Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/2011
3. dezember 2010

6. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Die Globalisierung des Newton-Verfahrens für Gleichungssysteme $F(x) = 0$, mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfolgt üblicherweise auf Basis des Minimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x). \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Newton-Gleichung von (1).

(b) Beim Gauss-Newton-Verfahren bestimmt man die Suchrichtung s_k als Lösung der Gauss-Newton Gleichung

$$F'(x_k)^T F'(x_k) s_k = -F'(x_k)^T F(x_k). \tag{GN}$$

Welcher Term wurde im Vergleich mit der Newton-Gleichung für (1) hier vernachlässigt? Zeigen Sie, dass die Gauss-Newton-Gleichung (GN) zur klassischen Newton-Gleichung für $F(x) = 0$ äquivalent ist, wenn $F'(x_k)$ invertierbar ist

(c) Sei $\bar{x}$ eine Nullstelle von F und $F'(\bar{x})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass (GN) auf ein Newton-artiges Verfahren für das Problem (1) führt, welches für $x_k \to \bar{x}$ die Dennis-Moré-Bedingung erfüllt.

(d) Verwendet man das globalisierte Newton-artige Verfahren (Algorithmus 10) für (1) mit der Matrix $M_k = F'(x_k)^T F'(x_k)$, so nennt man das Verfahren *globalisiertes Gauss-Newton-Verfahren*. Sei die Niveaumenge $N_f(x_0)$ zum Startpunkt x_0 kompakt. Zeigen Sie mit Sätzen aus der Vorlesung:

i. Jeder Häufungspunkt $\bar{x}$ von (x_k) erfüllt $F'(\bar{x})^T F(\bar{x}) = 0$. Ist $F'(\bar{x})$ invertierbar, so gilt zudem $F(\bar{x}) = 0$.

ii. Hat (x_k) einen Häufungspunkt $\bar{x}$, in dem $F'(\bar{x})$ invertierbar ist, dann gilt $F(\bar{x}) = 0$ und (x_k) konvergiert Q-superlinear gegen $\bar{x}$. Ist F' lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenz sogar Q-quadratisch.

Aufgabe H2 (SR1- Updates) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Der Ansatz für einen symmetrischen Rang-1-Update

$$H_{k+1} = H_k + \alpha_k v_k v_k^T,$$

mit $\alpha_k \in \{\pm 1\}, v_k \in \mathbf{R}^n$ und einer symmetrischen Matrix H_k, bei dem H_{k+1} die Quasi-Newton-Gleichung erfüllen soll, führt unter der Voraussetzung $(y_k - H_k d_k)^T d_k \neq 0$ auf die folgende Formel:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^T}{(y_k - H_k d_k)^T d_k}. \tag{SR1}$$

(b) Sei $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ regulär und $u, v \in \mathbf{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie: Die Matrix $H + uv^T$ ist regulär, wenn $1 + v^T H^{-1} u \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt die sogenannte *Sherman-Morrison-Formel*

$$(H + uv^T)^{-1} = (I - \frac{H^{-1} u v^T}{1 + v^T H^{-1} u}) H^{-1}.$$

(c) Leiten Sie mit der Sherman-Morrison-Formel die zur Formel (SR1) gehörige inverse Aufdatierungsformel

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(d_k - B_k y_k)(d_k - B_k y_k)^T}{(d_k - B_k y_k)^T y}$$

her.