5. Spektraltheorie

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung ($\dim V = n$).

Problem. Finde eine basis $\mathcal{L}$ so dass
$$A = M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}$$
möglichst einfach wird. Oder: ist diese Matrix A bzgl. einer gegebenen Matrix nicht so einfach, finde eine andere Basis $\mathcal{L}'$, so dass der Wechsel auf $\mathcal{L}'$ eine einfache Matrix liefert:
$$B = S^{-1} M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} S, \quad S = M_{I_{n\times n}}^{\mathcal{L}',\mathcal{L}}.$$

5.1. Eigenwerte und Eigenvektoren.

Definition. Sei $T : V \to V$ linear.

a) Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von T, falls es $x \in V$, $x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$ gibt. Das x heißt dann **Eigenvektor** zum Eigenwert λ.
b) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ setze
$$E_\lambda^T := \{x \in V : Tx = \lambda x\} = \{x \in V : Tx - \lambda x = 0\} = \mathrm{Kern}(T - \lambda I).$$
Ist λ ein Eigenwert, so heißt E_λ^T der **Eigenraum** zum Eigenwert λ. Die Zahl $\dim E_\lambda^T$ heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ. Bemerke schon, dass E_λ^T ein Unterraum ist.
c) Das **Spektrum** von T ist die Menge aller Eigenwerte von T
$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \ \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } T\}.$$

Der nächste Satz soll es erleuchten, warum es sich lohnt Eigenvektoren zu suchen.

Satz 5.1.1. Sei $T : V \to V$, $\mathcal{L} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Die folgenden Aussagen sind Äquivalent:

(i) Die Basis besteht aus Eigenvektoren.
(ii) Die Matrix von T bzgl. $\mathcal{L}$ hat **Diagonalgestalt**
$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

In diesem Fall gelten auch die Folgenden:
$$Tb_i = \lambda_i b_i \quad \text{also } b_i \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_i,$$

Beweis. ∎

Bemerkung. Mit Diagonalmatrizen ist sehr leicht zu rechen. Zum Beispiel:
$$M_{T^k}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \left(M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}\right)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Falls T invertierbar ist (also $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$)
$$M_{T^{-1}}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \left(M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist auch recht einfach zu bestimmen (siehe Satz 4.9.3):

$$\det(T) = \det(M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Definition. Eine lineare Abbildung T heißt **diagonalisierbar**, falls eine Basis aus Eigenvektoren für T gibt.

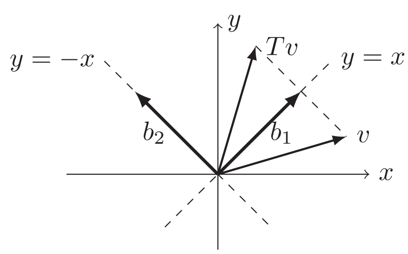
5.2. Beispiele und Gegenbeispiele.

Beispiel. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung auf die Gerade $y = x$. So gilt:

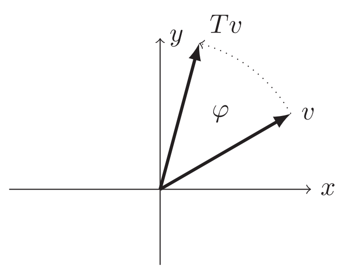
$$T\binom{1}{1} = \binom{1}{1} \quad \text{also } b_1 = \binom{1}{1} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } 1,$$
$$T\binom{1}{-1} = -1\binom{1}{-1} \quad \text{also } b_2 = \binom{1}{-1} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } -1.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{L} = \{b_1, b_2\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$, also T ist diagonalisierbar und

$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Beispiel. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um Winkel φ $(0 < \varphi < \pi)$. Diese Abbildung hat keinen Eigenvektor, also keinen Eigenwert.



Beispiel. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bzgl. der kanonischen Basis die Matrix

$$M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat.}$$

Wir suchen die Eigenwerte, also die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung $Tx = \lambda x$ nichttriviale Lösungen hat. Dies bedeutet:

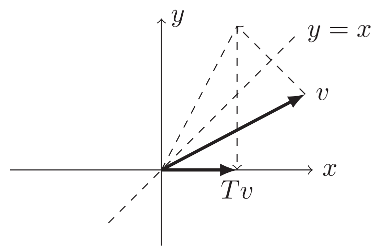
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus bekommen wir, dass für $\lambda \neq 0$ x_2 und somit x_1 Null sein müssen; und für $\lambda = 0$ muss $x_2 = 0$ gelten und x_1 ist beliebig wählbar. Es gibt keine Basis aus Eigenvektoren. Wir stellen fest: $\sigma(T) = \{0\}$

und T ist nicht Diagonalisierbar.



