Nichtlineare Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

WS 2010/2011
28. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)

(a) Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & -x_1 & - & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{P1}$$

Bestimmen Sie in den Punkten $(4,4)$ und $(6,2)$ Lagrange-Multiplikatoren, sodass die KKT-Bedingungen erfüllt sind und geben Sie jeweils den zugehörigen Kegel der kritischen Richtungen (Definition 3.3.1) an. Überprüfen Sie, ob die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung (Satz 3.3.2) erfüllt ist.

(b) Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrl} \min & (x_1 - \frac{9}{4})^2 & + & (x_2 - 2)^2 & \\ \text{s.t.} & x_2 - x_1^2 & \geq & 0 & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 6 & \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array} \tag{P2}$$

Bestimmen Sie im Punkt $\bar{x} = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ den Kegel der kritischen Richtungen. (Die Lagrange-Multiplikatoren haben wir schon in Aufgabe H3 auf dem 9. Übungsblatt berechnet: $\bar{\lambda} = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$). Überprüfen Sie, ob die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

Aufgabe G2 (Konvergenz von Innere-Punkte-Verfahren)
Beweisen Sie Satz 3.5.2 der Vorlesung:

Satz 3.5.2. *Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$, stetig differenzierbar und konvex. Der zulässige Bereich Z sei kompakt und sein striktes Inneres Z_0 sei nicht leer.*
Algorithmus 17 verwende einen Barriere-Term der Form $p(x) = \sum_{i=1}^m b(-c_i(x))$, mit $b : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt, konvex und monoton fallend mit $\lim_{t\to 0^+} b(t) = \infty$, sowie eine Folge (τ_k), mit $\tau_k \searrow 0$, für $k \to \infty$. Dann gilt

i) Das Problem (NLPU) hat eine Lösung $\bar{x}$.

ii) B_τ ist konvex auf Z_0 für alle $\tau > 0$.

iii) (BP_{τ_k}) besitzt stets eine Lösung $x_k = x(\tau_k) \in Z_0$.

iv) Für jede Lösungsfolge (x_k) von (BP_{τ_k}) gilt

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\bar{x}).$$

v) Jeder Häufungspunkt von (x_k) ist eine optimale Lösung von (NLPU).

Hinweise:

zu iii): Zeigen Sie, dass die Niveaumenge $N_{\tau_k}(\hat{x}) = \{x \in Z_0 : B_{\tau_k}(x) \leq B_{\tau_k}(\hat{x})\}$, für $\hat{x} \in Z_0$, kompakt ist.

zu iv): Zeigen Sie hierzu zunächst folgendes:

- Es gilt $p(x_k) \leq p(x_{k+1})$, $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$.
- Sei $\tilde{x} \in Z_0$ und $\bar{x}$ Optimum. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in [\bar{x}, \tilde{x}]$, mit $y \in Z_0$ und $f(y) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$.

Aufgabe G3 (Beispiel zu Innere-Punkte-Verfahren)
Betrachten Sie das nichtlineare Optimierungsproblem (NLPU) aus der Vorlesung mit

$$f(x) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2, \qquad c_1(x) = -x_1, \quad c_2(x) = -x_2.$$

Berechnen Sie die Lösung $x(\tau)$ des zugehörigen Barriereproblems $BP(\tau)$ mit logarithmischer Barrierefunktion ($B_\tau = f(x) - \tau \sum_{i=1}^m \ln(-c_i(x))$). Bestimmen Sie hieraus die Lösung von (NLPU) und die zugehörigen Lagrangemultiplikatoren durch Übergang $\tau \to 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Trajektorie des Penalty-Verfahrens) (8 Punkte)
Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0, \quad \text{für} \quad f(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2, \quad c(x) = -x_2. \tag{P}$$

Das quadratische Penalty-Problem zu (P) lautet

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\rho_k}(x) := f(x) + \frac{\rho_k}{2} \sum_{i=1}^m \max\{0, c_i(x)\}^2,$$

wobei $(\rho_k) \subset (0, \infty)$ eine Folge ist, mit $\rho_{k+1} > \rho_k$ und $\lim_{k \to \infty} \rho_k = \infty$.

(a) Bestimmen Sie die globale Lösung x^* von (P) und den zugehörigen Lagrangemultiplikator λ^*.

(b) Berechnen Sie für $\rho > 0$ das globale Minimum $x(\rho)$ von $P_\rho(x)$.

(c) Zeigen Sie $x^* = \lim_{\rho \to \infty} x(\rho)$ und $\lambda^* = \lim_{\rho \to \infty} \rho \max\{0, c(x(\rho))\}$.

(d) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hessematrix $\nabla^2 P_\rho(x(\rho))$ für $\rho \to \infty$?

Aufgabe H2 (Exakte Penalty-Funktionen) (3 Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min x^2 \quad \text{s.t.} \quad x - 1 = 0,$$

mit der Lösung $x^* = 1$.

(a) Bestimmen Sie $\bar{\rho} > 0$, so dass die zugehörige l_1- Penalty-Funktion $P_{l_1,\rho}(x)$ für alle $\rho \geq \bar{\rho}$ exakt in x^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass die quadratische Penalty-Funktion $P_\rho(x)$ für $\rho = 2$ in x^* nicht exakt ist.

Aufgabe H3 (Gestörte KKT-Bedingungen und stationäre Punkte der Log-Barrierefunktion) (3 Punkte)
Betrachten Sie die KKT-Bedingungen des Optimierungsproblems

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad c_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots m. \tag{NLPU}$$

Diese Bedingungen kann man mit einem Parameter $\tau > 0$ stören, indem statt der Zulässigkeits- und Komplementaritätsbedingung folgendes fordert:

$$-c_i(x) > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad -c_i(x)\lambda_i = \tau \quad (i = 1, \dots m).$$

Wie hängen die gestörten KKT-Bedingungen mit der Stationaritätsbedingung für die logarithmische Barriere-Funktion

$$B_\tau(x) = f(x) - \tau \sum_{i=1}^m \ln(-c_i(x))$$

zusammen?
Hinweis: Verwenden Sie, dass mit der obigen Bedingung $\lambda_i = -\tau / c_i(x)$ gilt.