# Nichtlineare Optimierung
# 13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Stefan Ulbrich**
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

**WS 2010/2011**
**11. Februar 2011**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Dualität)
Stelle anhand der Definitionen aus Kapitel 3.8 die dualen Probleme zu folgenden (primalen) Probleme auf:

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & a, \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{LP}$$

und

$$\begin{array}{rrcl} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & a, \\ & Bx & = & b, \end{array} \tag{QP}$$

mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und Vektoren $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^p$. Ersetze hierbei das innere Infimum (des dualen Problems) durch geeignete Nebenbedingungen.

**Aufgabe G2** (Starke Dualität)
Betrachte das semidefinite Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & \langle C, X\rangle & & \\ \text{s.t.} & \langle A_i, X\rangle & = & b_i \\ & X & \in & \mathscr{S}^+, \end{array} \tag{P}$$

wobei $A_i \in R^{n\times n}$ symmetrische Matrizen und $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$ seien und $\mathscr{S}^+ \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ den Kegel der semidefiniten Matrizen bezeichne sowie

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^T A) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}A_{ij}$$

das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Bestimme zu (P) das zugehörige duale Problem. Betrachte dazu die Lagrange-Funktion

$$L(X,y) = \langle C, X\rangle + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \langle A_i, X\rangle)$$

mit $X \in \mathscr{S}^+$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Ersetze das innere Infimum (des dualen Problems) durch geeignete Nebenbedingungen. Ist das duale Problem wieder ein semidefinites Problem?
*Hinweis:* Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt

$$A \in \mathscr{S}^+ \quad \Leftrightarrow \quad \langle A, B\rangle \geq 0 \text{ für alle } B \in \mathscr{S}^+$$

(b) Betrachte (P) für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das duale Problem und zeige, dass die Optimalwerte vom primalen und dualen Problem nicht übereinstimmen.

*Hinweis:* Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Gilt $A_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, dann folgt $A_{ij} = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

**Aufgabe G3** (Sattelpunkt-Bedingung)

Veranschaulichen Sie sich die Sattelpunkt-Bedingung der Lagrangefunktion $L(x, \lambda) := f(x) + \lambda^T c(x)$ aus Definition 3.8.3 am Beispiel

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad c(x) = 1 - x.$$

Bestimmen Sie den Sattelpunkt der zugehörigen Lagrange-Funktion, indem Sie zunächst $L(\cdot, \lambda)$ für festes $\lambda$ auf $\mathbb{R}$ minimieren und danach die Funktion $L(x(\cdot), \cdot)$ auf $\mathbb{R}_+$ maximieren.

**Aufgabe G4** (Dualitätslücken)

Berechnen Sie die primale und duale Optimallösung der folgenden Probleme:

$$(P1) \qquad \begin{array}{ll} \min & e^{x_1} + 16e^{x_2} \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{array}$$

$$(P2) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ \text{s.t.} & -x \leq 0 \end{array}$$

Wie groß ist jeweils die Dualitätslücke? Zeigen Sie im Falle einer nicht verschwindenden Dualitätslücke, dass dies kein Widerspruch zu Satz 3.8.4 ist.