Nichtlineare Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

WS 2010/2011
4. Februar 2011

Rechnerübung

Aufgabe R1 (Quadratisches Penalty-Verfahren)
Programmieren Sie das quadratische Penalty-Verfahren aus Algorithmus 16. Minimieren Sie hierbei die Penalty-Funktion

$$P_\rho(x) = f(x) + \frac{\rho}{2}(\|(c(x))_+\|^2 + \|h(x)\|^2)$$

unter Verwendung Ihrer Implementierung des globalen Newton-Verfahrens oder des BFGS-Verfahrens aus den vergangenen Rechnerübungen. Sie können auch die Datei `GlobalesNewton.m` von der Veranstaltungsseite verwenden.

Erhöhen Sie den Penalty-Parameter (in Schritt 3 des Penalty-Verfahrens) um den Faktor 10, also durch die Vorschrift $\rho_{k+1} = 10\rho_k$ und wählen Sie $\rho_0 = 1$. Verwenden Sie für das äußere Verfahren – also das quadratische Penalty-Verfahren – die Abbruchbedingung $\|(c(x_k))_+\| + \|h(x_k)\| \leq 10^{-4}$. Führen Sie als zusätzliches Abbruchkriterium eine maximale Anzahl an äußeren Iterationen ein.

Hinweis: In jeder Iteration des äußeren Verfahrens müssen Sie die quadratische Penaltyfunktion P_ρ neu aufstellen. Zuweisungen der Form $f(x) := g(x,y)$ für einen festen Wert y können in Matlab durch den Ausdruck `f=@(x) g(x,y)` realisiert werden. Desweiteren könnte der Datentyp `Cell-Array` hilfreich sein.

Testen Sie Ihr Verfahren an dem Problem

$$\begin{array}{ll} \min & 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2 \\ \text{s. t.} & x_2 + 3x_1 \leq 0 \end{array}$$

mit Startwerten $x_0 = (-1, 0.5)$ und $x_0 = (4, 5)$ und

$$\begin{array}{ll} \min & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{s. t.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \\ & 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \end{array}$$

mit Startwert $x_0 = (3, 0.2, 3)$.

Aufgabe R2 (Globalisiertes SQP-Verfahren - Für den Übungsschein ist nur Aufgabe R1 zu lösen)
Programmieren Sie das Globalisierte SQP-Verfahren aus Algorithmus 21. Verwenden Sie $H_k = \nabla^2_{xx} L(x_k, \lambda_k, \mu_k)$, sowie $\gamma = 10^{-3}$. Um das Teilproblem SQP_k zu lösen, verwenden Sie die Funktion `quadprog`. Iterieren Sie solange, bis entweder (x_k, λ_k, μ_k) die KKT-Bedingungen (bis auf eine gewisse Toleranz) erfüllen oder eine maximale Anzahl von Iterationen erreicht ist.

Testen Sie Ihr Programm an den Problemen aus Aufgabe R1.

Hausübung

Aufgabe H1 (Primal-duale Innere-Punkte-Verfahren bei linearer Programmierung) (6 Punkte)
Wir betrachten das (primale) lineare Programm

$$\min c^T x \quad \text{s. t.} \quad Ax = b,\ x \geq 0 \tag{PLP}$$

und das zugehörige duale lineare Programm

$$\max b^T y \quad \text{s. t.} \quad A^T y + s = c,\ s \geq 0. \tag{DLP}$$

(a) Formulieren Sie zu (PLP) bzw. (DLP) jeweils das logarithmische Barriere-Problem $(BPLP_\tau)$ bzw. $(BDLP_\tau)$ bezüglich der Vorzeichenbedingungen, mit Barriere-Parameter $\tau > 0$. Lassen Sie die Gleichungsnebenbedingungen hierbei unverändert.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 (i) Das primale logarithmische Barriere-Problem $(BPLP_\tau)$ besitzt eine Lösung x_τ.
 (ii) Das duale Barriere-Problem $(BDLP_\tau)$ besitzt eine Lösung (y_τ, s_τ).
 (iii) Die sogenannten *zentralen Pfadbedingungen*

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x > 0,\ s > 0,\ x_i s_i &= \tau, \quad \forall i = 1 \dots n \end{aligned}$$

 besitzen eine Lösung (x_τ, y_τ, s_τ).

Hinweis: Lineare Nebenbedingungen erfüllen immer die (ACQ).

Aufgabe H2 (Maratos-Effekt) (8 Punkte)

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1 \\ \text{s. t.} \quad & h(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = (1,0)^T$ das globale Minimum ist und bestimmen Sie den zugehörigen Lagrangemultiplikator $\bar{\mu}$. Zeigen Sie, dass das lokale SQP-Verfahren für Startpunkte $(x_0, \mu_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{\mu})$, $\delta > 0$ klein genug, Q-superlinear gegen $(\bar{x}, \bar{\mu})$ konvergiert.

(b) Seien $x_k \in Z \setminus \{\bar{x}\}$ und $\mu_k < -1$ beliebig. Zeigen Sie, dass für die Lösung s_k von (SQP_k) gilt, dass

$$|h(x_k + s_k)| > |h(x_k)| \quad \text{und} \quad f(x_k + s_k) > f(x_k).$$

Damit wird der volle Schritt von der Bewertungsfunktion $P_{l_1,\rho}$ abgelehnt. Da $x_k \in Z \setminus \{\bar{x}\}$ und $\mu_k < -1$ für (x_k, μ_k) beliebig nahe bei $(\bar{x}, \bar{\mu})$ gilt, konvergiert das globalisierte SQP-Verfahren hier also nicht lokal Q-superlinear.