Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/2011
19. November 2010

4. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (Invarianz des Newton-Verfahrens gegenüber Variablentransformationen) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung von $f(x)$ im folgenden Sinne invariant gegenüber affin-linearen Transformationen der Form $Ay + c = x$, also $y = A^{-1}(x - c)$ ist:
Das Newton-Verfahren erzeugt bei Anwendung auf die Funktion $h(y) := f(Ay+c)$ mit einem Startpunkt $y_0 = A^{-1}(x_0-c)$ die Punkte $y_k = A^{-1}(x_k-c)$, wobei x_k die Iterierten des Newtonverfahrens bei Anwendung auf die Funktion $f(x)$ mit Startpunkt x_0 sind.

Aufgabe H2 (Divergenz des Newtonverfahrens für schlechte Startpunkte) (4 Punkte)
Betrachten Sie die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| - \arctan(|x|)$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion für keinen Startpunkt $|x_0| \geq 2$ gegen das (eindeutige) Minimum von f konvergiert.

Aufgabe H3 (Problemfälle beim Newtonverfahren) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = |x|^p$, mit $p > 2$ und Startpunkt $x_0 > 0$ zur Bestimmung des globalen Minimums $\bar{x} = 0$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren Q-linear gegen $\bar{x} = 0$ konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht Q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz der Vorlesung (Satz 2.7.4)?

Abgabe der Hausübungen: Am 26.11.2010 bzw. 29.11.2010 zu Beginn der Übungen.