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_r z_r^2 = 1\}$

(2) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_r z_r^2 = 0\}$

(3) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ z_n = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_r z_r^2\}$ *where* $r < n$

If V *is euclidean and* α *orthonormal, then* δ *can choosen orthonormal.*

Proof. Apply the first reduction step. Asssume $c_n = 0$. If $c = 0$ then one has type (2). If $c' \neq 0$, multiply the equation with $\frac{-1}{c'}$ to obtain type (1). If $c_n = -1$, apply the second reduction step to obtain type (3). □

4.11 Types of quadrics

A quadratic set is a *quadric* if it is not contained in any hyperplane.

4.11.1 Centers and vertices

Given a quadric $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) + \phi(\vec{x}) + c = 0\}$ in the affine space $(\mathbb{P}, V)$, point P of $\mathcal{Q}$ is a *center* of $\mathcal{Q}$ if

$$\vec{x} + P \in \mathcal{Q} \ \Rightarrow\ -\vec{x} + P \in \mathcal{Q} \quad \text{for all } \vec{x} \in V$$

and a *vertex* of $\mathcal{Q}$ if

$$\vec{x} + P \in \mathcal{Q} \ \Rightarrow\ r\vec{x} + P \in \mathcal{Q} \quad \text{for all } \vec{x} \in V \text{ and } r \in K$$

Obviously, each vertex is a center. A *proper center* is a center which is not a vertex.

Lemma 4.11.1 *P is a center of $\mathcal{Q}$ if and only if $\phi = 0$ in some/any description w.r.t. origin $O = P$ - and a vertex if, in addition, $c = 0$.*

Proof. Assume that $P = O$ is a center. Then for all $\vec{x}$

$$Q(\vec{x}) + \phi(\vec{x}) + c = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) + c = 0$$

i.e.

$$\vec{x} + O \in \mathcal{Q} \Rightarrow \phi(\vec{x}) = 0$$

Thus $\phi = 0$ since, otherwise, $\mathcal{Q}$ were contained in the hyperplane $\{\vec{x} + O \mid \phi(\vec{x}) = 0\}$. If O is a vertex, then $Q(\vec{0}) + c = 0$ whence $c = 0$. The converses are obvious, $\square$

Corollary 4.11.2 *Let the quadric $\mathcal{Q}$ be given w.r.t the coordinate sytem α as*

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O_\alpha \mid \vec{x}^\alpha = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} + c = 0\}$$

Then P is a center of $\mathcal{Q}$ if and only if

$$A\boldsymbol{p} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \quad \textit{where } \boldsymbol{p} = \vec{p}^\alpha,\ P = \vec{p} + O_\alpha$$

and a vertex if and only if

$$A\boldsymbol{p} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \textit{ and } c = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{p} \quad \textit{where } \boldsymbol{p} = \vec{p}^\alpha,\ P = \vec{p} + O_\alpha$$

If Q is the quadratic form given by A and if P is a center, then $\mathsf{rad}\, Q + P$ is the set of all centers. $\mathsf{rad}\, Q + P$ consist of vertices if and only if P is a vertex.

Proof. Consider the transformation into origin P

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x}^t \\ \boldsymbol{0} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^t \\ \boldsymbol{x} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t + \boldsymbol{x}^t A \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x} & A \end{pmatrix}, \quad c' = c + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$$

Thus, P is a center iff $\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ and the set of all centers is given by the solutions of the linear system of equations

$$A\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

Recall, that the homogeneous system $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ determines the radical $\mathsf{rad}\, Q$ of Q. Thus, if P is center then $\mathsf{rad}\, Q + P$ is the set of all centers. A center P is a vertex if and only if, in addition, $0 = c' = c + \boldsymbol{b}^t\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}^t \frac{-1}{2}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{p} = c + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{p}$ which is is equivalent to $c = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{p}$.

