6. Normale Abbildungen

6.1. Erinnerung. Sei V ein n-dimensionaler prä-Hilbertraum, also ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) versehen auch mit einer **Skalarprodukt**

$$\langle \cdot, \cdot ra \to \mathbb{K}.$$

Die **euklidische Norm** ist definiert durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$ ($x \perp y$). Man sagt, dass die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ eine **Orthonormalbasis** in V bilden falls

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{also falls} \quad \|e_i\| = 1,\ e_i \perp e_j \quad \text{für } i \neq j.$$

Das **Standardskalarprodukt** in $\mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist definiert durch:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Eine Orthonormalbasis ist tatsächlich eine Basis. Die Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis sind leicht zu bestimmen! Den folgenden Satz haben wir auch schon mal gesehen, jetzt aber nochmal als Wiederholung:

Satz 6.1.1. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von V.
a) Ist $x \in V$ mit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, dann gilt

$$x_i = \langle x, e_i\rangle \quad \text{also} \quad x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

b) Zwei Vektoren $x, y \in V$ sind genau dann gleich, wenn für alle $z \in V$ die Gleichheit $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ gilt. Dies ist weiter äquivalent zu $\langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle$ für $i = 1, \dots, n$.
c) Ist $L : V \to \mathbb{K}$ eine Linearform, dann existiert genau ein $z \in V$ mit

$$L(x) = \langle x, z\rangle \quad \text{für alle } z \in V.$$

Beweis. a) Es gilt:

$$\langle x, e_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j e_j, e_i\rangle = x_i.$$

b) Seien $x, y \in V$. Es reicht $x = y$ zu zeigen, falls $\langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle$ gilt für alle $i = 1, \dots, n$. Dies folgt aber aus a): Schreibe

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Wegen a) gilt $x_j = \langle x, e_j\rangle$ und $y_j = \langle y, e_j\rangle$, also nach der Voraussetzung folgt $x = y$ auch.

c) Setze $y_i := \overline{L(e_i)}$. Dann gilt

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \Big\rangle = \langle x, y\rangle. \qquad \blacksquare$$

Satz 6.1.2. Sei $T : U \to V$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{L} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{L}' = \{f_1, \dots, f_m\}$ Orthonormalbasen in U bzw. in V.
a) Ist $A = M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$, $A = (\alpha_{ij})$, dann gilt

$$\alpha_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle.$$

b) Für $S : U \to V$ linear gilt $S = T$ genau dann, wenn

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Beweis. a) Folgt einfach aus den Definitionen: in der j-te Spalte von $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ steht der Koordinatenvektor von Te_j. Diese Koordinaten sind eben

$$\alpha_{ij} = \langle Te_i, f_j \rangle.$$

b) Folgt aus dem obigen Satz b). ■

6.2. Adjungierte einer linearen Abbildung. Der Vektorraum aller linearen Abbildungen von U nach V wird mit $\mathscr{L}(U,V)$ bezeichnet.

Satz 6.2.1. Sei $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Es gibt dann genau eine lineare Abbildung $T^* : V \to U$ mit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \text{für alle } x \in U,\, y \in V.$$

Ist $A = M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$, so gilt

$$M_{T^*}^{\mathcal{L}',\mathcal{L}} = \overline{A}^\top =: A^*.$$

Die Abbildung T^* heißt die **adjungierte Abbildung** von T, und die Matrix A^* ist die **adjungierte der Matrix** A.

Beweis. Definiere die Linearform $L_y : V \to \mathbb{K}$, $L_y(x) := \langle Tx, y \rangle$. Wegen Satz 6.1.1 c) existiert einen eindeutigen Vektor $z \in V$ mit

$$L_y(x) = \langle x, z \rangle.$$

Setze $T^* y = z$. Aus der Eindeutigkeit bekommt man, dass T^* linear sein muss. Nämlich: sind $y_1, y_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist

$$L_{y_1+\lambda y_2}(x) = \langle Tx, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle Tx, y_1 \rangle + \overline{\lambda} \langle Tx, y_2 \rangle = L_{y_1}(x) + \overline{\lambda} L_{y_2}(x) = \langle x, T^* y_1 \rangle + \langle x, \lambda_T^* y_2 \rangle. \ ■$$

Beispiel. 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{So gilt} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{So gilt} \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad \text{So gilt} \quad A^* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos\varphi \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

4. Sei T gegeben durch der Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(bzgl. einer Orthonormalbasis). Dann die Matrix von T^* ist

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

6.3. Eigenschaften der adjungierten Abbildung und der adjungierten Matrix. Im Folgenden werden wir Satz 6.1.2 b) ganz oft benutzen.

