Kap VI Die Dedekindsche Zetafunktion

§1 Die Riemannsche Zetafunktion

Ziel: Studiere die Arithmetik von $\mathbb{Q}$ mit analytischen Methoden

Def: Für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$ ist die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ def. durch

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Bem 1:
Die Reihe konvergiert normal ($\Rightarrow$ lok. gleichm. abs.) für $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Bew: $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, s}}$

$\Rightarrow$ genügt $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ zu betr.

Ana 1 $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ konv $\Leftrightarrow \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ konv

$\Leftrightarrow \lim_{A \to \infty} \int_{x=1}^{A} \frac{1}{x^s}\,dx$ ex

$\Leftrightarrow \lim_{A \to \infty} \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^A$ ex

OK für $s > 1$ □

Kor 2: $\zeta(s)$ ist hol. Fkt. auf $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Bem 3: Für $\operatorname{Re} s > 1$ hat $\zeta(s)$ die abs. konv. Eulerprodukt-Entw.

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Bew: Übung

Kor 4: Es ex. ∞ viele Pz.

Bew: Ang. nicht. Dann ist

$$\prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{endl. Prod.}$$

$\Rightarrow$ $\zeta(s)$ hol. auf $\operatorname{Re} s > 0$

$\Rightarrow$ ↯ zu $\lim\limits_{s \to 1} \zeta(s) = \lim\limits_{s \to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$. $\square$

Ziel: · $\zeta(s)$ hat merom. Forts. auf $\mathbb{C}$.

· Brauche Γ-Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$$

· konv. für $\operatorname{Re} s > 0$
· Merom. Forts.
· $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$
· $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

· Damit können wir eine Integraldarst. für $\zeta(s)$ erhalten:

<u>Beweis</u>: $\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y}\, y^s \frac{dy}{y}$

<u>Bew</u>: r.S. $= \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{\pi n^2}\right)^s \frac{dy}{y}$

$$= \pi^{-s} n^{-2s}\int_0^\infty e^{-y}\, y^s \frac{dy}{y}. \quad \square$$

<u>Kor 6</u>:

$$Z(s) := \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 y}\, y^{s/2}\frac{dy}{y}$$

Die Reihe und das Integral konv. dabei absolut.

<u>Def</u>: Für $z \in H = \{z\in\mathbb{C} ;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ ist $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty e^{\pi i n^2 z}$ die <u>Jacobische Thetafunktion</u>.

- $\Theta(z)$ ist hol. auf H (Übung)

<u>Kor 7</u>:

$$Z(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(iy) - 1)\, y^{s/2}\frac{dy}{y}.$$

- <u>Zeige</u>: $\Theta(z)$ genügt Funktionalgl. $\Rightarrow$ Forts. + Fkt-Gl für $\zeta(s)$.

<u>Satz 8</u>: Es gilt

$$\Theta(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\;\Theta(z).$$

(Dies impliziert, dass $\Theta(z)$ eine sog. Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ ist.)

Bew.: $\Theta(z)$ ist hol. auf $\mathbb{H}$.

Id-Satz $\Rightarrow$ Genügt Bew. für $z \in i\mathbb{R}_{>0}$ z.z., also

$$(*) \qquad \Theta(i/t) = \sqrt{t}\,\Theta(it), \quad t \in \mathbb{R}_{>0}$$

Benutze dazu die Poissonsche Summen-Formel:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Schwartz-Funktion (d.h. $f^{(n)}(x)|x|^N \to 0$ für $|x| \to \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall N \in \mathbb{N}_0$).

Sei

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi i x y}\, dx$$

die Fouriertransformierte.