Now, assume that O is a vertex and $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) = 0\}$. If $\vec{p} in \mathsf{rad}\, Q$ then $Q(r\vec{x} + \vec{p}) = Q(r\vec{x}) = r^2 Q(\vec{r}) = r^2(Q\vec{x} + \vec{p})$ whence $\vec{x} + \vec{p} + O \in \mathcal{Q}$ implies $r\vec{x} + \vec{p} + O \in \mathcal{Q}$, i.e. $\vec{p} + O$ is a vertex. $\square$

4.11.2 Classification

Theorem 4.11.3 *There are excatly 3 types of quadrics, considered as sets $\mathcal{Q}$ of points, each characterized by equivalent conditions as follows*

(1) – *$\mathcal{Q}$ has a center but no vertex*
- *$\mathcal{Q}$ has a proper center*
- *$\mathcal{Q}$ has some description $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) + c = 0\}$ with $c \neq 0$*
- *Any standard form description of $\mathcal{Q}$ is of type (1)*

(2) – *$\mathcal{Q}$ has some vertex*
- *$\mathcal{Q}$ has a center and all of its centers are vertices*
- *$\mathcal{Q}$ has some desciption $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) = 0\}$*
- *Any standard form description of $\mathcal{Q}$ is of type (2)*

(3) – *$\mathcal{Q}$ has no center*
- *$\mathcal{Q}$ has no description $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) + c = 0\}$*
- *Any/some standard form description of $\mathcal{Q}$ is of type (3)*

Moreover, in case (1) and (2), if O is a center of $\mathcal{Q}$ then $\mathsf{rad}\, Q + O$ is the set of all centers of $\mathcal{Q}$.

Quadrics of type (2) are called (*quadratic*) *cones*, quadrics of type (3) *paraboloids.*

Proof. Observe that the notions of center and vertex are completly defined in terms of the point set $\mathcal{Q}$, without reference to the description. Since any vertex is a center, the first conditions in each case give a complete distinction by cases. Cor.4.11.2 gives the equivalence of the over conditions in these terms while Lemma 4.11.1 together with existence of standard form descriptions yields the characterizations in terms of descriptions.

4.12 Canonical forms of quadrics over $\mathbb{R}$

4.12.1 Real affine canonical form

Theorem 4.12.1 *Given an n-dimensional affine space $(\mathbb{P}, V)$ over $\mathbb{R}$ with coordinate system α and a description*

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid \vec{x}^{\alpha} = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \vec{x} + c = 0\}$$

of a quadric, one can determine a coordinate system δ such that transformation to δ and then multiplication with a constant yields a decription of $\mathcal{Q}$ in one of the following forms

(1) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^{\delta},\ z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+q}^2 = 1\}$ *where* $p \geq 1$

(2) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+q}^2 = 0\}$ *where* $p \geq q \geq 1$

(3) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ z_n = z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+q}^2\}$ *where* $p \geq q$ *and* $1 \leq p + q$

Given the data, no two distict of these descriptions may be achieved.

4.12.2 Euclidean canonical form

Theorem 4.12.2 *Given an n-dimensional euclidean affine space* $(\mathbb{P}, V)$ *over* $\mathbb{R}$ *with orthonormal coordinate system* α *and a description*

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid \vec{x}^\alpha = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^t \vec{x} + c = 0\}$$

of a quadric, one can determine an orthonormal coordinate system δ *such that transformation to* δ *and then multiplication with a constant yields a decription of* $\mathcal{Q}$ *in one of the following forms where* $0 < a_i \leq a_j$ *for* $i < j \leq p$ *resp.* $p < i < j \leq p + q$*. Morover* $a_{p+q} = 1$ *in (2).*

(1) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_p^2}{a_p^2} - \frac{z_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \ldots - \frac{z_{p+q}^2}{a_{p+q}^2} = 1\}$ *where* $p \geq 1$

(2) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_p^2}{a_p^2} - \frac{z_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \ldots - \frac{z_{p+q}^2}{a_{p+q}^2} = 0\}$ *where* $p \geq q \geq 1$

(3) $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{P} \mid \boldsymbol{z} = P^\delta,\ z_n = \frac{z_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{z_p^2}{a_p^2} - \frac{z_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \ldots - \frac{z_{p+q}^2}{a_{p+q}^2}\}$ *where* $p \geq q$ *and* $1 \leq p + q$

Given the data, no two distict of these descriptions may be achieved - with the exception of the case $p = q$ *in type (2): here, the sequences* $a_1, \ldots, a_p$ *and* $a_{p+1}, \ldots a_{p+q}$ *may first multiplied with* $\frac{1}{a_p}$ *and then interchanged.*

