Kap. 4 Idealklassengruppe und Einheitengruppe

§1 Gitter

<u>Def</u>: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR der Dim. n. Ein <u>Gitter</u> in V ist eine Ug der Form

$$\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \ldots + \mathbb{Z}v_m$$

mit $v_1, \ldots, v_m \in V$ l.u.
Das Gitter heißt <u>vollständig</u>, falls $m = n$.
Die Menge

$$\mathcal{F} = \{x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m : x_i \in \mathbb{R},\ 0 \le x_i < 1\}$$

heißt <u>Fundamentalbereich</u>.

<u>Bem. 1</u>: Ein Gitter $\Gamma \subset V$ ist vollst.

$$\Longleftrightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\gamma + \mathcal{F}) = V$$

<u>Bew</u>: Übung

<u>Lemma 2</u>: Eine Ug $\Gamma \subset V$ ist ein Gitter $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \subset V$ diskret.

<u>Bew</u>: Übung

<u>Lemma 3</u>: Ein Gitter $\Gamma \subset V$ ist vollst. $\Longleftrightarrow$ Es ex. beschr. Teilmenge $M \subset V$ so dass

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\gamma + M) = V.$$

$\Rightarrow V/\Gamma$ ist kompakt.

Bew: Übung

Sei nun V ein euklidischer $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ (bilinear, symmetrisch, pos def).

Man kann Volumen messen.
Ist $e_1, \dots, e_n$ ONB, so hat der von $e_1, \dots, e_n$ aufgespannte Würfel Vol $= 1$.

Das Parallelotop
$$P = \{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \,;\; x_i \in \mathbb{R},\ 0 \le x_i < 1\}$$
(wobei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V) hat
$$\mathrm{vol}(P) = |\det(A)|,$$
wobei $A = (a_{ij})$ die Basiswechselmatrix von $e_1, \dots, e_n$ zu $v_1, \dots, v_n$ ist, also
$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$
Für die Gram-Matrix $G = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$ gilt:
$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \langle e_k, e_l \rangle$$
$$= \sum_k a_{ik} a_{jk}$$
$$= (i,j)\text{-ter Eintrag von } AA^t.$$
$$\Rightarrow \mathrm{vol}(P) = (\det G)^{1/2}.$$

Ist $\Gamma \subset V$ ein volles Gitter und $F \subset V$ ein Fu-Bereich, so schreiben wir
$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \mathrm{vol}(F).$$

- Ist unabh. von Wahl von F.

Def: Eine Teilmenge $X \subset V$ heißt
- symmetrisch, falls $x \in X \Rightarrow -x \in X$;
- konvex, falls $x, y \in X$
$\Rightarrow \{ty + (1-t)x;\ 0 \le t \le 1\} \subset X$.

Satz (Minkowskischer Gitterpunktsatz)
Sei $\Gamma \subset V$ ein vollständiges Gitter und $X \subset V$ eine symmetrische konvexe Teilmenge. Falls
$$\mathrm{vol}(X) > 2^n \mathrm{vol}(\Gamma),$$
so enthält X ein $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$.

Bew: • Genügt zz: $\exists\ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,\ \gamma_1 \neq \gamma_2$ so dass
$$\left(\tfrac{1}{2}X + \gamma_1\right) \cap \left(\tfrac{1}{2}X + \gamma_2\right) \neq \emptyset.$$
Denn seien $x_1, x_2 \in X$ mit
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \gamma_1 = \tfrac{1}{2}x_2 + \gamma_2,$$
so gilt
$$\gamma := \gamma_1 - \gamma_2 = \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1$$
= Mittelpunkt der Strecke, die $x_2, -x_1$ verbindet.

$\Rightarrow \gamma \in X$

$\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow \gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \in \Gamma \setminus \{0\}$.

- Ang $\tfrac{1}{2}X + \gamma,\ \gamma \in \Gamma$, sind paarw. disjunkt.