Dann ist $\hat{f}$ auch Schwartz-Fkt. und

$$(**) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Wende dies an für die Schwartz-Fkt

$$f(x) = e^{-\pi x^2/t} \qquad (t>0)$$

Übung: $\hat{f}(y) = \sqrt{t}\, e^{-\pi y^2 \cdot t}$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 \cdot t}$$

$\Rightarrow (*)$ $\square$

Satz 9: $Z(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s)$ lässt eine hol. Forts. auf $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Bei $s=0,1$ liegen einfache Pole mit Res. $-1, 1$. Es gilt die Fu-Gl.

$$Z(s) = Z(1-s).$$

Bew:

Kor 7 $\Rightarrow$ $Z(2s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(it)-1)\, t^{s}\,\frac{dt}{t}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(it)-1)\, t^{s}\,\frac{dt}{t}}_{I(s)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 (\Theta(it)-1)\, t^{s}\,\frac{dt}{t}}_{II(s)}$$

$$II(s) \underset{t\mapsto 1/t}{=} +\frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(i/t)-1)\, t^{-s}\,\frac{dt}{t}$$

$$\overset{\text{Satz 8}}{=} +\frac{1}{2}\int_1^\infty (\sqrt{t}\,\Theta(it)-1)\, t^{-s}\,\frac{dt}{t}$$

$$= +\frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(it)-1)\, t^{\frac12 - s}\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(t^{-s} - t^{\frac12 - s}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= +I\left(\tfrac{1}{2}-s\right) + \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(t^{-1-s} - t^{s-\frac12}\right) dt$$

$$= \cdot/\cdot + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-s}\, t^{-s}\right]_1^\infty - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac12 - s}\, t^{\frac12 - s}\right]_1^\infty$$

$u = \frac{1}{t}$

$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2}$

$$\overset{\operatorname{Re} s > \frac12}{=} \cdot/\cdot + \frac{1}{2s} + \frac{1}{1-2s}$$

$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{t}$

$$\Rightarrow Z(s) = I\left(\tfrac{s}{2}\right) + I\left(\tfrac{1-s}{2}\right) + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}.$$

Wegen des exponentiellen Abfalles von $\vartheta(it)-1$ für $t\to\infty$ konvergiert $\xi(s)$ $\forall s\in\mathbb{C}$ und def. dort eine hol. Fu.

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

<u>Kor</u>: • $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$

• $\zeta(-2n) = 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$

(triviale Nullstellen)

<u>Bew</u>: $\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$

$\Rightarrow \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

• Die nicht-trivialen Nullst. von $\zeta(s)$ enthalten wichtige Informationen über PZ-Verteilung, d.h. zu

$$\pi(x) = \#\{p \text{ PZ};\ p\le x\}.$$

• $\zeta(0)\neq 0 \Rightarrow \zeta(1)=\infty \Rightarrow \pi(x)\to\infty,\ x\to\infty$

• $\zeta(1+it)\neq 0\ \forall t\in\mathbb{R} \iff$
$\pi(x)\sim \dfrac{x}{\log x}, \quad x\to\infty$

• Riemannsche Vermutung:
Alle nichttrivialen Nullst. von $\zeta(s)$ liegen auf der Geraden
$$\left\{\tfrac{1}{2}+it;\ t\in\mathbb{R}\right\}$$
$\Rightarrow$ starke Fehler-Abschl. im PZ-Satz.

§2 Dirichletsche L-Funktionen

· Sind Verallgemeinerungen der Riemannschen Zetafunktion.

· z.B. wichtig im Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes.

<u>Def</u>: Ein <u>Dirichletcharakter</u> mod $m \in \mathbb{N}$ ist ein Gruppenhom.

$$\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad (= GL_1(\mathbb{C})).$$

Ist $m' \in \mathbb{N}$ mit $m' | m$ und χ' Dirichletcharakter mod m', so heißt χ <u>induziert</u> durch χ', falls

(*)
$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & \mathbb{C}^* \\ (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^* \arrow[ur, "\chi'"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

χ heißt <u>primitiv</u>, falls χ nicht von einem Dirichletchar. mod m' induziert wird mit $m'|m$, $m' \neq m$.

Ist χ Dirichletcharakter mod m, so heißt

$f = \min\{ m' \in \mathbb{N} ;\ \exists\, \chi' : (\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ s.d. (*) kommutiert $\}$

der <u>Führer</u> von χ.

Somit wird χ stets durch einen primitiven Charakter χ' mod f induziert.