4.12.3 Transformation to affine and euclidean canonical forms

Transform to standard form and reoder the basis to obtain

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 - \lambda_n y_n = c \quad \text{where } c, \lambda_n \in \{0, 1\} \text{ and } \lambda_n = 1 \Rightarrow c = 0$$

such that $p + q = r$ and, for types

(1) $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0,\ \lambda_{p+1} \leq \ldots \leq \lambda_{p+q} < 0$ observing $p \geq 1$

(2,3) $k\lambda_1 \geq \ldots \geq k\lambda_p > 0,\ k\lambda_{p+1} \leq \ldots \leq k\lambda_{p+q} < 0$ such that $p \geq q$ with $k = \pm 1$.
If $k = -1$, multiply the equation with -1 and, in type (3) replace the last basis vector $\vec{u}_n$ by $-\vec{u}_n$

Put

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

In the euclidean case we are done. In the affine case, we replace the first $p+q$ basis vectors $\vec{v}_i$ by $\frac{1}{a_i}\vec{v}_i$ so that we obtain coefficients ± 1 in the new equation.
$\square$

4.12.4 Uniqueness of canonical forms

An equation in canonical form can be captured by a matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & \mathbf{0}^t & d \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ d & \mathbf{0}^t & \lambda_n \end{pmatrix}$$

where

$$C = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

is diagonal with entries λ_i with

$$\lambda_i = \frac{1}{a_i^2} > 0 \text{ for } i \leq p$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{a_i^2} < 0 \text{ for } p < i \leq p+q$$

$$\lambda_i = 0 \text{ for } p+q < i < n, \quad \lambda_n \in \{1, -1, 0\}$$

Moreover, in the affine case $|\lambda_i| = 1$ for $i \leq p+q$. We say that such matrices are in *canonical from*. The types are characterized by

(1) $c = 1,\ d = 0,\ p \geq 1$

(2) $c = 0 = d,\ p \geq q,\ p+q \geq 1$

(3) $c = 0,\ d = -\frac{1}{2},\ \lambda_n = 0,\ 1 \leq p+q < n$

From the Classification Theorem we already know that no two equations in standard form of different type may describe the same quadric. Thus, to prove uniqueness, it suffices to consider matrices $\tilde{A}$ and $\tilde{A}'$ in canonical form of the same type which related as follows via some affine transformation matrix S and constants $k \neq 0$

$$S^t \tilde{A} S = k\tilde{A}'.$$

With S_0 the linear part of S we have

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \boldsymbol{t} & S_0 \end{pmatrix}, \quad S_0^t C S_0 = kC'$$

Thus, we may apply Sylvesters Theorem to both

$$\tilde{A},\ k\tilde{A}' \quad C,\ kC'$$

Moreover, in type (3) we have

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^t & \frac{-1}{2} \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ \frac{-1}{2} & \mathbf{0}^t & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^t & 0 \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0}^t & -1 \end{pmatrix}$$

and, similarly for $\tilde{A}'$ whence B and kB' have the same signature in type (3).

Claim 4.12.3 *$k<0$ may occur only in type (2) with $p=q=p'=q'$*

Proof. Assume $k<0$. Then $p=q'$ and $q=p'$. In types (2) and (3) it follows $p\geq q=p'\geq q'=p$ whence $p=q=p'=q'$. Actually, in type (3) this cannot occur since applying Sylvester to $S^t\tilde{A}S=k\tilde{A}'$ we have $q+1=p'$. Finally, in type (1) we get $q=p'+1$ from $c=c'=1$, a contradiction, too. □

If $k>0$ then we get $p=p'$ and $q=q'$ and are done in the affine case. Now

$$\tilde{A}S=kS^{-t}\tilde{A}'$$

In the euclidean case we have $S_0^t=S_0^{-1}$ whence

$$S^{-t}=\begin{pmatrix}1 & -\boldsymbol{t}^tS_0\\ \boldsymbol{0} & S_0\end{pmatrix}$$

In type (1) we have $c=c'=1$ and $d=d'=0$ whence $k=1$ from

$$\begin{pmatrix}1 & +\\ + & +\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ \boldsymbol{T} & S_0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1 & -\boldsymbol{t}S_0\\ O & S_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & C'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & +\\ + & +\end{pmatrix}$$