Beispiel. Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich n. Betrachte die lineare Abbildung $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ mit $Tp = p'$ (die Ableitung). Wir bestimmen nun die Eigenwerte von T. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit Eigenvektor $p \in \mathcal{P}_n$. Ist $\lambda \neq 0$ so ist $\mathrm{Grad}(\lambda p) = \mathrm{Grad}(p)$. Da

$$\mathrm{Grad}(Tp) = \mathrm{Grad}(p') < \mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(\lambda p),$$

wir sehen, dass λ eigentlich kein Eigenwert sein kann. Ist $\lambda = 0$, dann $p' = Tp = 0p = 0$ bedeutet, dass p ein Konstant-Polynom ist. Es gilt also $\sigma(T) = \{0\}$ mit mit $E_0^T = \{p = a_0 : a_0 \in \mathbb{C}\}$. Die Polynome $1, x, \ldots, \frac{x^n}{n!}$ bilden eine Basis $\mathcal{L}$ in $\mathcal{P}_n$. Bezüglich dieser Basis ist die Matrix von T das Folgende:

$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Eigenvektoren.

Satz 5.3.1. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *verschiedene* Eigenwerte von T mit jeweiligen Eigenvektoren $x_1, \ldots x_k$. Dann sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

Beweis. Der Beweis geht mit vollständiger Induktion nach k. Der Fall $k = 1$ ist klar, denn $x_1 \neq 0$. Sei also die Aussage richtig für $k \geq 1$. Falls gilt

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0,$$

dann Multipliezere mit λ_{k+1}: $$\lambda_{k+1}\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \quad \text{(i)}$$

Außerdem $$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = 0$$

und somit $$\lambda_1\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \quad \text{(ii)}$$

Wir subtrahieren (i) aus (ii):

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})\alpha_{k+1} x_{k+1} = 0$$

also $$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 x_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k x_k = 0.$$

Die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ sind aber linear unabhängig, d.h. die Koeffizienten hier müssen alle 0 sein: $(\lambda_i - \lambda_{k+1})\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Da $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, wir folgern $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k$, und weil $x_{k+1} \neq 0$, folgt auch $\alpha_{k+1} = 0$. Das war zu beweisen. ∎

Hilfssatz 5.3.2. Sei $T : V \to V$ linear mit $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Seien ferner

$$\mathcal{L}_i = \{x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i\} \subseteq E_{\lambda_i}^T \quad \text{Basen} = \mathrm{Kern}(T - \lambda_i I).$$

Dann sind

$$x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k$$

alle linear unabhängig in V.

Beweis. Nehme an:
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^i x_j^i = 0.$$
Zu zeigen ist $\alpha_i^j = 0$ für alle $i = 1,\dots,n_j$, $j = 1\dots,k$. Da
$$y_i := \sum_{j=1}^{n_i}\alpha_j^i x_j^i \in E_{\lambda_i}^T,$$
y_i ist ein Eigenvektor, falls $y_i \neq 0$. Wegen Satz 5.3.1 sind die nicht Null y_i linear unanhängig, aber
$$\sum_{i=1}^{k} y_i = 0$$
wäre dann eine nichttriviale Linearkombination solcher λ_i, ein Widerspruch. Somit gilt $y_i = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$. Dies impliziert $\alpha_i^j = 0$ für alle $i = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,k$. ∎

Satz 5.3.3. Für eine lineare Abbildung $T : V \to V$ mit $\sigma(T) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ und $n_i = \dim(E_{\lambda_i}^T)$ sind äquivalent:

(i) T ist diagonalisierbar.
(ii) $n = n_1 + \cdots + n_k$ ($\dim(V) = n$).

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) Definiere die Vektoren x_i^j wie in Hilfssatz 5.3.2. Wegen der Gültigkeit von $n = n_1 + \cdots + n_k$ bilden diese Vektoren eine Basis in V.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Hausaufgabe. ∎

5.4. Das Charakteristische Polynom. Um Eigenwerte zu bestimmen braucht man es untersuchen für welches $\lambda \in \mathbb{K}$ der Unterraum
$$E_\lambda^T = \mathrm{Kern}(T - \lambda I)$$
nicht-trivial is, d.h. $\neq \{0\}$.