Zu χ definieren wir eine multiplikative Funktion $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n \bmod m) & \text{für } (n,m)=1 \\ 0 & \text{für } (n,m) \neq 1, \end{cases}$$

diese wird auch als Dirichlet Charakter bezeichnet.

<u>Beispiele</u>

- Der <u>triviale Charakter</u> oder <u>Hauptcharakter</u> χ_0 mod m ist durch

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } (n,m)=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ erklärt.

insbesondere χ_0 mod $1 \equiv 1$

- Für jede Primzahl p ist das Legendresymbol ein ~~primitiver~~ Dirichletcharakter mod p

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 & \text{für } (n,p) \neq 1 \end{cases}$$

- Für $m=5$ gibt es neben χ_0 drei weitere Charaktere, diese sind durch das Bild ~~von~~ eines Erzeugers, etwa $\bar{2}$ von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ in der Gruppe $\mu_4^\times$ der 4ten Einheitswurzeln eindeutig bestimmt.

1	2	3	4
1	i	$-i$	-1
1	-1	-1	1
1	$-i$	$+i$	1

<u>Def:</u> Zu einem Dirichlet-Charakter χ mod m definiert man die <u>Dirichletsche L-Reihe</u>

$$L(\chi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wobei $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 1$.

<u>Bemerkung:</u> ~~Für~~ $\chi = \chi_0$ mod 1 ist

$$L(\chi,s) = \zeta(s).$$

<u>Satz:</u> Für $Re\, s > 1$ konvergiert die Reihe $L(\chi,s)$ ~~absolut und gleichmäßig~~ normal.
In diesem Bereich hat man die absolut konvergente Euler-Produktdarstellung

$$L(\chi,s) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

<u>Bew:</u> Da $|\chi(n)| \leq 1$ und $\chi(nm) = \chi(n)\cdot\chi(m)$ für $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ ist der Beweis analog zu dem für $\zeta(s)$.

Ziel: $L(\chi,s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$.

Das Vorgehen ähnelt dem für $\zeta(s)$, wir skizzieren die wesentlichen Schritte

- $\Gamma(\chi,s) := \Gamma\left(\frac{s+p}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y}\, y^{(s+p)/2} \frac{dy}{y}$.

  Dabei ist $p \in \{0,1\}$ durch
  $$\chi(-1) = (-1)^p \chi(1)$$
  gegeben (sog. Exponent von χ).

- In Verallgemeinerung der Jacobischen Thetafunktion $\theta(z)$ definiert man
  $$\theta(\chi,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n)\, n^p e^{\pi i n^2 z/m}$$
  Wegen $\chi(n)n^p = \chi(-n)(-n)^p$ gilt
  $$(*) \qquad \theta(\chi,z) = \chi(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^p e^{\pi i n^2 z/m}$$

Bem: $\chi(0)=0$ außer für $\chi \equiv \chi_0 \bmod 1$

Satz: ~~Für~~ Die vollständige L-Reihe zum Charakter χ
$$\Lambda(\chi,s) := \left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma(\chi,s)\, L(\chi,s),$$
für $\mathrm{Re}\, s > 1$, ~~hat man~~ besitzt die Integraldarstellung
$$\Lambda(\chi,s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{p/2} \int_0^\infty \left(\theta(\chi,iy) - \chi(0)\right) y^{(s+p)/2} \frac{dy}{y}.$$

Bew: Substituiere $y \mapsto \pi n^2 y/m$ in obigem Γ-Integral,

$$\left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s+\ell}{2}} \Gamma(\chi,s)\,\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty n^\ell e^{-\pi n^2 y/m}\, y^{\frac{s+\ell}{2}}\,\frac{dy}{y}$$

multipliziere mit $\chi(n)$ und bilde $\sum_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s+\ell}{2}} \Gamma(\chi,s)\, L(\chi,s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^\infty \chi(n)\, n^\ell e^{-\pi n^2 y/m}\, y^{\frac{s+\ell}{2}}\,\frac{dy}{y}$$

wegen

$$\sum\int|\ \dots\ |\frac{dy}{y} \le \left(\frac{m}{\pi}\right)^{(Re(s)+\ell)/2} \Gamma\left(\frac{Re(s)+\ell}{2}\right) \zeta(Re(s)) < \infty$$

folgt

$$\sum\int \leftrightarrow \int\sum$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi(n)\, n^\ell e^{-\pi n^2 y/m}}_{g(y)}\, y^{(s+\ell)/2}\,\frac{dy}{y}$$

Aus (*) ergibt sich $g(y) = \frac{1}{2}\left(\Theta(\chi, iy) - \chi(0)\right)$.