Sei $\mathcal{F}$ Fu-Bereich für Γ.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} \cap (\frac{1}{2}X + \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, paarw. disjunkt

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(\mathcal{F}) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{vol}(\mathcal{F} \cap (\tfrac{1}{2}X + \gamma))$$

vol translationsinvar.

$$\geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{vol}(-\gamma + (\mathcal{F} \cap (\tfrac{1}{2}X + \gamma)))$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{vol}((\mathcal{F} - \gamma) \cap \tfrac{1}{2}X)$$

$$\underset{\mathcal{F}\text{ Fu-Ber.}}{=} \mathrm{vol}(V \cap \tfrac{1}{2}X)$$

$$= \mathrm{vol}(\tfrac{1}{2}X)$$

$$= 2^{-n}\,\mathrm{vol}(X).$$

Also $2^n \mathrm{vol}(\Gamma) \geq \mathrm{vol}(X)$, $\lightning$ zur Ann. $\square$

§2 Minkowski - Theorie

Sei $K/\mathbb{Q}$ Zahlkörper, $n = [K:\mathbb{Q}]$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$.

Ziel: · Bette K ein in $\mathbb{C}^n$,
$K \to \mathbb{C}^n$, $a \mapsto (\sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a))$

· Zeige Bild von $\mathcal{O}_K$ ist Gitter.

· Benutze Gitterpunktsatz, etc., um $\mathcal{O}_K^\times$ und Cl_K zu studieren.

· Problem: Brauchen Einbettung von $\mathcal{O}_K$ nach $\mathbb{R}^n$ um vollst. Gitter zu erhalten.

Def: Eine Einbettung $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C})$ heißt <u>reell</u>, falls $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$. Andernfalls heißt σ <u>komplex</u>.

- Ist σ komplex, so ist auch $\bar\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C})$ kompl. Einbettung und $\sigma \neq \bar\sigma$.

$\Rightarrow$ Die kompl. Einbettungen kommen in Paaren $\sigma, \bar\sigma$.

Seien $\Sigma_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_r\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C})$ die reellen Einbettungen von K, $\rho_i \neq \rho_j$ $\forall i \neq j$.

Seien $\Sigma_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C})$ kompl. Einb. von K, so dass $\Sigma_2 \cup \bar\Sigma_2 = \{\sigma_1, \bar\sigma_1, \sigma_2, \bar\sigma_2, \dots, \sigma_s, \bar\sigma_s\}$ alle kompl. Einbettungen sind und

$$\sigma_i \neq \sigma_j, \ \sigma_i \neq \bar\sigma_j \quad \forall i \neq j.$$

Dann gilt

$$\Sigma_1 \,\dot\cup\, \Sigma_2 \,\dot\cup\, \bar\Sigma_2 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C}).$$

und $r + 2s = n$.

Wir haben

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "{(\rho_1(a),\dots,\rho_r(a);\ \sigma_1(a),\dots,\sigma_s(a))}"'] & \prod\limits_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,\mathbb{C})} \mathbb{C} & \\
\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \arrow[r] \arrow[ur, "{(\lambda,\mu) \mapsto \underset{\Sigma_1\ \Sigma_2\ \bar\Sigma_2}{(\lambda,\mu,\bar\mu)}}"] & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2s} \arrow[u] & \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.
\end{tikzcd}$$

$a \mapsto (\rho_1(a),\dots,\rho_r(a);\sigma_1(a),\dots,\sigma_s(a))$

$$(\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda, \mathrm{Re}(\mu), \mathrm{Im}(\mu))$$

$$(\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{R}^r} + \langle\,,\,\rangle_{\mathbb{C}^s}) \longmapsto (\langle\,,\,\rangle + \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\langle\,,\,\rangle_{\mathbb{C}^s})$$

Betr. das Bild von K bzw $\mathcal{O}_K$ unter der kan Einbettung $j: K \to \mathbb{R}^{r+2s} \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

Auf $\mathbb{R}^{r+2s} \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ betr wir das Skalarprodukt

$$\langle (\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \rangle = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle + tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$$

$$= \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle + \langle \mu_1, \mu_2 \rangle + \overline{\langle \mu_1, \mu_2 \rangle}.$$

Dabei sind $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ bzw $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ die Standardskalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^r$ bzw $\mathbb{C}^s$.

