4.9. Determinanten. Für gegebene Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^n$, betrachte die Matrix deren Zeilenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ sind, also

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ab sofort benutzen wir diese bequeme Schreibweise.

Definition. Sei

$$M : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K}$$

eine n-lineare antisymmetrische Abbildung (n-Linearform), so dass $M(e_1, \ldots, e_n) = 1$ ($e_1, \ldots, e_n$ ist die kanonische Basis). So heiß die Abbildung

$$\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definiert für $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ durch

$$\det(A) = M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

eine **Determinante**.

Wir werden es später zeigen, dass es eine (und nur eine) Determinante gibt. Zunächst die Eigenschaften einer Determinante nochmal und ganz explizit:

Bemerkung. Die Abbildung $\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist eine Determinante, falls gelten:

(D1) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_i + \beta b \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Also: det ist linear in den Zeilenvektoren. Insbesondere ist eine Zeile der Matrix A komplett 0, so gilt $\det(A) = 0$. (Diese Eigenschaft entspricht der n-Linearität von M.)

(D2) Wenn man die i-te und die j-te Spalten von A vertauscht, die Determinante wird mit -1 multipliziert. D.h.

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(Dies entspricht der Antisymmetrie von M.) Man sagt auch, dass die Determinante **alternierend** ist.

(D3) Für die $n \times n$-Einheitsmatrix gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

(Diese Eigenschaft, die **Normiertheit**, entspricht der Forderung $M(e_1, \ldots, e_n) = 1$.)

Beispiele haben wir schon gesehen:

Beispiel. Für $n = 2$, das Spatprodukt in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.10. Eigenschaften der Determinate.

Satz 1. (D4) Sind zwei Zeilen von A gleich, z.B. $a_i = a_j$, $i \neq j$ so gilt $\det(A) = 0$.
(D5) Bei elementaren Zeilenumformungen von Typ II ändert sich die Determinante nicht.

Beweis. (D4): Beim Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeilen bleibt A unverändert, dabei muss aber die Determinante die Gegenzahl werden. Das ist nur möglich wenn $\det(A) = 0$. Genauer: mit

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

gelten $\det(A) = \det(\widetilde{A})$ (denn $A = \widetilde{A}$) und $\det(A) = -\det(\widetilde{A})$ (wegen (D2)).

(D5): Addieren wir λ-mal die i-te Zeile zu der j-ten:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(D1)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wobei, wegen (D4), der zweite Term 0 ist. ∎

Besonders wichtig sind die Determinante der Matrizen, die elementaren Umformungen entsprechen.

Beispiel 2. Betrachte die Matrizen

$$S_I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad S_{II} := \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \lambda & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \end{matrix}$$

So gilt $\det(S_I) = \lambda$ und $\det(S_{II}) = 1$. Betrachte nun die Matrix S_{III} die aus $I_{n\times n}$ durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeilen entsteht, d.h.

$$S_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \end{matrix}$$

So vertauscht die Multiplikation mit S_{III} von links die Zeilen einer Matrix A (und ebenso die Multiplikation mit rechts vertauscht die Spalten). Es gilt $\det(S_{III}) = 1$.

In manchen Fällen ist die Determinante sehr leicht auszurechnen:

Satz 3. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine $n \times n$-Matrix, welche in Zeilenstrukturform obere Dreiecksform hat:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

(eventuell mit $\alpha_{ii} = 0$ möglich). So gilt

$$\det(A) = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}.$$

Beweis. Ist $\alpha_{ii} = 0$ so ist auf $\alpha_{jj} = 0$ für $j \geq i$. Insbesondere oist $\alpha_{nn} = 0$, also die letzte Zeile ist 0. Somit $\det(A) = 0$ wegen (D1), die Aussage stimmt in diesem Fall. Nehme an, das $\alpha_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir können durch elementare Zeilenumformungen von Typ II die Matrix auf Diagonalform bringen:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \alpha_{(n-1)(n-1)} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(B) = \det(A)$, und $\det(B)$ is leicht auszurechnen:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \alpha_{(n-1)(n-1)} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn} \det(I_{n \times n}) = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}.$$

■

Wir haben auch das folgende Resultat teilweise bewiesen:

Satz 4. Für eine $n \times n$-Matrix sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\det(A) = 0$.
(ii) A ist *nicht* invertierbar.
(iii) $\mathrm{Rang}(A) < n$.
(iv) die Zeilen (bzw. die Spalten) von A sind *linear abhängig*.

Beweis. Bringe A auf Zeilenstrukturform. Dadurch änderts sich die Determinate nicht, und die neue Matrix ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. Dies beweist die Äquivalenz "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)". Die restliche Implikationen wissen wir schon. ■

Ein weitere Korollar ist das Folgende:

Satz 5. Es gibt höchtens eine Determinante.

Beweis. Bringe A auf Zeilenstrukturform, dann ist die Determinante nach Satz 3 eindeutig auszurechnen. ■

Der folgende Satz ist sehr wichtig:

Satz 6 (**Multiplikationssatz).** Für $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt

(D6)
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Insbesondere gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\det(A^N) = \det(A)^N$.
(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.
(iii) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, falls A invertierbar ist.
(iv) $\det(SAS^{-1}) = \det(A)$, falls S invertierbar ist (ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante).

Beweis. Die Aussagen (i)–(iv) sind leicht, sobald man die Gleichheit $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ bewiesen hat.