Es folgt

$$\Lambda(\chi,s) = \int_0^\infty \left(\Theta(\chi,iy) - \chi(0)\right) y^{\frac{s+\ell}{2}}\,\frac{dy}{y} \quad \square$$

(Bem: $\chi(0) = 1$ für $\chi_0 \pmod 1$ ansonsten 0 für jedes χ.)

Def: Zu einem Dirichlet Charakter mod m und einer ~~natürlichen~~ ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist die <u>Gaußsche Summe</u> $\tau(\chi, n)$ durch

$$\tau(\chi, n) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \chi(\nu) e^{2\pi i \nu n/m}$$

definiert. Man setzt $\tau(\chi) = \tau(\chi, 1)$.

<u>Satz:</u> Ist χ mod m primitiver Charakter, so gilt

(i) $\tau(\chi, n) = \bar{\chi}(n) \tau(\chi)$ und (ii) $|\tau(\chi)| = \sqrt{m}$

<u>Bew:</u> (i) Für $(n,m) = 1$ hat man

$$\tau(\chi, n) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \chi(\nu) e^{2\pi i \nu n/m} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \chi(\nu n) \chi(n)^{-1} e^{2\pi i \nu n/m}$$

$\chi(n)^{-1} = \bar{\chi}(n)$!

$$= \bar{\chi}(n) \sum_{\nu'=0}^{m-1} \chi(\nu') e^{2\pi i \nu'/m} = \bar{\chi}(n) \tau(\chi, 1).$$

Ist $(n, m) = d \neq 1$ so sind beide Seiten der Gl. $= 0$:

~~Einerseits ist $\bar{\chi}(n) = 0$ und andererseits~~

Auf der RS ist $\bar{\chi}(n) = 0$. Auf der LS wähle a mit $a \equiv 1 \bmod m/d$ (existiert und $a \not\equiv 1 \bmod$

[redacted]

Einerseits: RS $=0$ wegen $\bar{\chi}(u)=0$.

Andererseits: Wähle a mit $a \equiv 1 \bmod m/d$ und $a \not\equiv 1 \bmod m$ sowie $\chi(a) \neq 1$ (existiert, da χ primitiv). Dann gilt

$$\chi(a)\tau(\chi,u) = \chi(a)\sum_{v=0}^{m-1}\chi(v)e^{2\pi i v u/m}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1}\chi(av)e^{2\pi i v u/m} = \sum_{v=0}^{m-1}\chi(av)e^{2\pi i \underline{va} u/m}$$

$$= \tau(\chi,u) \quad \text{folglich } \tau(\chi,u)=0.$$

(ii)

$$|\tau(\chi)|^2 = \tau(\chi)\bar{\tau}(\chi) = \tau(\chi)\sum_{v=0}^{m-1}\bar{\chi}(v)e^{-2\pi i v/m}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1}\tau(\chi,v)e^{-2\pi i v/m}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\chi(\mu)e^{2\pi i v\mu/m}e^{-2\pi i v/m}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m-1}\chi(\mu)\sum_{v=0}^{m-1}e^{2\pi i v(\mu-1)/m}$$

Für $\mu=1$ ist die innere Summe $\sum_{v=0}^{m-1} 1 = m$.