Schreiben wir

$$\mathbb{R}^{r+2s} = \prod_{\sigma \in Hom_{\mathbb{R}}(K, \mathbb{C})} \mathbb{R}$$

so ist für $x = (x_\tau)$, $y = (y_\tau) \in \mathbb{R}^{r+2s}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_\sigma \alpha_\sigma \cdot x_\sigma y_\sigma$$

mit $\alpha_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ reell} \\ 2, & \sigma \text{ komplex} \end{cases}$

(Denn $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} (x_1 + iy_1)\overline{(x_2 + iy_2)} = 2x_1x_2 + 2y_1y_2$ für $x_i, y_i \in \mathbb{R}$)

Das zum Skalarprodukt $\langle , \rangle$ gehörige Maß definiert das <u>kanonische Maß</u> auf $\mathbb{R}^{r+2s} \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.
Es unterscheidet sich vom Lebesgue Maß um den Faktor 2^s.

Bsp: • $K = \mathbb{Q}(i)$.
$r = 0$, $s = 1$. $K \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

$a + ib \mapsto (a, b)$

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

  $r = 2, \quad s = 0$

  $K \to \mathbb{R}^2$

  $a+b\sqrt{5} \mapsto (a+b\sqrt{5},\, a-b\sqrt{5})$

- $K = \mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$

  $r = 0, \quad s = 2 \qquad \Sigma_1 = (\zeta_5 \mapsto \zeta_5,\ \zeta_5 \mapsto \zeta_5^2)$

  $K \mapsto \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$

  $a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 \mapsto (\qquad)$

$j: K \to \mathbb{R}^{r+2s}$, $K \otimes \mathbb{R}$

<u>Satz 1</u>: Sei $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ Ideal. Dann ist $\Gamma = j(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}^{r+2s} \cong K_{\mathbb{R}}$ ein vollst. Gitter. Ein Fundamentalbereich hat Volumen

$$\mathrm{vol}(F) = \sqrt{|d_K|} \cdot [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}].$$

<u>Bew</u>: Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{a}$.

$\Rightarrow \Gamma = \mathbb{Z} j(\alpha_1) + \dots + \mathbb{Z} j(\alpha_n)$.

Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n : K \to \mathbb{C}$ die Einb. und sei $A = (\sigma_l \alpha_i)_{i,l} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Es gilt für die Gram-Matrix

$$(\langle j\alpha_i, j\alpha_k \rangle) = \Big(\sum_{l=1}^{n} \sigma_l \alpha_i \, \bar{\sigma}_l \alpha_k \Big) = A \bar{A}^t.$$

Andererseits (§4, Kap 2)

$d(\mathfrak{a}) = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{\text{Def.}}{=} \det(A A^t)$

$\overset{\text{§4, Lemma 3}}{=} [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]^2 \, d(\mathcal{O}_K) = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]^2 \, d_K.$

$\Rightarrow \operatorname{vol}(\Gamma) = |\det(\langle j\alpha_i, j\alpha_k\rangle)|^{1/2}$

$= |\det A| = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]\cdot|d_K|$ □

<u>Satz 2</u>:
Sei $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ ganzes Ideal und sei $c_\sigma > 0$ $\forall\, \sigma \in \operatorname{Hom}(K,\mathbb{C})$ so dass $c_\sigma = c_{\bar\sigma}$ und

$$(*) \qquad \prod_\sigma c_\sigma > \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{|d_K|}\,[\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}].$$

Dann ex. $a \in \mathfrak{a}$, $a \neq 0$, so dass
$$|\sigma a| < c_\sigma \quad \forall\, \sigma \in \operatorname{Hom}(K,\mathbb{C}).$$

<u>Bew</u>: Sei $X = \{(z_\sigma) \in K_\mathbb{R} ;\ |z_\sigma| < c_\sigma\ \forall \sigma\}$.

