4.4. Lineare Gleichungssysteme, Notations. Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$(*)\qquad \begin{array}{cccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + \cdots + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + \cdots + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + \cdots + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}$$

Sei $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots n}}$ die **Koeffizientenmatrix** (also $A \in M_{m,n}$), ferner seien

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Dadurch wird $(*)$ zu $Ax = b$ übersetzt. Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ heißt das zu $(*)$ gehörige homogene lineare Gleichungssystem. Sei

$$T = T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad \text{die lineare Abbildung,}$$

so dass bzgl. der kanonischen Basen $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_m$ A die Matrix von T ist, d.h. $A = M_T^{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m}$. Nochmal: dies bedeutet

$$T_A(x) = Ax \quad \text{und die Spaltenvektoren von } A \text{ sind die Bilder der Basisvektoren in } \mathcal{E}_N.$$

4.5. Homogenes lineares Gleichungssystem, abstrakt. Betrachte die Gleichung $Ax = 0$, welche $x = 0$=Nullvektor immer als Lösung hat. Ob der Nullvektor $0 \in \mathbb{K}^n$ die einzige Lösung ist, läßt sich folgenderweise charakterisieren.

Satz. Die folgenden Aussagen sin Äquivalent.

a) Der Vektor $x = 0$ ist einzige Lösung der Gleichung $Ax = 0$.
b) $\operatorname{Ker} T_A = \{0\}$
c) T_A ist injektiv
d) $\operatorname{Rang}(A) = n$

Beweis. Die Äquivalenz zwischen a) und b) folgt aus

$$\operatorname{Ker} T_A = \{x : T_A(x) = 0\} = \{x : Ax = 0\}.$$

Wir haben schon gesehen (**??**), dass die Injektivität von T_A zu $\operatorname{Ker} T_A = \{0\}$ äquivalent ist (wie ging der Beweis?).

Wir haben auch gesehen (**??**), dass T_A genau dann injektiv ist, wenn T_A linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängig Vektoren bildet. Dies bedeutet aber, dass die Inketivität von T_A dazu äquivalent ist, dass die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind. Dies ist genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$. ∎

Aus dem Beweis bekommen wir den folgenden Korollar.

Satz. Es gilt $\dim(\operatorname{Bild} A) = \operatorname{Rang}(A)$ und $\dim(\operatorname{Ker} T_A) = n - \operatorname{Rang}(A)$.

Beweis. Wie oben zeigt man dass $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Bild} A)$. Die andere Gleichheit ist nur die Dimensionsformel. ∎

Aufgabe. Löse das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$. (Finde *alle* Lösungen. N.B. $x = 0$ is immer Lösung.)

Lösung. 1) Bringe A durch elementare Umformungen auf Zeilenstufenform.

2) Bringe die Matrix durch Vertauschen von Spalten auf die Form

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|cc} \alpha_{11} & & 0 & & * & * \\ \vdots & \ddots & & & * & * \\ 0 & \dots & \alpha_{ll} & & * & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots \end{array}\right), \quad \text{mit} \quad \alpha_{ii} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq l$$

(für die Variablen bedeutet dies nur eine Umnummerierung). Dieser Schritt ist natürlich nicht wirklich notwendig (nur die Schreibweise wird somit wesentlich einfacher).

3) Löse die Gleichung $\widetilde{A}x = 0$: Da über die letzten $m - l$ Zeilen keine Bedingung gestellt ist, wähle $x_{l+1} = \mu_1$, $x_{l+2} = \mu_2, \dots, x_n = \mu_{n-l}$ beliebig. Halte diese Wahl fest, so kann mann eindeutig die restlichen Variablen durch Rekursion bestimmen:

$$\begin{array}{lll} x_l & \text{aus } l\text{-ter Zeile} & \alpha_{ll}x_l + \alpha_{l,(l+1)}\mu_1 + \dots + \alpha_{ln}\mu_{n-l} = 0 \\ x_{l-1} & \text{aus } (l-1)\text{-ter Zeile} & \alpha_{(l-1),(l-1)}x_l + \alpha_{(l-1,l)}x_l + \alpha_{l-1,l+1}\mu_1 + \dots + \alpha_{l-1,n}\mu_{n-l} = 0 \\ \vdots & & \\ x_1 & \text{aus 1-ter Zeile} & a_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1l}x_l + \alpha_{1,(l+1)}\mu_1 + \dots + \alpha_{1n}\mu_{n-l} = 0 \end{array}$$

