Nichtlineare Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

WS 2010/2011
21. Januar 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Slater-Bedingung)
Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0, \tag{KP}$$

mit konvexen, zumindest einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die sogenannte *Slater-Bedingung* lautet: Es gibt einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, mit $c(y) < 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Slaterbedingung für jeden zulässigen Punkt von (KP) die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) impliziert.

(b) Zeigen Sie nun anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage aus Teilaufgabe (a) im Falle nichtkonvexer Nebenbedingungen im Allgemeinen nicht gilt. Konstruieren Sie hierzu ein Optimierungsproblem mit mindestens einer nichtkonvexen Nebenbedingung, das folgende Eigenschaften besitzt: Die Slaterbedingung ist für einen Punkt y erfüllt und es gibt einen zulässigen Punkt, der die (MFCQ) verletzt.
Prüfen Sie, ob für Ihr Beispiel die Abadie Constraint Qualification (ACQ) ebenfalls verletzt ist. Falls nicht, versuchen Sie Ihr Beispiel so zu modifizieren, dass auch die (ACQ) trotz Slaterbedingung verletzt ist.

Aufgabe G2 (Trust-Region-Problem - Reloaded)
Wir betrachten erneut das Trust-Region-Problem

$$\min q(s) \quad \text{s.t.} \|s\|_2 \leq \Delta \tag{TP}$$

mit $\Delta > 0$ und einer quadratischen Funktion

$$q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}^n, H \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ symmetrisch.}$$

Wir wollen die Optimalitätsbedinungen aus G1 des 8. Übungsblattes nun mit den Methoden der Optimierung mit Nebenbedingungen untersuchen.

(a) Zuerst weisen wir nach, dass in jedem Punkt aus der Trust-Region die Abadie Constraint Qualification gilt.
Sei dazu $K \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel mit Mittelpunkt $\bar{x}$ und Radius $\Delta > 0$, $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ c(x) \leq 0\}$ mit $c(x) = x^T x - \Delta^2$.
Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$T_L(c; x) = T(K; x). \tag{$*$}$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass das Problem invariant unter linearen Transformationen ist: Es genügt also $(*)$ für die Einheitskugel zu zeigen: Dabei kann man das Koordinatensystem so drehen, dass ein gegebener Tangentialvektor an die Kugel zu einem Einheitsvektor wird.

(b) Begründen sie nun mit Sätzen aus Kapitel 3 der Vorlesung, warum für ein Optimum $\bar{s}$ von (TP) immer ein $\lambda \geq 0$ existiert mit

(i) $(H + \lambda I)\bar{s} = -c$,

(iii) entweder $\|\bar{s}\|_2 = \Delta$ oder $\|\bar{s}\|_2 < \Delta$ und $\lambda = 0$.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Mit dem Satelliten-Kontroll-System GPS kann ein entsprechend ausgestattetes GPS-Gerät, zum Beispiel ein Handy, seine Position auf der Erde bis auf eine Genauigkeit von etwa 10 Metern bestimmen. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Die Satelliten und das Handy sind nach einer Atomuhr genau eingestellt. Von den Satelliten im Orbit der Erde wird die aktuelle Zeit gesendet. Das Handy empfängt diese Signale jeweils mit einer gewissen Zeitverzögerung. Anhand dieser Zeitverzögerung und der Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit wird der Abstand zu den jeweiligen Satelliten berechnet und anschließend die Position auf der Erde bestimmt. Um diese Berechnung durchführen zu können, müssen sich mindestens drei Satelliten im Empfangsbereich des GPS-Gerätes befinden.

Stellen Sie ein nichtlineares Optimierungsproblem zur möglichst genauen Berechnung der Position des GPS-Gerätes auf, wobei dem GPS-Gerät die Position der Satelliten, die jeweiligen Zeitverzögerungen, der maximale und minimale Erdradius und die Lichtgeschwindigkeit bekannt sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gültigkeit verschiedener Constraint Qualifications) (2 Punkte)
Der Zulässigkeitsbereich $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Ungleichungen bestimmt:

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \leq 2, \qquad (x_1-1)^2+(x_2+1)^2 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass in $\bar{x} = (0,0)$ die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) erfüllt ist, die Linear Independence Constraint Qualification (LICQ) jedoch verletzt ist.

Aufgabe H2 (KKT-Bedingungen) (7 Punkte)
Gegeben seien stetig differenzierbare Funktionen f_j und h_i von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Betrachen Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & \max\{f_1(x),\dots,f_p(x)\} \\ \text{s.t.} & h_i(x)=0\,, \quad i=1,\dots,m. \end{array}$$

Sei $\bar{x}$ ein lokales Minimum dieses Problems, und seien die Gradienten $\nabla h_i(\bar{x})$, $i=1,\dots,m$, linear unabhängig. Beweisen Sie, dass dann Vektoren $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_p)$ und $\bar{\mu}=(\bar{\mu}_1,\dots,\bar{\mu}_m)$ existieren mit

$$\sum_{j=1}^{p}\bar{\lambda}_j\nabla f_j(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_i\nabla h_i(\bar{x})=0 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}\geq 0, \sum_{j=1}^{p}\bar{\lambda}_j=1, \tag{1}$$

$$\text{Für alle } j=1,\dots,p \text{ gilt: } \bar{\lambda}_j>0 \Longrightarrow f_j(\bar{x})=\max\{f_1(\bar{x}),\dots,f_p(\bar{x})\}. \tag{2}$$

Hinweis: Formulieren Sie das Problem geeignet in ein Optimierungsproblem mit differenzierbarer Zielfunktion um, bei dem die obige Zielfunktion in geeigneter Form in den Nebenbedingungen auftaucht. Führen Sie dazu eine zusätzliche Variable ein.

Aufgabe H3 (KKT-Bedingungen) (6 Punkte)
Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \|x\|^2 \\ \text{s.t.} & x_1+x_2+x_3=3 \\ & 2x_1-x_2+x_3\leq 5 \end{array}$$

Existiert eine Lösung? Wenn ja, berechnen Sie sie mit Hilfe der KKT-Bedingungen (Achtung: Constraint Qualification verifizieren). Warum ist die Lösung eindeutig?

Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Fälle: Ungleichungs-Lagrange-Multiplikator gleich Null bzw. größer Null.