$X \subset K_\mathbb{R}$ ist symmetrisch und konvex.

Mit der Abb $f : K_\mathbb{R} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2s}$
$$(z_\sigma) \mapsto \left((z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_1}, (\operatorname{Re} z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}, (\operatorname{Im} z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}\right)$$
können wir vol X berechnen

Es ist gleich
$2^s \cdot$ Lebesgue-Vol von
$$f(X) = \{(x_\sigma) \in \prod_\sigma \mathbb{R} ;\ |x_\sigma| < c_\sigma,\ \sigma \in \Sigma_1,\ x_\sigma^2 + x_{\bar\sigma}^2 < c_\sigma^2,\ \sigma \in \Sigma_2\}$$
$|z_\sigma| < c_\sigma$

$$\Rightarrow \operatorname{vol}(X) = 2^s \cdot \prod_{\sigma\in\Sigma_1}(2c_\sigma) \cdot \prod_{\sigma\in\Sigma_2}(\pi c_\sigma^2)$$
$$= 2^{r+s}\pi^s \prod_{\sigma \in \operatorname{Hom}(K,\mathbb{C})} c_\sigma$$
$$\overset{(*)}{>} 2^{r+2s}\sqrt{|d_K|}\,[\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}] = 2^n \cdot \operatorname{vol}(\mathfrak{a})$$

Nach dem Minkowskischen Gitterpunktsatz ex. $\xi a \in X$, $a \neq 0$, also wegen $\xi a \in X$ ist

$$|\sigma a| \le c_\sigma \quad \forall \sigma \in Hom(K,\mathbb{C}). \qquad \square$$

→45 — Invariante Beschreibung von $K_\mathbb{R}$:

$K|\mathbb{Q}$ Zahlkörper, $n = [K:\mathbb{Q}]$, $\{\tau_1,\dots,\tau_n\} = Hom(K,\mathbb{C})$.

σ ist K-Modul und C

Sei: $K_\mathbb{C} = \prod_\sigma K\otimes_{K,\sigma}\mathbb{C} \cong \prod_\sigma \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$.

K ist in natürlicher Weise eingebettet:

$$j: K \to K_\mathbb{C}$$
$$a \mapsto (a\otimes 1,\dots,a\otimes 1) \mapsto (\tau_1(a),\dots,\tau_n(a)).$$

Sei $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto F(z)=\bar z$ komplexe Konj.

F operiert auf $K_\mathbb{C}$: $(z_1,\dots,z_n)\mapsto(\bar z_1,\dots,\bar z_n)$

F operiert auf $Hom(K,\mathbb{C})$:

$\sigma \mapsto \bar\sigma = F\circ\sigma$. $F(\sigma)=\sigma \iff \sigma$ reell

Def: σ reell / kompl. Σ_1, Σ_2; $Hom(K,\mathbb{C}) = \Sigma_1 \dot\cup \Sigma_2 \dot\cup \bar\Sigma_2$; $n = r+2s$

• Kombiniert man dies, so erhält man Involution.

(X) $F: K_\mathbb{C}\to K_\mathbb{C}$, $z=(z_\sigma)\in K_\mathbb{C} \mapsto$
$$Fz = ((Fz)_\sigma) = (\bar z_{\bar\sigma})_\sigma$$

• Das kan. Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $K_\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$ $\left[\langle (z_\sigma),(w_\sigma)\rangle = \sum_\sigma z_\sigma \bar w_\sigma\right]$

mit F-äquivariant, d.h.

$$\langle Fz, Fw\rangle = F\langle z, w\rangle$$

Auf $K_{\mathbb{C}} = \prod_{\sigma} \mathbb{C}$ haben wir die Spur $Tr: K_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $(z_\sigma) \mapsto \sum_{\sigma} z_\sigma$.