Für $\mu \neq 1$ ist $\zeta = e^{2\pi i(\mu-1)/m}$ $m$te Einheitswurzel und somit

$$\sum_{v=0}^{m-1}\zeta^v = 0 \quad \left(\text{Da } \zeta \text{ NS von } \frac{x^m-1}{x-1}\right)$$

Also $|\tau(\chi)|^2 = m\chi(1) = m$. □

[redacted]

Satz: Ist χ ein primitiver Dirichlet-Charakter mod m, so gilt für die Theta-Reihe $\theta(\chi,z)$ die Transformationsformel

$$\theta(\chi,-1/z) = \frac{\tau(\chi)}{i^\rho\sqrt{m}}\left(\frac{z}{i}\right)^{\rho+1/2}\theta(\bar\chi,z).$$

$\bar\chi$ ist dabei der konjugierte ~~Charakter~~, also der inverse Charakter mod m zu χ.

Ohne Beweis.

Bew (Skizze): Man ~~schreibt~~ zerlegt $\theta(\chi,z)$ nach Klassen a mod m

$$\theta(\chi,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)n^\rho e^{\pi i n^2 z/m} = \sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)\underbrace{\sum_{g\in m\mathbb{Z}}(a+g)^\rho e^{\pi i (a+g)^2 z/m}}_{\theta^\rho_m(a,0,z/m):=}$$

Man kann (durch Untersuchung von Reihen der Form

$$\theta_\mu(a,b,z) = \sum_{g\in\mu\mathbb{Z}} e^{\pi i (a+g)^2 z + 2\pi i b g}$$

für $a,b,\mu\in\mathbb{R}$, $\mu>0$)

zeigen, dass

$$\theta^\rho_m(a,0,-1/mz) = \frac{1}{i^\rho m}\left(\frac{mz}{i}\right)^{\rho+1/2}\theta^\rho_{1/m}(0,a,mz)$$

gilt. Damit erhält man

$$\theta(\chi,-\tfrac{1}{z}) = \frac{1}{i^\rho m}\left(\frac{mz}{i}\right)^{\rho+1/2}\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)\theta^\rho_{1/m}(0,a,mz)$$

$$= \frac{1}{i^\rho m^{\rho+1}}\left(-\right)^{\rho+1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{a=0}^{m-1}\chi(a)e^{2\pi i a n/m}\right)n^\rho e^{\pi i n^2 z/m}$$

$$= \frac{1}{\cdots}(\cdots)^{\rho+1/2}\tau(\chi)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\bar\chi(n)n^\rho e^{\pi i n^2 z/m} = \frac{1}{\cdots}(\cdots)\theta(\bar\chi,z)$$

[redacted]

Bemerkung: Ist χ ein nicht primitiver Charakter mod m, mit Führer f, so wird χ von einem primitiven χ' mod f induziert. Es gilt dann

$$L(\chi,s) = \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid f}} (1-\chi(p)p^{-s})\, L(\chi',s).$$

Funktionalgleichung und ~~meromorphe~~ Fortsetzbarkeit von $\Lambda(\chi,s)$ folgen also, wenn diese für $\Lambda(\chi',s)$ gelten. Wir können uns also auf primitive Charaktere beschränken.

Satz: Für einen nicht-trivialen primitiven Dirichlet-Charakter χ besitzt die vollständige L-Reihe $\Lambda(\chi,s)$ eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und ~~die~~ es gilt die Funktionalgleichung

$$\Lambda(\chi,s) = \frac{\tau(\chi)}{i^p\sqrt{m}}\,\Lambda(\bar\chi,1-s).$$

(Der Faktor $\frac{\tau(\chi)}{i\sqrt{m}}$ hat Betrag 1)

~~Bew:~~ ~~Setze~~ $\cancel{f(t) = \frac{c(\chi)}{2}\theta \qquad c(\chi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{s/2}}$

[redacted]

Bew: Setze $f(y) = \frac{c(\chi)}{2}\theta(\chi, iy)$, $g(y) = \frac{c(\bar{\chi})}{2}\theta(\bar{\chi}, iy)$

mit $c(\chi) = \left(\frac{\pi}{m}\right)^{\ell/2}$ (beachte $c(\chi) = c(\bar{\chi})$!).

