Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2010/2011
5. November 2010

2. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenzrate des Gradientenverfahrens) (6 Punkte)

Für eine quadratische Funktion $f(x) = b^T x + \frac{1}{2}x^T Qx$, mit symmetrisch positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wurde in der Vorlesung folgende Abschätzung für die Konvergenzrate des Gradientenverfahrens bei exakter Schrittweitensuche bewiesen:

$$f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) \leq (\frac{\lambda_{max}(Q) - \lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(Q) + \lambda_{min}(Q)})^2 (f(x_k) - f(\bar{x})).$$

Zeigen Sie, dass diese Abschätzung scharf ist, indem Sie die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \kappa x_2^2)$ für $\kappa \geq 1$ mit Startpunkt $x_0 = (1, \frac{1}{\kappa})^T$ betrachten.

Aufgabe H2 (Gradientenverfahren) (4 Punkte)

Die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist. Der globale Minimalpunkt der Funktion über $\mathbb{R}^n$ ist $\bar{x} = Q^{-1}b$.

Angenommen wir wenden das Gradientenverfahren mit einem Startpunkt $x^0 \neq Q^{-1}b$ und mit exakter Schrittweitenberechnung an. Zeigen Sie, dass der Algorithmus genau dann in einem Schritt konvergiert (d.h. $x^1 = Q^{-1}b$), wenn x^0 so gewählt wird, dass $\nabla f(x^0) = Qx^0 - b$ ein Eigenvektor von Q ist.

Aufgabe H3 (Gradientenverfahren und Transformation) (4 Punkte)

Ist das Gradientenverfahren mit exakter Schrittweitensuche invariant unter linearen Transformationen auf dem $\mathbb{R}^n$? Beweisen oder widerlegen Sie!

Hinweis: Eine lineare Transformation auf dem $\mathbf{R}^n$ lässt sich durch eine invertierbare Matrix darstellen.

Abgabe der Hausübung : Am 12. bzw. 15. November in den Übungen.