Das Diag

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "Tr_{K|\mathbb{Q}}"'] & K_{\mathbb{C}} \arrow[d, "Tr"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sei $K_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{C}}^{+} = \left(\prod_{\sigma} \mathbb{C}\right)^{+}$

$$= \{ z \in K_{\mathbb{C}} ;\ F(z) = z \}$$
$$\left(\bar{z}_{\sigma} = z_{\bar\sigma} \quad \forall \sigma \right)$$

der $\mathbb{R}$-Unter-VR der F-invarianten Punkte.

Ist $\Sigma_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ die Menge der reellen Einbettungen und $\Sigma_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ ein Vertretersystem für die kompl. Einb. modulo F, so gilt

$$K_{\mathbb{R}} = \{ z = (z_\sigma) \in K_{\mathbb{C}} ;\ z_\sigma \in \mathbb{R}, \text{ für } \sigma \in \Sigma_1, \quad z_{\bar\sigma} = \bar{z}_\sigma, \text{ für } \sigma \in \Sigma_2 \}$$

Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{R}} = r + 2s = n$.

Bem: Für $j: K \to K_{\mathbb{C}}$ gilt $\operatorname{Im}(j) \subset K_{\mathbb{R}}$.

(51)

Bew: klar. □

• Die Einschränkung von $\langle\, ,\, \rangle : V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ auf $V_{\mathbb{R}}$ definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.
Dieses definiert die kanonische Metrik und das zug. kanonische Maß.

• Haben komm. Diag

$$\begin{tikzcd} V_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "Tr"'] & V_{\mathbb{R}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & V_{\mathbb{C}} \arrow[d, "Tr"] \\ \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R} & \mathbb{C} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

• Unter dem Iso

$$f : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{r+2s}$$
$$(z_\sigma) \longmapsto \underbrace{\left((z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_1}, (\operatorname{Re} z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}, (\operatorname{Im} z_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}\right)}_{=:\, (x_\sigma)}$$

entspricht die kan. Metrik $\langle\, ,\, \rangle$ dem Skalarprod $(\, ,\,)$ auf $\mathbb{R}^{r+2s}$, wobei

$$((x_\sigma),(y_\sigma)) = \sum_{\sigma\in \operatorname{Hom}(K,\mathbb{C})} \alpha_\sigma x_\sigma y_\sigma$$

und $\alpha_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ reell} \\ 2, & \sigma \text{ komplex.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Für $X \subset V_{\mathbb{R}}$ gilt

$$\operatorname{vol}_{\text{kan}}(X) = 2^s \operatorname{vol}_{\text{Lebesgue}}(f(X)).$$

Multiplikative Version der Minkowski-Theorie

Die Einbettung $j: K \longrightarrow K_{\mathbb{C}} = \prod_\tau \mathbb{C}$ induziert
$$j: K^* \longrightarrow K_{\mathbb{C}}^* = \prod_\tau \mathbb{C}^*$$

Norm $N: K_{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}^*$, $z = (z_\tau) \mapsto \prod_\tau z_\tau$

-
$$\begin{tikzcd} K^* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "N_{K|\mathbb{Q}}"'] & K_{\mathbb{C}}^* \arrow[d, "N"] \\ \mathbb{Q}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$
kommutiert

- Benutze $\ell(z) = \log|z|$, um vom mult. auf add. Theorie zu wechseln

- Erhalten Diag.
$$\begin{tikzcd} K^* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "N_{K|\mathbb{Q}}"'] & K_{\mathbb{C}}^* \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "N"] & \prod_\tau \mathbb{R} \arrow[d, "Tr"] \\ \mathbb{Q}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r, "\ell"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- $F \in Gal(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ op. auf K^* trivial, auf $K_{\mathbb{C}}^*$ wie zuvor $F((z_\tau)) = (\bar{z}_{\bar\tau})$, auf $\prod_\tau \mathbb{R}$ durch $F((x_\tau)) = (x_{\bar\tau})$.