Da χ nicht-~~trivial~~, ist $\chi(0) = \bar{\chi}(0) = 0$ also

$$\Lambda(\chi, s) = \int_0^\infty f(y)\, y^{\frac{s+\ell}{2}} \frac{dy}{y}, \quad \Lambda(\bar{\chi}, s) = \int_0^\infty g(y)\, y^{\frac{s+\ell}{2}} \frac{dy}{y}$$

Mit der Transformationsformel für $\theta(\chi, \tau)$ ergibt sich

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{c(\chi)}{2}\theta(\chi, -1/iy) = \frac{c(\chi)\tau(\chi)}{2 i^\ell \sqrt{m}} y^{\ell + 1/2}\theta(\bar{\chi}, iy)$$

$$= \frac{\tau(\chi)}{i^\ell \sqrt{m}} y^{\ell + \frac{1}{2}} g(y) =: C y^k g(y)$$

Setze $s' = \frac{s+\ell}{2}$.

$$F(s') := \int_0^\infty f(y) y^{s'} \frac{dy}{y} = \int_1^\infty f(y) y^{s'} \frac{dy}{y} + \underbrace{\int_0^1 f(y) y^{s'} \frac{dy}{y}}$$

$$= \int_1^\infty f\left(\frac{1}{y}\right) y^{-s'} \frac{dy}{y} = C \int_0^\infty g(y)\, y^{-s'+k-1}\, dy$$

Wegen des exponentiellen Abfalls von $\theta(\bar{\chi}, iy)$ ist dieses Integral absolut konvergent auch auf ganz $\mathbb{C}$

mithin

$$F(s') = \int_1^\infty \left[f(y) y^{s'} + C g(y) y^{k-s'}\right] \frac{dy}{y}$$

[redacted]

Genauso (vertausche f und g) ergibt sich für

$$G(s') = \int_0^\infty g(y)\, y^{s'} \frac{dy}{y}$$

$$= \int_1^\infty \left[g(y)\, y^{s'} + C^{-1} f(y)^{k-s'} \right] \frac{dy}{y}$$

(auch dieses Integral ist wegen des exponentiellen Abfalls von $\Theta(\bar{\chi}, iy)$ absolut konvergent. Man hat

$$F(s') = C\, G(k-s') \quad \text{also} \qquad \cancel{k-s' = p + \tfrac{1}{2} - \tfrac{s+p}{2}} \quad \cancel{\tfrac{1-s+p}{2}}$$

$$\Lambda(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{i^p \sqrt{m}} \Lambda(\bar{\chi}, 1-s).$$

Aus $|\tau(\chi)| = \sqrt{m}$ folgt schließlich $\left| \frac{\tau(\chi)}{i^p\sqrt{m}} \right| = 1$.

□

, da

$k - s' = p + \frac{1}{2} - \frac{s+p}{2} = \frac{1-s+p}{2}$, also

$$G(k-s') = \int_0^\infty g(y)\, y^{\frac{(1-s)+p}{2}} \frac{dy}{y} = \Lambda(\bar{\chi}, 1-s)$$

§3 Die Dedekindsche Zetafunktion

$K/\mathbb{Q}$ Zahlkörper, $n = [K:\mathbb{Q}]$, r_1 reelle Ein..., $2r_2$ komplexe ...

Def: Die Dedekindsche Zetafunktion von K ist

$$\zeta_K(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \\ \text{ganzes Ideal}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Satz 1: $\zeta_K(s)$ konv. abs. und glm. auf $\mathrm{Re}\, s > 1+\delta$ für $\delta > 0$. Es gilt

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \text{ prim}} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

Bew: Wie für $\zeta(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)$. Benutze eind. Primidealfaktorisierung.

Etwas allgemeiner:
Sei $\mathfrak{A} \in Cl(K)$ Idealklasse.

$$\zeta(\mathfrak{A}, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A} \\ \mathfrak{a} \text{ ganz}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Dann ist

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{A} \in Cl(K)} \zeta(\mathfrak{A}, s).$$

Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^{-1}$ ist

$$\zeta(\mathfrak{A}, s) = N(\mathfrak{a})^s \cdot \sum_{a \in (\mathfrak{a} \setminus \{0\})/\mathcal{O}_K^\times} \frac{1}{|N(a)|^s}.$$

(Übung).