So bekommt man

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-l} \end{pmatrix},$$

eine Lösung der homogenen Gleichung $Ax = 0$. ■

Mithilfe der obigen Methode eine Basis in dem Lösungsraum ist sehr leicht zu finden. Wir haben also die freie Wahl für $\mu_1, \dots, \mu_{n-l}$. Für

(B)
$$\begin{aligned} (\mu_1, \dots, \mu_{n-l}) &= (1, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{bestimme Lösung } y_1 \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-l}) &= (0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{bestimme Lösung } y_2 \\ &\vdots \\ (\mu_1, \dots, \mu_{n-l}) &= (0, 0, \dots, 0, 1) \quad \text{bestimme Lösung } y_{n-l}. \end{aligned}$$

So ist $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ eine Basis in dem Lösungsraum $\operatorname{Ker} T_A$.

Begründung. 1) Wir haben es gesehen, dass A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstrufenform gebracht werden kann. Dies entspricht also Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix S von links. Daher ist $Ax = 0$ äquivalent zu $SAx = 0$, wobei SA jetzt Zeilenstufenform hat. Es genügt also nur solche Matrizen zu studieren.

2) Wie schon erwähnt diese Schritt bedeutet nur Umnummerierung der Variablen. Vertauschen von *Spalten* entspricht Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix R von *rechts*. Daher ist $SAx = 0$ is äquivalent zu $SARR^{-1}x = 0$. Also es genügt $SARz = 0$ zu lösen, mit $SAR = \widetilde{A}$, der obigen Form. Dann setzt man $x = Rz$, so ist x eine Lösung von $SAx = 0$.

3) Offenbar ist $\dim \operatorname{Ker} T_A = n - \operatorname{Rang} A = n - l$. Das bedeutet aber, dass es maximal $n - l$ linear unabhängige Lösungen existieren können. Die Lösungen $y_1, \dots, y_{n-l}$ die wir oben konstruiert haben, sind aber linear unabhängig, also bilden eine Basis in $\operatorname{Ker} T_A$. ■

Beispiel. Betrachte das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix sieht folgenderweise aus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bringen sie auf Zeilenstrukturform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach Vertauschen der Spalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also freie Wahl für die letzte Koordinate hier (vor dem Vertauschen dies war die 2-te). Setze also $x_2 = 1$, so liest man leicht die Lösung ab: $x_1 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Der Vektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ bildet eine Basis im Lösungsraum, also die Lösungen des homogenen Problems sind die Vektoren:

$$\operatorname{Ker} T_A = \left\{ \begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

ist also ein Gerade durch 0. (Was ist der Rang der Matrix A?)

Beispiel. Betrachte das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix sieht folgenderweise aus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bringen sie auf Zeilenstrukturform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Vertauschen der Spalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also freie Wahl für die letzten zwei Koordinaten hier (vor dem Vertauschen diese waren die 2-te und die 4-te). Setze also $x_2 = \lambda$ und $x_4 = \mu$, so liest man leicht die Lösung ab: $-x_3 - x_4 = 0$, also $x_3 = -\mu$; $x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$, also $x_1 = 2\lambda + \mu$. Daher ist der Lösungsraum:

$$\operatorname{Ker} T_A = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Was ist diese Menge geometrisch? Was ist die Dimension von $\operatorname{Ker} T_A$? Was ist der Rang von A?)

Bemerkung. Die Vektorräume $\mathbb{K}^{n-l}$ und $\operatorname{Ker} T_A$ sind isomorph! Eine Isomorphismus is gegeben durch

$$(\mu_1, \ldots, \mu_{n-l}) \mapsto (x_1, \ldots, x_l, \mu_1, \ldots, \mu_{n-l}) = (x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) = x,$$

wobei $x \in \mathbb{K}^n$ die *eindeutige* Lösung von $Ax = 0$ ist mit $x_l = \mu_1, \ldots, x_n = \mu_{n-l}$. Natürlich kann man eine andere Wahl einer Basis in (B) treffen, so ergibt sich wieder ein Isomorphismus, und eine andere Basis in Lösungsraum.

4.6. **Inhomogene Gleichungssysteme, abstrakt.** Betrachte die Gleichung

$$Ax = b.$$

Für allgemeines $b \in \mathbb{K}^m$ heißt diese Gleichung **inhomogen**. Die Lösungen der homogenen Gleichung bilden den Vektorraum $\operatorname{Ker} T_A$, dies stimmt aber für das inhomogene Problem nicht mehr. Was aber offensichtlich ist:

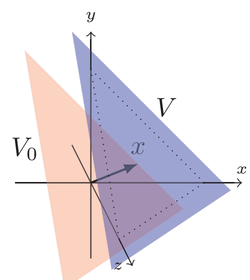
1. Ist $Ax = b$ und $Ax_0 = 0$, so gilt $A(x + x_0) = b$. Also zu beliebeiger Lösung des inhomogenen Problems kann man eine Lösung des homogenen Problems addieren, so erhält man wieder eine Lösung des inhomogenen Problems.