Es gilt
$$F \circ j = j = j \circ F$$
$$F \circ \ell = \ell \circ F$$
$$N \circ F = F \circ N$$
$$Tr \circ F = Tr \circ F$$

$\Rightarrow$ Alle Gruppen-Hom. im Diag sind F-equivar.

- Nehmen wir überall die F-invarianten, erhalten wir kommut. Diag.

58

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathbb{R}}^* \arrow[r] \arrow[d, "N"] & \left(\prod_\sigma \mathbb{R}\right)^+ = \{(x_\sigma) ; x_{\bar\sigma} = x_\sigma\} \arrow[d, "\Sigma"] \\
\mathbb{Q}^* \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist

$$\left(\prod_\sigma \mathbb{R}\right)^+ = \{(x_\sigma) \; ; \; x_\sigma = x_{\bar\sigma} \; \forall \sigma\}$$

$$= \{(x_\sigma) \; ; \; x_\sigma = x_{\bar\sigma} \; \forall \sigma \in \Sigma_2\}$$

$$\cong \mathbb{R}^{r+s}$$

$$(x_\sigma) = \left((x_\rho)_{\rho\in\Sigma_1}, (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}, (x_{\bar\sigma})_{\sigma\in\Sigma_2}\right)$$

$$\mapsto \left((x_\rho)_{\rho\in\Sigma_1}, (2x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_2}\right)$$

Erhalte

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_\sigma \mathbb{R}\right)^+ \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "Tr"] & \mathbb{R}^{r+s} \arrow[dl, "Tr"] \\
\mathbb{R} &
\end{tikzcd} \qquad (x_1, \dots, x_{r+s}) \mapsto \sum x_i$$

und $\ell : K_{\mathbb{R}}^* \longrightarrow \mathbb{R}^{r+s}$

$$\ell((z_\sigma)) = \left((\log|z_\rho|)_{\rho\in\Sigma_1}, (\log|z_\sigma|^2)_{\sigma\in\Sigma_2}\right)$$

§3 Die Klassenzahl

Def: Die Norm eines Ideals $\mathfrak{a} \neq 0$ von $\mathcal{O}_K$ ist def als

$$N(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}]$$

Lemma 1: i) $N(\mathfrak{a}) < \infty$.

ii) Ist $\alpha \in \mathcal{O}_K$ und $\mathfrak{a} = (\alpha)$, so gilt $N((\alpha)) = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$.

Bew: i) §4 Lemma 9.
ii) Übung. □

Lemma 2: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\nu_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{\nu_r}$ die Primidealzerlegung von $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \ \forall i \neq j$), so gilt

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)^{\nu_1} \cdots N(\mathfrak{p}_r)^{\nu_r}.$$

Bew: Chin. Restsatz $\Rightarrow$

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{a} \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_1^{\nu_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_r^{\nu_r}$$

$\Rightarrow N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1^{\nu_1}) \cdots N(\mathfrak{p}_r^{\nu_r})$

$\Rightarrow$ OBdA $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{\nu}$, $\mathfrak{p}$ Prim, $\nu \in \mathbb{N}$.
Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{p}^i \supsetneq \mathfrak{p}^{i+1}$
(„$\neq$" wegen eindeutiger PI-Zerlegung).
Sei $a \in \mathfrak{p}^i \setminus \mathfrak{p}^{i+1}$ ($\Leftrightarrow \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(a) = i$).

$k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ ist endl. Kp.
$\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$ ist k-VR vermöge der Skalarmult.