Ziel: Forts. + Fkt-Gl für $\zeta_K(s)$. (114)

Brauchen Euler-Faktor „bei ∞". (Gamma-Faktor). (Analog von $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$)

Sei $Z_\infty(s) = |d_K|^{s/2}\,\pi^{-\frac{ns}{2}}\cdot\Gamma_K\left(\frac{s}{2}\right)$,

$$\Gamma_K(s) = \int N(e^{-y}y^s)\frac{dy}{y}$$

$$= \Gamma(s)^{r_1}\cdot 2^{r_2(1-2s)}\,\Gamma(2s)^{r_2}$$

Def: $Z_K(s) = Z_\infty(s)\cdot\zeta_K(s)$

$[\,Z(\mathfrak{A},s) = Z_\infty(s)\cdot\zeta(\mathfrak{A},s)\,]$

Satz 2: Die Zetafunktion $Z_K(s)$ hat eine hol. Forts. auf $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ und genügt der Fkt-Gl

$$Z_K(s) = Z_K(1-s).$$

Bei $s=0,1$ liegen einfache Pole mit Residuen

$$-\frac{2^{r_1+r_2}\,h\cdot R}{w}\,,\quad +\frac{2^{r_1+r_2}\,h\,R}{w}$$

Dabei ist

$h = \#Cl(K)$

$w = \#\mu(K)$

R = Regulator = $\dfrac{vol(H/\Gamma)}{\sqrt{r_1+r_2}}$

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{R}}^* \arrow[r, "\ell"] & \left(\prod_\sigma \mathbb{R}\right)_+^{r_1+r_2} \\
S \arrow[u] \arrow[r, "\ell"] & H \arrow[u] \\
\mathcal{O}_K^* \arrow[u, "j"] \arrow[r] & \Gamma \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

S = Norm-1 Hyperfl.

H = Spur-0 Hyperebene

$\Gamma = \lambda(\mathcal{O}_K^*) \subset H$

$\lambda = \ell\circ j$

Schreibe $\lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_{t+1}\end{pmatrix}$, $t = r_1 + r_2 - 1$

Seien $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t \in \mathcal{O}_K^*$ Fundamental-Einheiten. Dann ist

$$R = \left|\det\begin{pmatrix}\lambda_1(\varepsilon_1) & \cdots & \lambda_1(\varepsilon_t)\\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_t(\varepsilon_1) & \cdots & \lambda_t(\varepsilon_t)\end{pmatrix}\right|$$

(Neukirch I, §7)

Bew (Idee): Wie bei der Riemannschen Zeta-Fkt.
Betr. die Zeta-Fkt $Z(\mathfrak{A}, s)$
$\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ definiert
Gitter $\Gamma_{\mathfrak{a}} \subset K_{\mathbb{R}} = \left(\prod_\sigma \mathbb{C}\right)^+$
Betr. dann die Thetafkt.

$$\Theta_{\Gamma_\mathfrak{a}}(z) = \sum_{g\in\Gamma_\mathfrak{a}} e^{\pi i \langle g, g\rangle z}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Es gilt $\Theta_{\Gamma_\mathfrak{a}}(-1/z) = \dfrac{\sqrt{(z/i)}^{\,r_1+r_2}}{\mathrm{vol}(\Gamma_\mathfrak{a})}\,\Theta_{\Gamma_\mathfrak{a}'}(z)$

(Poisson-Summation).

Nutze Mellin-trafo von $\Theta_{\Gamma_\mathfrak{a}}$, um Integraldarst. zu erhalten. □

Korollar 3
$\zeta_K(s)$ hat hol. Forts. auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
Bei $s=1$ liegt ein einfacher Pol

mit Residuum

$$\kappa = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w\,|d_K|^{1/2}}\, h_K \cdot R$$

(„analytische Klassenzahlformel")

Bsp: Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0, 1$, $d \equiv 1\ (4)$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Sei χ_d der Dirichletcharakter mod d:

$$\chi_d(x) = \left(\frac{x}{d}\right).$$

Dann ist

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \cdot L(\chi_d, s).$$

Bew: Zerlegungsgesetz für PZ.

· Lässt sich auf bel. quadratfreie d verallgemeinern.