Bemerkung. Seien A, B Matrizen derselben linearen Abbildung T. So gilt
$$\det(A) = \det(B).$$
Denn: sei S die Basiswechsel-Matrix, also $B = STS^{-1}$. Dann gilt
$$\det(B) = \det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \det(A).$$
Also wir können die Determinante einer linearen Abbildung als
$$\det(T) := \det(A)$$
definieren, wobei A eine Matrix von T ist. Die Determinante $\det(T)$ hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Satz 5.4.1. Sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert, wenn $\det(T - \lambda I) = 0$.
b) Setze
$$p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I).$$
Wir benutzen auch die Notation p_A (falls A eine Matrix von T ist). p_T ein Polynom n-ten Grades. Insbesondere gilt
$$p_T(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A).$$
c) Für das Spektrum gilt:
$$\sigma(T) = \big\{\lambda :\ p_T(\lambda) = 0\big\}.$$

Beweis. a) $\lambda \in \mathbb{K}$ is genau dann ein Eigenwert, wenn $E_\lambda^T \neq \{0\}$, also wenn $T - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Dies ist weiter zu $\det(T - \lambda I) = 0$ äquivalent (siehe Satz 4.9.4).

c) Aus der Definition folgt:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma) \beta_{1\sigma(1)} \beta_{2\sigma(2)} \cdots \beta_{n\sigma(n)},$$

wobei $B = (\beta_{ij}) = A - \lambda I$. Ein bisschen Überlegen ergibt, dass p_T tatsächlich ein Polynom ist, und wenn man die Koeffizienten von λ^n, λ^{n-1} und den konstanten Term ausrechnet, bekommt man die restlichen Aussagen.

d) Folgt aus den Obigen. ∎

Definition. a) Das Polynom p_T heißt das **charakteristische Polynom** von T (oder von A).
b) Ist λ_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung von p_T, d.h., $p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda)$ mit $q(\lambda_0) \neq 0$, so heißt k die **algebraische Vielfachheit** der Eigenwert λ_0.
c) Die **geometrische Vielfachheit** eines Eigenwertes λ_0 ist

$$\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda_0 I)).$$

d) Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, so heißt

$$\mathrm{Spur}(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots = \alpha_{nn}$$

die Spur von A. Ist T lineare und A, B Matrizen von T, so ist $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$. D.h. die Definition $\mathrm{Spur}(T) := \mathrm{Spur}(A)$ ist sinnvoll.

Korollar. a) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gibt es mindestens einen Eigenwert. Es gilt sogar das Folgende. p_T zerfällt in Linearfaktoren:

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_1},$$

mit $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ und m_i die algebraische Vielfachheit von λ_i.
b) Falls p_T n verschiedene Nullstellen hat, so ist T diagonalisierbar.

Beweis. a) Ein Polynom n-ten Grades ($n \geq 1$) mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle. Diese gar nicht triviale Aussage, ist der Hauptsatz der Algebra.

b) Folgt aus dem Satz 5.3.1. ∎

Beispiel. Sei $T = I$ und somit

$$M_{T-\lambda I}^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist also $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^n$. Wir sehen, dass 1 ist eine n-fache Nullstelle von p_T. Die algebraische Vielfachheit ist n. Die geometrische Vielfachheit ist auch n. Denn:

$$\dim(\mathrm{Kern}(T - I)) = \dim V = n.$$

Beispiel. Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Die Nullstellen von p_A sind $+1$ und -1. Zwei verschiedene Eigenwerte liefern die Diagonalisierbarkeit ($\dim(\mathbb{R}^2) = 2$).

Beispiel. Für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist das charakteristische Polynom
$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2.$$
Das charakteristische Polynom hat nur eine Nullstelle, die Null. Die algebraische Vielfachheit ist 2, die geometrische Vielfachheit ist 1.

Beispiel. Für
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
ist das charakteristische Polynom
$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\cos\varphi\cdot\lambda + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\cos\varphi\cdot\lambda + 1.$$
Die Nullstellen sind leicht zu bestimmen:
$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}}{2} = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi}.$$
Wir sehen also: Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, für $\varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ A hat keinen Eigenwert (unter $\sqrt{\ }$ würde eine negative Zahl stehen). Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, für $\varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, gibt es zwei unterschiedliche Eigenwerte
$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi.$$
Im letzten Fall ist also A diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ (A C H T U N G: Aber nicht über $\mathbb{R}$!)

Satz 5.4.2. Sei λ_0 ein Eigenwert von $T : V \to V$. Dann ist die geometrische Vielfachheit von λ_0 kleiner gleich als die algebraische Vielfachheit von λ_0

Beweis. Sei $\mathcal{L} = \{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis in $E^T_{\lambda_0}$ (also die geometrische Vielfachheit ist k). Ergänze diese Basis zu einer Basis $\mathcal{M}$ in V. Die Matrix von T bzgl. $\mathcal{M}$ hat die Form
$$M_T^{\mathcal{M},\mathcal{M}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \dots & \lambda_0 & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & \widetilde{A} \end{array}\right),$$
mit $\widetilde{A}$ eine $(n-k)\times(n-k)$-Matrix. Daraus rechnet man das characteristische Polynom leicht aus:
$$p_T(\lambda) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & \widetilde{A} - \lambda I_{n-k\times n-k} \end{array}\right) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(\widetilde{A} - \lambda I_{n-k\times n-k}),$$
daher ist die algebraische Vielfachheit mindestens k. ∎

5.5. Diagonalisieren.

Hauptsatz. Für $T : V \to V$ sind die folgende Aussagen äquivalent.