0. Für die Identität $I : U \to U$ gilt

$$I^* = I.$$

Für die Nullabbildung $0 : U \to V$ gilt

$$0^* : V \to U \quad \text{die Nullabbildung.}$$

Beweis. Es gelten:

und $$\langle x, I^*y\rangle = \langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle, \langle x, o^*y\rangle = \langle 0x, y\rangle = 0 = \langle x, 0y\rangle.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

1. Für $T : V \to V$ gilt $T^{**} = T$.

Beweis. Seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = \overline{\langle T^*v, u\rangle} = \overline{\langle v, T^{**}u\rangle} = \langle T^{**}u, v\rangle.$$

■

2. Für $S, T \in \mathscr{L}(U, V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$(S + \lambda T)^* = S^* + \overline{\lambda} T^*.$$

Beweis. Seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$\langle (S + \lambda T)u, v\rangle = \langle Su + \lambda Tu, v\rangle = \langle u, S^*v\rangle + \lambda\langle u, T^*v\rangle = \langle u, (S^* + \overline{\lambda}T^*)v\rangle.$$

■

3. Für $S \in \mathscr{L}(U, V)$, $T \in \mathscr{L}(V, W)$ gilt

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

Beweis. Seien $u \in U$, $w \in W$. Dann gilt:

$$\langle TSu, w\rangle = \langle Su, T^*w\rangle = \langle u, S^*T^*w\rangle.$$

■

4. Für $T \in \mathscr{L}(U, V)$ gilt

$$\operatorname{Kern} T = (\operatorname{Bild} T^*)^\perp.$$

Beweis. Sei $u \in \operatorname{Kern} T$, und sei $v \in \operatorname{Bild} T^*$. Dann gilt

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = 0,$$

also $u \in (\operatorname{Bild} T^*)^\perp$. Ist umgekehrt $u \in (\operatorname{Bild} T^*)^\perp$, so gilt

$$0 = \langle u, T^*v\rangle \quad \text{und somit } \langle Tu, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Daraus folgt $Tu = 0$, d.h. $u \in \operatorname{Kern} T$. ■

5. Es gilt

$$\operatorname{Rang}(T^*) = \operatorname{Rang}(T).$$

Beweis. Sei A eine Matrix von T. So ist A^* eine Matrix von T^*. Daraus folgt die Behauptung, denn:

$$\operatorname{Rang}(T) = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^\top) = \operatorname{Rang}(\overline{A}^\top) = \operatorname{Rang}(T^*).$$

■

6. Für $T : V \to V$ gilt

$$\det(T) = \overline{\det(T^*)}$$

Beweis. Bemerke zunächst, dass für eine beliebige quadratische Matrix gilt

$$\det(\overline{B}) = \overline{\det(B)}.$$

Diese folgt aus der Definition der Determinante (siehe 4.13). Sei also A eine Matrix von T bzgl. einer Orthonormalbasis. Dann gilt

$$\det(T) = \det(A) = \det(A^\top) = \overline{\det(\overline{A}^\top)} = \det(A^*) = \det(T^*).$$

■

7. Für $T : V \to V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt de Äquivalenz:

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma(T^*).$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus den folgenden Äquivalenzen:

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \det(T - \lambda I) = 0 \iff \det(T^* - \overline{\lambda} I) = 0 \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*). \qquad \blacksquare$$

6.4. Normale Abbildungen.

Definition. Eine Abbildung $T : V \to V$ heißt **normal**, falls

$$T^*T = T^*T \quad \text{gilt.}$$

Beispiel. 1. Die Abbildung T gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist *nicht normal*.
2. Die Abbildung T gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist *normal*.
3. Ist $T^* = T$, oder $T^* = -T$, oder $T^* = T^{-1}$ so ist T normal.

Bemerkung. Sei $A = M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ die Matrix von T bzgl. einer Orthonormalbasis. Dann ist $M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = A^*$, und somit ist T genau dann normal, falls

$$A^*A = AA^*$$

gilt. Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen auch normal.

