Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/2011
12. November 2010

3. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Unzulässige Schrittweiten mit der Armijo-Regel)

Wählt man im allgemeinen Abstiegverfahren zulässige Richtungen s_k, so liefert die Armijo-Bedingung alleine nicht immer zulässige Schrittweiten, wenn $\|s_k\|$ zu schnell gegen 0 geht. Zur Demonstration untersuchen wir die Suchrichtungen $s_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{2^k}$ zur Minimierung einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die s_k zulässige Suchrichtungen liefern.

(b) Zeigen Sie am Beispiel $f(x) = \frac{x^2}{4}$, dass mit Startpunkt $x_0 > 0$ und mit der Wahl $\gamma \leq \frac{3}{4}$ in der Armijo-Regel stets $\sigma_k = 1$ gewählt wird und diese Schrittweitenwahl unzulässig ist. Konvergiert der Algorithmus?

Hinweis:
Sie dürfen die Abschätzung $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k+1}(1 - \frac{1}{2^{i+1}}) \geq a$ verwenden, wobei $a > 0$ eine feste Zahl ist.

Aufgabe G2 (Abstiegsrichtung)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie:
Wenn $\nabla^2 f(x)$ einen negativen Eigenwert besitzt, dann gibt es eine Abstiegsrichtung, d.h. einen Vektor d mit der Eigenschaft $f(x) > f(x + \alpha d)$ für ein $\alpha > 0$.

Aufgabe G3 (Richtung des steilsten Abstiegs)

Zeigen Sie :
Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Bezeichnet $\|\cdot\|_M$ die durch $\|x\|_M = \sqrt{x^T M x}$ definierte Norm des $\mathbb{R}^n$, so hat das Problem

$$\min_{d\in\mathbf{R}^n, \|d\|_M=1} \nabla f(x)^T d$$

die eindeutige Lösung $d^* = -\frac{M^{-1}\nabla f(x)}{\|M^{-1}\nabla f(x)\|_M}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Die Curry-Schrittweitenregel) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $\nabla f(x)$ auf $N_f(x_0)$ Lipschitz-stetig, mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Sei nun $x \in N_f(x_0)$ und $s \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegrichtung von f. Nach der

Curry-Schrittweitenregel wird die Schrittweite $\sigma_k > 0$ als kleinster stationärer Punkt der Funktion $\Phi(\sigma) = f(x + \sigma s), \sigma > 0$ berechnet, also

$$\sigma_k = \min\{\sigma > 0 : \nabla f(x + \sigma s)^T s = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sei $\tau > 0$ die kleinste Zahl mit $\nabla f(x + \tau s)^T s = \frac{1}{2}\nabla f(x)^T s$, so gilt:

$$f(x + \sigma_k s) - f(x) \le f(x + \tau s) - f(x) \le \frac{\tau}{2}\nabla f(x)^T s.$$

(b) Nutzen Sie nun die Lipschitz-Stetigkeit von $\nabla f(x)$ auf $N_f(x_0)$, um

$$\tau \ge \frac{|\nabla f(x)^T s|}{2\|s\|^2 L}$$

zu zeigen.

(c) Beweisen Sie nun mit Teil (a) und (b) die Zulässigkeit der Schrittweiten (σ_k).

Aufgabe H2 (Unzulässige Suchrichtungen) (5 Punkte)

Wählt man Suchrichtungen, die nicht zulässig sind, da sie z.B. fast senkrecht zur Gradientenrichtung, also nahezu tangential zu den Isolinien der Zielfunktion, verlaufen, so kann es passieren, dass das Abstiegsverfahren nicht gegen einen stationären Punkt konvergiert. Untersuchen Sie dazu die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ für die Suchrichtungen

$$s_k = g_k^\perp - \frac{1}{2^{k+3}} g_k.$$

Hierbei sei $g_k = \nabla f(x_k)$ und $g_k^\perp : g_k^\perp \perp g_k$, so dass $\|s_k\| = \|g_k\|$.

Zeigen Sie, dass das Abstiegsverfahren mit diesen Suchrichtungen und zulässiger Schrittweitenwahl für keinen Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegen den Minimalpunkt $\bar{x} = 0$ von f konvergiert und $\bar{x}$ auch kein Häufungspunkt von (x_k) ist.