(i) T ist diagonalisierbar.
(ii) Das charateristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren (hat also n Nullstellen), und für jede solche Nullstelle λ_0 (also einen Eigenwert von T) gilt, dass die algebraische und die geometrische Vielfachheit von λ_0 miteinander übereinstimmen.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\mathcal{L}$ eine Basis in V aus Eigenvektoren von T. So wird die Matrix

$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

diagonal, und somit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

Sei λ_0 eine Nullstelle von p_T. Taucht λ_0 unter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ genau m-mal auf, so ist die algebraische Vielfachheit von λ_0 eben m. Außerdem, wegen der Diagonalform ist es leicht zu sehen, dass

$$\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda_0 I)) = m.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ und seien n_i bzw. m_i die geometrische und die algebraische Vielfachheiten von λ_i für $i = 1, \dots, k$. Nach Voraussetzung gilt $n_i = m_i$. Außerdem gilt

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n,$$

denn p_T zerfällt in Linearfaktoren. Daraus

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

und Satz 5.3.3 liefert die Diagonalisierbarkeit von T. ∎

Aufgabe. Diagonalisiere eine gegebene lineare Abbildung $T : V \to V$.

Lösung. **1.** Berechne das Charakteristische Polynom p_T.

2. Bestimme Nullstellen von p_T in $\mathbb{K}$. Falls p_T hat weniger als n Nullstellen, dann ist T nicht diagonalisierbar, sonst fahre mit dem nächsten Schritt fort.

3. Bestimme für jede Nullstelle λ_0 die geometrische Vielfachheit (also $\dim E^T_{\lambda_0} = \dim \mathrm{Kern}(T - \lambda_0 I)$). Falls diese mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, gehe zu nächstem Schritt (sonst ist T gar nicht diagonalisierbar).

4. Bestimme für jeden Eigenwert $\lambda_0 \in \sigma(T)$ eine Basis in $E^T_{\lambda_0}$. Die Vektoren in dieser Basen ergeben zusammen eine Basis in V bzgl. derer die Matrix von T diagonal wird.

∎

Beispiel. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerten (über $\mathbb{C}$)

$$\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 zu bestimmen betrachte

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -i\sin\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -i\sin\varphi \end{pmatrix} = \sin\varphi \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von

$$\sin\varphi \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ergibt einen Eigenvektor, zum Beispiel $b_1 = \binom{1}{i}$. Einen Eigenvektor zum λ_2 bestimmt man analog: $b_2 = \binom{1}{-i}$. ∎

5.6. Die Jordan-Normalform.

Definition. Für $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ heißt die $k \times k$-Matrix

$$J_{\lambda_0}^k = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

eine **Jordan-Matrix**.

Beobachtung. Das Charakteristische Polynom von $J_{\lambda_0}^k$ ist

$$p_{J_{\lambda_0}^k}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_0 - \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^k.$$

So sehen wir

$$\sigma(J_{\lambda_0}^k) = \{\lambda_0\},$$

also, λ_0 ist der einzige Eigenwert von $J_{\lambda_0}^k$, und die algebraische Vielfachheit von λ_0 ist k. Wir bestimmen nur $\mathrm{Kern}(J_{\lambda_0}^k - \lambda_0 I)$:

$$J_{\lambda_0}^k - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher gilt für die Lösungen x der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

dass $x_2 = x_3 = \cdots x_k = 0$. Also

$$\mathrm{Kern}(J_{\lambda_0}^k - \lambda_0 I) = \big\{x \in \mathbb{K}^n : x_2 = x_3 = \cdots x_k = 0\big\}.$$

Somit ist die geometrische Vielfachheit von λ_0 1. Insbesondere ist $J_{\lambda_0}^k$ nicht diagonalisierbar für $k \geq 2$.

Satz 5.6.1 (Jordansche Normalform)**.** Sei $T : V \to V$ lineare Abbildung. Falls das Charakteristische Polynom p_T über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1}(\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_\ell - \lambda)^{n_\ell},$$

so gibt es eine Basis von V, so daß

$$M_T^{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix},$$

mit J_i, Jordan-Matrizen.

Diese obige Form einer Matrix nennt man **Jordansche Normalform**.

Bemerkung. Die Abbildung T ist genau dann Diagonalisierbar, falls alle Jordan-Matrizen in der Jordan-Normalform 1-dimensional sind.