Satz 6.4.1. Sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T in V existiert. Dann ist T normal.

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ eine Orthonormalbasis in V aus Eigenvektoren von T, dann

$$A := M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = A^*.$$

Daraus folgt

$$AA^* = A^*A \quad \text{und somit} \quad T^*T = TT^*. \qquad \blacksquare$$

Satz 6.4.2. Ist T normal und $x \in V$, so gilt

$$\|Tx\| = \|T^*x\|.$$

Beweis. Es gilt

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2. \qquad \blacksquare$$

Satz 6.4.3. Sei T normal. Ist $e \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$Te = \lambda e$$

so gilt

$$T^*e = \overline{\lambda} e,$$

d.h.

$$\mathrm{Kern}(T - \lambda I) = \mathrm{Kern}(T^* - \overline{\lambda} I).$$

Beweis. Bemerke zunächts das Folgende. Ist T normal, so ist für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ auch die Abbildung $T - \lambda I$ normal. Denn es gilt

$$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I) = (T^*-\overline{\lambda}I)(T-\lambda I) = T^*T-(\lambda+\overline{\lambda})T+\lambda\cdot\overline{\lambda}I = (T-\lambda I)(T^*-\overline{\lambda}I) = (T-\lambda I)(T-\lambda I)^*.$$

Nun für e und λ wie in der Behauptung gilt wegen Satz 6.4.2:

$$0 = \|(T-\lambda I)e\| = \|(T^* - \overline{\lambda}I)_e\|,$$

also $T^*e = \overline{\lambda}e$. ∎

Satz 6.4.4. Sei T normal, und seien $e \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$Te = \lambda e.$$

Setze

$$W := \{e\}^\perp = \big\{x \in V : \langle x, e\rangle = 0\big\}.$$

Dann ist W invariant unter T und T^*, d.h. es gelten:

$$T(W) \subseteq W \qquad \text{und} \quad T^*(W) \subseteq W.$$

Beweis. Sei $w \in W$, also $\langle w, e\rangle = 0$. Es gilt

$$\langle e, Tw\rangle = \langle T^*e, w\rangle = \overline{\lambda}\langle e, w\rangle = 0, \quad \text{d.h. } Tw \in W.$$
$$\langle e, T^*w\rangle = \langle T^*e, w\rangle = \lambda\langle e, w\rangle = 0, \quad \text{d.h. } T^*w \in W,$$

wir haben hier Satz 6.4.3 benutzt. ∎

Hauptsatz 6.4.5. Sei V ein *komplexer*, endlichdimensionaler (prä-)Hilbertraum. Für $T : V \to V$ linear sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine Basis in V die aus Eigenvektoren von T besteht.
(ii) Die Abbildung T ist normal, d.h. $T^*T = T^*T$.

Beweis. Die Implikation (i) ⇒ (ii) haben wir im Satz 6.4.1 gesehen.

Nun zur Implikation (ii) ⇒ (i): Wir beweisen mit vollständiger Induktion nach $n = \dim(V)$. Der Fall $n = 1$ is klar: jede Abbildung ist normal und (i) ist auch trivialerweise erfüllt. Sei also die Aussage für $n \geq 1$ richtig für jede normale Abbildung auf W mit Dimension $\dim(W) \leq n$. Sei e_{n+1} ein Eigenvektor für $T : V \to V$, welcher wegen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert (siehe Korollar 5.4.2). Wir können natürlich e_{n+1} umnormieren und somit $\|e_{n+1}\| = 1$ erreichen. Sei $W = \{e_{n+1}\}^\perp$ und setze $S := T|_W$ (T eingeschränk auf W). So ist, wegen Satz 6.4.4, auch die Abbildung

$$S : W \to W$$

normal. Da $\dim(W) \leq$ existiert also nach Induktionsvoraussetzung eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ in W aus Eigenvektoren von S (also von T). Diese zusammen mit e_{n+1} haben die gewünschten Eigenschaften. ∎

6.5. Unitäre und orthogonale lineare Abbildungen.

Definition. Sei $T : V \to V$ linear, das das Skalarprodukt erhält, also mit

$$\langle Tv, Tu\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

So heißt T

a) im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ **unitär**;
b) im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **orthogonal**.