In type (3) we have $c=c'=\lambda_n=\lambda_n'=0$ and $d=d'=-\frac{1}{2}$. It follows $ks=1$ and $k=s$ from

$$\begin{pmatrix}+ & + & -\frac{s}{2}\\ + & + & +\\ -\frac{1}{2} & + & +\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{0}^t & -\frac{1}{2}\\ \boldsymbol{0} & B & \boldsymbol{0}\\ -\frac{1}{2} & \boldsymbol{0}^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}^t & 0\\ + & + & +\\ + & + & s\end{pmatrix}$$

$$=k\begin{pmatrix}1 & + & +\\ \boldsymbol{0} & + & +\\ 0 & + & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{0}^t & -\frac{1}{2}\\ \boldsymbol{0} & B' & \boldsymbol{0}\\ -\frac{1}{2} & \boldsymbol{0}^t & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+ & + & -\frac{k}{2}\\ + & + & +\\ -\frac{ks}{2} & + & +\end{pmatrix}$$

whence $k=1$ in view of the Claim. Thus in both cases $S_0^tCS_0=C'$ and the $\frac{1}{a_1^2},\ldots,\frac{1}{a_p^2}$ and $-\frac{1}{a_p+1^2},\ldots,-\frac{1}{a_p+q^2}$ are uniquely determined as the positive resp. negative eigenvalues of C as well of C'. In type (2), if $p>q$ then from $S_0^tCS_0=kC'$ with $k>0$ we have that these values agree up to a factor k. By the requirement $a_{p+q}=1$ they have to coincide. If $p=q$ and $k<0$ then roles are exchanged. □.

4.13 Conic sections and uniqueness of equations

4.13.1 Conic sections

Recall that an affine space $(\mathbb{P},V)$ may be considered as the hyperplane $V+\vec{e}_0+Z$ of an affine space $(\mathbb{P}^+,V^+)$ where $V^+=V\oplus\mathsf{span}\vec{e}_0$. Given a quadric in $(\mathbb{P},V)$

$$\mathcal{Q}=\{\vec{x}+O\mid\vec{x}^\alpha=\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^t\vec{x}+c=0\}$$

we used the description

$$\mathcal{Q}=\{P\in\mathbb{P}\mid\tilde{\boldsymbol{x}}^t\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}=0,\ \tilde{\boldsymbol{x}}=P^{\tilde{\alpha}},\ x_0=1\}\quad\text{where }\tilde{A}=\begin{pmatrix}c & \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^t\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{b} & A\end{pmatrix}$$

Let

$$\mathcal{C}=\{\vec{x}+Z\mid\vec{x}\in V^+,(\vec{x}^{\tilde{\alpha}})^t\tilde{A}\vec{x}^{\tilde{\alpha}}=0\}$$

Lemma 4.13.1 *$\mathcal{C}$ is a cone with vertex Z and is uniquely given by the quadric $\mathcal{Q}$*

$$\mathcal{C} = \{r\vec{x} + Z \mid \vec{x} + Z \in \mathcal{Q}\}$$

Moreover,

$$\mathcal{Q} = \mathbb{P} \cap \mathcal{C}$$

Proof. Assume $\mathcal{C} \subseteq U + P$ where U is a proper subspace of V^+. Then $U + P = U + Z$ and $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P} \cap U + Z$ which is a proper affine subspace of $\mathbb{P}$. $\square$

4.13.2 Projective transformations

On the other hand we may allow arbitrary basis transformations in V^+. Since $\tilde{A}$ is symmetric, we find a basis δ such that ${}_{\tilde{\alpha}}T_{\delta}^{t}\tilde{A}\,{}_{\tilde{\alpha}}T_{\delta}$ is diagonal with entries μ_i and we get

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O_\alpha \in \mathbb{P} \mid \mu_0 z_0^2 + \ldots + \mu_n z_n^2 = 0\} \text{ where } \vec{x}^{\delta} = \boldsymbol{z}$$

Over $\mathbb{R}$ we may achieve $\mu_i \in \{1, -1, 0\}$, over $\mathbb{C}$ (with involution $r^* = r$) even $\mu_i \in \{1, 0\}$.

4.13.3 Uniqueness of equations

In the sequel we suppose that every element r of $\mathbb{K}$ is of the form $r = \pm s^2$ - we write $s = \sqrt{\pm r}$. Moreover, $2 = \sqrt{2}^2$.