Ist A nicht invertierbar, so ist $\mathrm{Rang}(A) < n$ und somit $\mathrm{Rang}(AB) < n$, also auch AB ist nicht invertierbar. In diesem Fall gilt

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B),$$

also die Aussage. Wir können daher annehmen, dass A invertierbar ist. Wir haben aber es gesehen, dass dann A durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalform gebracht werden kann

$$A \underset{\mathrm{EZU_{II}}}{\sim} \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

mit $\alpha_{ii} \neq 0$. Wir wissen auch, dass $\widetilde{A} = SA$ mit einem invertierbaren Matrix S. Führe die gleichen elementaren Zeilenumformunen auf AB durch, so bekommen wir $S(AB)$. Daraus folgt:

$$\det(AB) = \det(SAB) = \det(\widetilde{A}B).$$

Nun rechnen wir $\det(\widetilde{A}B)$ aus:

$$\det(A\widetilde{B}) = \det \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{\alpha}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & & & \beta_{1n} \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_{n1} & \dots & & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11}\beta_{11} & & & \widetilde{\alpha}_{11}\beta_{1n} \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \widetilde{\alpha}_{nn}\beta_{n1} & \dots & & \widetilde{\alpha}_{nn}\beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{(D1)}}{=} \widetilde{\alpha}_{11} \cdot \widetilde{\alpha}_{22} \cdots \widetilde{\alpha}_{nn} \det(B) = \det(\widetilde{A})\det(B) = \det(A)\det(B).$$

■

Satz 7. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

a) Sei B eine Matrix die aus A durch vertauschen zweier Spalten entstanden ist. Es gilt $\det(A) = -\det(B)$.
b) Es gilt $\det(A^\top) = \det(A)$.

Beweis. a) Es gilt $B = AS$ mit S eine Matrix die Vertauschen der zwei Spalten beschreibt. Wir wissen bereits $\det(S) = -1$ (siehe Beispiel 2). Wegen des Multiplikationssatzes gilt

$$\det(B) = \det(AS) = \det(A)\det(S) = -\det(A).$$

b) Ist $\det(A) = 0$, so ist $\text{S-Rang}(A) < n$ und somit $\text{Z-Rang}(A^\top) < n$. In diesem Fall gilt also $\det(A^\top) = 0$. Nehme an, dass $\det(A) \neq 0$, d.h., A ist invertierbar. Bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalform B, d.h., $B = SA$. Es gilt dann

$$\det(A) = \det(B) = \det(B^\top) = \det((SA)^\top) = \det(A^\top S^\top) = \det(A^\top)\det(S^\top) = \det(A^\top).$$

■

4.11. Berechnung der Determinante. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine $n \times n$-Matrix. Das Berechnen der Determinante werden wir auf die Bestimmung von $(n-1) \times (n-1)$ Determinanten zurückführen. Dazu brauchen wir die folgenden Konstruktionen:

Definition. Für $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ und festes $1 \leq i, j \leq n$ führe die folgenden Notationen ein:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(j-1)} & \alpha_{1j} & \alpha_{1(j+1)} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{i(j-1)} & \alpha_{ij} & \alpha_{i(j+1)} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(j-1)} & \alpha_{nj} & \alpha_{n(j+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(j-1)} & \alpha_{1(j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(j-1)} & \alpha_{n(j+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h., streiche die i-te Zeile und die j-te Spalte aus A; Also $A_{ij} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$.

$$\widetilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(j-1)} & 0 & \alpha_{1(j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(j-1)} & 0 & \alpha_{n(j+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h., ersetze α_{ij} durch 1 und sonst i-te Zeile und die j-te Spalte komplett durch 0; Also $\widetilde{A}_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\widehat{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(j-1)} & \alpha_{1j} & \alpha_{1(j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(j-1)} & \alpha_{nj} & \alpha_{n(j+1)} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h., ersetze α_{ij} durch 1 und sonst i-te Zeile komplett durch 0; Also $\widehat{A}_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Hilfssatz 1. Mit den obigen Notationen gilt:

$$\det(\widehat{A}_{ij}) = \det(\widetilde{A}_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Beweis. 1) Die Matrix $\widehat{A}_{ij}$ entsteht aus $\widetilde{A}_{ij}$ durch elementare Zeilenumformungen. Daher haben diese Matrizen die gleiche Determinante.

2) Durch $n-i$ Zeilenvertauschungen und $n-j$ Spaltenvertauschungen bringen wir die Matrix $\widetilde{A}_{ij}$ auf die folgende Form:

$$B = \begin{pmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dabei ändert sich die Determinante durch einen Faktor $(-1)^{n-i+n-j} = (-1)^{i+j}$, es gilt also $\det(B) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$. Um $\det(B)$ zu bestimmen bringen wir B auf Zeilenstufenform, dabei bleibt die letzte Zeile stehen:

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei B_{ij} eine Zeilenstufenform von A_{ij} ist. Aus Satz 4.10.3 folgt $\det(B) = \det(B_i j) = \det(A_{ij})$, und somit ist die komplette Behauptung bewiesen. ∎

Satz 2 (Laplace'scher Entwicklungssatz). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A_{ij}).$$

Beweis. Es gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \det(\widehat{A}_{ij}),$$

denn die Determinante ist linear in der i-ten Zeile (siehe (D1)). Zusammen mit dem obigen Hilfssatz folgt die Behauptung. ∎