Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
M.Sc. Franziska Kartzow
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

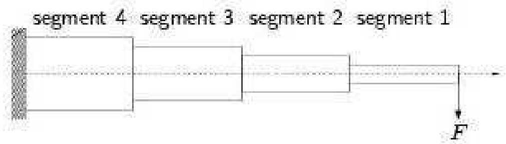
WS 2010/2011
29. Oktober 2010

1. Übungsblatt zur „Nichtlinearen Optimierung“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Modellierung)

Ein aus N Segmenten bestehender Auslegerbalken (vgl. Abbildung) soll so konstruiert werden, dass sein Gewicht minimiert, aber gleichzeitig die am rechten Ende vertikal nach unten wirkende Kraft F gehalten wird.



Jedes Segment habe Länge 1 und rechteckigen Querschnitt mit Breite b_i und Höhe h_i, die jeweils zwischen $b_{\min}$ und $b_{\max}$ bzw. $h_{\min}$ und $h_{\max}$ variieren können. Der Formfaktor h_i/b_i unterliegt ebenfalls Beschränkungen und soll nicht kleiner als $S_{\min}$ und nicht größer als $S_{\max}$ sein. Die Materialspannung soll nicht größer als $\sigma_{\max}$ sein, die Auslenkung am rechten Ende des Balkens nicht größer als $y_{\max}$.

Dabei berechnet sich die Spannung in Segment i als $\sigma_i = \frac{6iF}{b_i h_i^2}$. Die Auslenkung von Segment i berechnet sich rekursiv und beinhaltet auch die Biegung: Bezeichne y_i die Auslenkung am rechten Ende von Segment i und v_i die Biegung in diesem Punkt. Seien $y_{N+1} = v_{N+1} = 0$, dann ergibt sich für $i = N, N-1, \dots, 1$

$$v_i = 12(i - 1/2)\frac{F}{Eb_i h_i^3} + v_{i+1}, \qquad y_i = 6(i - 1/3)\frac{F}{Eb_i h_i^3} + v_{i+1} + y_{i+1}.$$

Die Zahl E ist dabei der materialabhängige Elastizitätsmodul.

Modellieren Sie diese Konstruktionsaufgabe als nichtlineares Optimierungsproblem.

Aufgabe G2 (konvexe Funktionen)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $g : K \to I$ (streng) konvex und $f : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass die Komposition

$$f \circ g : K \to \mathbb{R}$$

(streng) konvex ist.

Aufgabe G3 (Konvexität und Extremwerte)

Zeigen Sie:

Sei $Z \in \mathbb{R}^n$ konvex und $f : Z \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:

(a) *Jedes lokale Minimum von f auf Z ist auch globales Minimum.*

(b) *Die Lösungsmenge von*

$$\min_{x \in Z} f(x)$$

ist konvex.

(c) *Ist f streng konvex, so hat f auf Z höchstens ein lokales Minimum und dieses ist dann auch globales Minimum.*

Gilt Aussage a) auch für Maxima, d.h. ist jedes lokale Maximum auch globales Maximum?

Aufgabe G4

Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge

$$N_f(w) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(w)\}$$

kompakt ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sind die Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\nabla(F(x)^T G(x)) = F'(x)^T G(x) + G'(x)^T F(x).$$

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden quadratischen Funktion unter Zuhilfenahme des ersten Aufgabenteils:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

Aufgabe H2 (Konvexe Funktionen) (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind konvex, streng konvex, konkav oder streng konkav ?

- $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 + 5x_2$
- $f_2(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1 + x_2)}$
- $f_3(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 10x_1 - 10x_2$
- $f_4(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_1x_3 - x_2x_3$

Bem.: f ist konkav $\Leftrightarrow$ $-f$ ist konvex.

Aufgabe H3 (Konvexität der Norm) (4 Punkte)

Sei $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \|x - y\|$ konvex, aber nicht strikt konvex auf $\mathbb{R}^n$ ist und dass die Niveaumengen von f kompakt sind.