Entscheidend wird das folgende Trick, genannt **Polarisierung**, das das Skalarprodukt mithilfe der Norm(-Quadrat) bestimmt:

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt: $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt: $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2 + i\|x+iy\|^2\big)$$

(Dies haben wir schon gesehen, siehe 2.10).

Hauptsatz. Sei V komplexer (n-dimensionaler) Hilbertraum. Für $T : V \to V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist unitär.
(ii) T ist **isometrisch**, d.h. erhält die Längen von Vektoren, genauer :$\|Tv\| = \|v\|$ gilt für alle $v \in V$.
(iii) T is invertierbar mit $T^{-1} = T^*$.
(iv) T ist normal mit
$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$
(v) T transformiert Orthonormalbasen in Orthonormalbasen.
(vi) Für *jede* Orthonormalbasis $\mathcal{L}$ in V, bilden die Spalten der Matrix $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{C}^n$.
(vii) *Es gibt* ein Orthonormalbasis $\mathcal{L}$ in V, so dass die Spalten der Matrix $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{C}^n$ bilden.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Falls T das Skalarprodukt erhält, ist es auch isometrisch:
$$\|Tx\| = \langle Tx, Tx, \rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist T isometrisch, so ist T injektiv, denn $Tx = 0$ impliziert $\|x\| = \|Tx\| = 0$, also $x = 0$. Wegen der Dimensionsformel ist T auch surjektiv, also T ist invertierbar. Wegen Polarisierung gilt
$$\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle.$$
Aus Satz 6.1.2 b) folgt $x = T^*Tx$ für jedes $x \in V$, also $T^* = T^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Es gilt $TT^* = TT^{-1} = I = T^{-1}T = T^*T$, also T ist normal. Nach Satz 6.4.5 gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{L}$, so dass $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = A$ diagonal wird; auf der Diagonale stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Die Abbildung T^* hat einerseits die Matrix
$$M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = A^* = \overline{A}^{\top} = \overline{A},$$
anderseits
$$M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = M_{T^{-1}}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = A^{-1}.$$
Daraus folgt $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$, also die Behauptung.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T. So ist, wegen Satz 6.4.3,
$$\langle Tx, Ty\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Tx, e_i\rangle \overline{\langle Ty, e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T^*e_i\rangle \overline{\langle y, T^*e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle \cdot \overline{\lambda_i \langle y, e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle} = \langle x, y\rangle.$$

(i) $\Rightarrow$ (v): Sei $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis in V. Dann gilt
$$\langle Te_i, Te_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$
also $Te_1, \ldots, Te_n$ ist eine Orthonormalbasis in V.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Sei $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis in V. Nach Voraussetzung bilden $Te_1, \ldots, Te_n$ eine Orthonormalbasis in V, deren Koordinatenvektoren in den Spalten von $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ stehen.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) ist klar.

(vii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\mathcal{L}$ eine Orthonormalbasis in V, so dass die Spalten von $M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ eine Orthonormalbasis $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathbb{C}^n$ bilden. In Spaltenvektornotation ist also
$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$
Somit gilt in Zeilenvektornotation:
$$M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \overline{f_1}^{\top} \\ \vdots \\ \overline{f_n}^{\top} \end{pmatrix}.$$

Daraus bekommen wir

$$M_{T^*}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \overline{f_1}^\top \\ \vdots \\ \overline{f_n}^\top \end{pmatrix} (f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \ldots & \langle f_1, f_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle f_n, f_1 \rangle & \langle f_n, f_2 \rangle & \ldots & \langle f_n, f_n \rangle \end{pmatrix} = I_{n\times n}.$$

D.h. $T^*T = I$, also (iii) folgt. ∎

Bemerkung. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachte die Drehung T_φ um Winkel φ in $\mathbb{R}^2$ mit matrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Betrachte die folgende Aussage:

(iv′) Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{L}$ in in V, so dass die Matrix von T hat die Block-Form:

$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \ldots & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & \ldots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \ldots & -1 & & & \\ & & & & & & \boxed{T_{\varphi_1}} & \ldots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 & \ldots & \boxed{T_{\varphi_k}} \end{pmatrix},$$

Dann gilt:

$$T \text{ orthogonal} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(i)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(ii)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(iii)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(iv}'\text{)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(v)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(vi)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(vii)},$$

wobei $\varphi_i \neq m\pi$ für $m \in \mathbb{Z}$, und wobei in (vi) und in (vii) $\mathbb{C}^n$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt werden muss.