Theorem 4.13.2 *Given a quadric $\mathcal{Q}$ over $\mathbb{K}$ w.r.t. the same origin O as*

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q_1(\vec{x}) + \phi_1(\vec{x}) + c_1 = 0\} = \{\vec{x} + O \mid Q_2(\vec{x}) + \phi_2(\vec{x}) + c_2 = 0\}$$

there is a constant $0 \neq k \in \mathbb{K}$ such that

$$Q_1 = kQ_2,\ \phi_1 = k\phi_2,\ c_1 = kc_2$$

in other words, given descriptions of $\mathcal{Q}$ by matrices $\tilde{A}_i$ as in $(*)$ w.r.t. the same coordinate system we have $\tilde{A}_1 = k\tilde{A}_2$.

4.13.4 Reductions

Lemma 4.13.3 *In order to prove the theorem we may assume that one of the descriptions is in standard form with $\mu_i = 1$ for $i \leq p$ and $\mu_i = -1$ for $p < i < p + q = r$*

Proof. There is a transformation S such that $S^t\tilde{A}_2S$ is in this form: having a coordinate system providing standard form, multiply any of the first r basis vectors with $\frac{1}{\sqrt{\pm\mu_i}}$ and reorder. By hypothesis, $S^t\tilde{A}_1S = kS^t\tilde{A}_2S$ for some k whence $\tilde{A}_1 = S^{-t}kS^t\tilde{A}_2SS^{-1} = k\tilde{A}_2$ $\square$

Lemma 4.13.4 *If $A = A^t \in \mathbb{K}^{n\times n}$ and $c \in \mathbb{K}$ such that $\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x} = c \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = 1$ for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ then $A = cE_n$.*

Proof. For $i < j \le n$ consider $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)$. Then $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = 1$ whence

$$c = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_j^t A\boldsymbol{e}_j \pm \boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_j$$

If follows $2\boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_j = 0$ and $\boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_j = 0$. Now, considering $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ we have $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = 1$ whence $a_{ii} = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = c$. □

4.13.5 Description of a cone

Lemma 4.13.5 *Given a cone $\mathcal{Q}$ over $\mathbb{K}$ with vertices O_i and quadratic forms Q_i such that $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O_i \mid Q_i(\vec{x}) = 0\}$ for $i = 1, 2$ there is $0 \neq k \in \mathbb{K}$ such that $Q_2 = kQ_1$.*

Proof. By Thm.4.11.3 we have $\mathsf{rad}\, Q_1 = \mathsf{rad}\, Q_2$. Thus, we may assume $O_1 = O_2$ and, by restriction to U where $V = U \oplus \mathsf{rad}\, Q_i$ we may assume $\mathsf{rad}\, Q_i = \{\vec{0}\}$. Moreover, we may assume that we have a a coordinate system with origin O_2 such that Q_2 is in canoncial form, i.e. given by the matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} E_p & O \\ O & -E_q \end{pmatrix}$$

Denoting the matrix of Q_1 by

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

with the analoguous block decomposition we have

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x}^t A_2\boldsymbol{x} = 0$$

Consider $i \le p < j$ and $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j$. In both cases $\boldsymbol{x}^t A_2\boldsymbol{x} = 0$ whence

$$0 = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j^t A\boldsymbol{e}_j \pm 2\boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_j$$

and it follows

$$a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^t A\boldsymbol{e}_j = 0$$

For $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^p$ consider

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Then

$$\boldsymbol{y}^t\boldsymbol{y} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^t A_2\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}^t A_{11}\boldsymbol{y} = -a_{p+1,p+1} =: k$$

and by Lemma 4.13.4 it follows $A_{11} = kE_p$. Considering $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Q}^q$ and

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

we get by the same kind of reasoning $A_{22} = -a_{11}E_q = -kE_q$. □

4.13.6 Proof of uniqueness of equations

Proof. Given a coordinate system α, we have to show that matrices $\tilde{A}_1$ and $\tilde{A}_2$ defining quadrics as in (*), define the same quadric if and only if $\tilde{A}_2 = k\tilde{A}_1$ for some $0 \neq k \in \mathbb{K}$. This now follows from Lemma 4.13.5 and the fact that these matrices define the same cone w.r.t. the coordinate system $Z, \tilde{\alpha}$ of $\mathbb{P}^+$. $\square$.