Satz 4: Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ der m-te Kreisteilungskörpers. Es gilt

$$\zeta_K(s) = G_m(s) \prod_{\substack{\chi \bmod m \\ \text{Dirichletchar.}}} L(\chi, s),$$

mit

$$G_m(s) = \prod_{\mathfrak{p} \mid m} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Bew: Vergleiche Eulerprodukte:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p} \mid m} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$$\prod_{\chi\ (\mathrm{mod}\ m)} L(\chi, s) = \prod_{p \nmid m} \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

⇒ Genügt z.z.: Für ein $\mathfrak{P} | p$ mit $p \nmid m$ gilt

$$\prod_{\mathfrak{p} | p} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - p^{-fs})^{-r} = \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

Dabei ist f = Trägheitsgrad, $r = \# \mathfrak{P} | p$ über p.

Wissen: f = Ordnung von $G_p = \langle p \rangle \subset (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$,

$e = 1$

$r = \varphi(m)/f$

Die Zuord. $\chi \mapsto \chi(p)$ definiert Iso $\hat{G}_p \xrightarrow{\sim} \mu(f)$ = f-te EW.

Haben

$$1 \longrightarrow \widehat{G/G_p} \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \mu_f \longrightarrow 1, \qquad \chi \mapsto \chi(p^f)$$

$$\Rightarrow r = \#(\widehat{G/G_p}) = [G : G_p]$$

= Anz. der Urbilder von $\chi(p)$.

$$\Rightarrow \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} = \prod_{\zeta \in \mu_f} (1 - \zeta p^{-s})^{-r}$$

$$= (1 - p^{-fs})^{-r}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p} | p} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \qquad \square$$

Satz 5: Für jeden nicht-triv. Dirichletchar χ mod m gilt

$$L(\chi,1) \neq 0.$$

Bew: Satz 4 $\Rightarrow$

$$\zeta_K(s) = G_m(s) \prod_{\chi} L(\chi,s)$$

$$= G_m(s)\, L(\chi_0 \bmod m, s) \cdot \prod_{\chi\neq\chi_0} L(\chi,s)$$

$$= \underbrace{G_m(s) \prod_{p\mid m} (1-p^{-s})}_{\text{hol. u. } \neq 0 \text{ bei } s=1} \underbrace{\zeta(s)}_{\text{1. Ord. Pol bei } s=1\ (\S 1)} \cdot \underbrace{\prod_{\chi\neq\chi_0} L(\chi,s)}_{\text{hol. bei } s=1\ (\S 2)}$$

Wäre $L(\chi,1)=0$ für ein $\chi\neq\chi_0$, so wäre die r. S. hol. bei $s=1$, $\lightning$.

Satz 6: (Dirichletscher PZ-Satz)
Sei $(a,m)=1$. Die arithmetische Progression

$$a + m\mathbb{Z}$$

enthält ∞ viele PZ.

Bew: Sei χ Dirichletchar mod m.
Es gilt

$$\log L(\chi,s) = -\sum_p \log(1-\chi(p)p^{-s})$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + g_\chi(s),$$

wobei $g_\chi(s)$ hol. für $\operatorname{Re} s > \tfrac12$.

$a a^{-1} \equiv 1 \, (m) \Rightarrow \sum_{\chi} \chi(a^{-1}) \log L(\chi, s)$

$$= \sum_{\chi} \sum_{p} \frac{\chi(a^{-1}p)}{p^{s}} + g_1(s)$$

$$= \sum_{p} \underbrace{\sum_{\chi} \chi(a^{-1}p)}_{= \begin{cases} 0, & a^{-1}p \not\equiv 1 \, (m) \\ \varphi(m), & a^{-1}p \equiv 1 \, (m) \end{cases}} p^{-s} + g(s)$$ hol. für $\operatorname{Re} s > 1/2$

$$= \varphi(m) \sum_{p \equiv a \, (m)} \frac{1}{p^{s}} + g(s)$$

Kor 5 $\Rightarrow$ l.S. hat Pol bei $s = 1$

$\Rightarrow$ r.S. " " " $s = 1$

$\Rightarrow$ Beh.