4.14 Example

$$x - 1^2 = x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 5x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 + \frac{89}{16} = 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{89}{16} & -3 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = S_1^t \tilde{A} S_1 = \begin{pmatrix} \frac{89}{16} & -\frac{11}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{11}{2\sqrt{2}} & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{4\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = S_2^t \tilde{A}_1 S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_3 = S_3^t \tilde{A}_3 S_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_4 = S_4^t \tilde{A}_3 S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = S_1S_2S_3S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{19}{8} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$y_3 = 2y_1^2$$

4.15 Intersection with lines and tangent space

Given a quadric

$$\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) + \phi(\vec{x}) + c = 0\}$$

a point $P = \vec{p} + O$ on $\mathcal{Q}$, and a vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ the intersection

$$\mathcal{Q} \cap \{\lambda\vec{v} + P \mid \lambda \in K\}$$

of the quadric with the line through P in direction $\vec{v}$ is described by the quadratic equation

$$\lambda^2 Q(\vec{v}) + \lambda(2\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \phi(\vec{v})) = 0$$

Indeed, $\lambda\vec{v} + P \in \mathcal{Q}$ iff $0 = Q(\vec{p} + \lambda\vec{v}) + \phi(\vec{p} + \lambda\vec{v}) + c = Q(\vec{p}) + 2\Phi(\vec{p},\lambda\vec{v}) + Q(\lambda\vec{v}) + \phi(\vec{p}) + \phi(\lambda\vec{v}) + c = \lambda^2 Q(\vec{v}) + \lambda(2\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \phi(\vec{v}))$ since $Q(\vec{p}) + \phi(\vec{p}) + c = 0$. It follows

$$\lambda\vec{v} + P \in \mathcal{Q} \ \Leftrightarrow\ \lambda Q(\vec{v}) + 2\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \phi(\vec{v}) = 0 \quad \text{for } \lambda \neq 0$$

Now, a linear equation $\lambda a + b = 0$ has either all $\lambda \neq 0$, exactly one $\lambda \neq 0$, or no $\lambda \neq 0$ as a solution. Accordingly, the following cases may occur

- - $\{\lambda\vec{v} + P \mid \lambda \in K\} \subseteq \mathcal{Q}$
  - $Q(\vec{v}) = 0$ and $\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{v}) = 0$
- - $\mathcal{Q} \cap \{\lambda\vec{v} + P \mid \lambda \in K\}$ has exactly 2 points
  - $Q(\vec{v}) \neq 0$ and $\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{v}) \neq 0$
- - $\mathcal{Q} \cap \{\lambda\vec{v} + P \mid \lambda \in K\} = \{P\}$
  - $Q(\vec{v}) \neq 0$ and $\Phi(\vec{p},\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{v}) = 0$

In case 1 and 3 the line $\{\lambda\vec{v} + P \mid \lambda \in K\}$ is a *tangent* of $\mathcal{Q}$ in the point P. Define the *tangent vector space* at the point P as

$$\vec{T}_P\mathcal{Q} = \{\vec{v} \mid \Phi(\vec{p},\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{v}) = 0\}$$

Then

$$\vec{T}_P\mathcal{Q} + P = \{\vec{x} + O \mid \Phi(\vec{p},\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{v}) + \frac{1}{2}\phi(\vec{x}) + c = 0\}$$

is the set of all points on tangents in P, the *affine tangent space* at P (substitute $\vec{v} = \vec{x} - \vec{p}$ in the description of $\vec{T}_P\mathcal{Q}$).

Corollary 4.15.1 *$\vec{T}_P\mathcal{Q} = V$ if and only if P is a vertex of $\mathcal{Q}$, Otherwise, $\vec{T}_P\mathcal{Q}$ is a hyperplane.*

In the first case, P is a *singular* point, in the second *regular.*

Ad: Proof Cor. 17.2.2. Now, assume that O is a vertex and $\mathcal{Q} = \{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) = 0\}$. If $\vec{p} in \mathsf{rad}\, Q$ then $Q(r\vec{x} + \vec{p}) = Q(r\vec{x}) = r^2 Q(\vec{r}) = r^2 Q(\vec{x} + \vec{p})$ whence $\vec{x} + \vec{p} + O \in \mathcal{Q}$ implies $r\vec{x} + \vec{p} + O \in \mathcal{Q}$, i.e. $\vec{p} + O$ is a vertex.

Inhaltsverzeichnis