2. Ist $Ax_1 = b$ und $Ax_2 = b$, dann gilt $A(x_1 - x_2) = 0$. Also: Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Gleichungssystem ist eine Lösung des homogenen Problems.

Zusammenfassend können wir des folgende Resultat formulieren.

Satz. Die allgemeine Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems erhält man durch Addition einer beliebigen, speziellen Lösung des inhomogenen Problems zur allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Diese algebraischen Eigenschaften haben natürlich ihre geometrische Interpretation:



Definition. Sei V ein Vektrorraum, $V_0 \subseteq V$ ein linearer Teilraum, $x \in V$ ein fester Vektor. Dann heißt die Menge

$$x + V_0 := \{y \in V : y = x + v_0,\ v_0 \in V_0\}$$

affiner Teilraum (oder verschobener Unterraum).

Ein Beispiel ist, wie eben festgestellt, die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems. "Weitere" Beispiele sind allgemeine Geraden, Ebenen, Hyperebenen (siehe LAI).

Nun können wir den folgenden Satz über Lösbarkeit linearer Gleichungsysteme beweisen: Betrachte wieder die Gleichung

$$(*) \qquad Ax = b.$$

Satz. **1.** Die Gleichung $(*)$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \operatorname{Bild} T_A$

2. $(*)$ ist genau dann *universell lösbar* (d.h. für jede rechte Seite $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar), wenn T_A surjektiv ist. Dies ist weiter äquivalent zu $\operatorname{Rang} A = m$.

3. Für jedes b hat $(*)$ genau dann *höchtens eine* Lösung, wenn $\operatorname{Ker} T_A = \{0\}$. Dies ist weiter äquivalent zu $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} T_A = n$.

4. $(*)$ ist genau dann für jedes b *eindeutig lösbar*, wenn T_A bijektiv. Dies ist weiter äquivalent zu der Invertierbarkeit von A und zu $\operatorname{Rang} A = m = n$.

Beweis. 1. Die aussage ist trivial, denn $T_A(x) = Ax$.

2. Die erste Aussage folgt aus 1. Wir wollen noch zeigen, dass die Surjektivität von T_A zu der Aussage über $\operatorname{Rang}(A)$ äquivalent ist. Die Die Surjektivität von T_A is zu $\dim \operatorname{Bild} T_A = m$ äquivalent. Wir wissen, dass

$$\operatorname{Bild}(T_A) = \operatorname{lin}\{\text{Spaltenvektoren von } A\} \quad \text{gilt.}$$

Daher ist die Surjekticität zu $\operatorname{Rang}(A) = m$ äquivalent.

3. Aus dem obigen Satz folgt, dass wenn zwei Lösungen des inhomogenen Problems existieren, so existiert auch eine nicht 0 Lösung des homogenen Problems. Dies beweist 3.

4. Diese Aussage folgt aus 2. und 3. ∎

Aufgabe. Löse das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$. Wir definieren

$$(A, b) := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

die so genannte **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

1. Stelle fest ob $(*)$ lösbar ist: Bringe dazu (A, b) auf Zeilenstufenform $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$. So ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ die folgende Form hat:

$$(\widetilde{A}, \widetilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & & & & & * & * \\ \dots & \dots & 0 & & & * & * \\ & \dots & \dots & 0 & & * & * \\ \hline 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\widetilde{A}} \; \underbrace{\quad}_{\widetilde{b}}$$

Dies passiert aber genau dann, wenn $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}((\widetilde{A}, \widetilde{b}))$.

Begründung. Die Gleichung $Ax = b$ ist genau dann lösbar, falls $b \in \operatorname{Bild}(T_A)$. Der (Spalten)Rang von $\text{S-Rang}((A, b))$ is mindestens so groß wie der Rang von A, und er ist auch echt größer, wenn b linear unabhängig von den Spalten von A ist. Deswegen ist $\text{S-Rang}(A) = \text{S-Rang}((A, b))$ äquivalent zu

$$b \in \operatorname{lin}\{\text{Spaltenvektoren von } A\} = \operatorname{Bild}(T_A).$$

Beispiel. Nun zu dem vorherigen Beispiel:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = b.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir bringen sie auf Zeilenstrukturform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang 2, gleich wie die Matrix A. Wir stellen also fest, dass die Gleichung lösbar ist. Wenn man eine andere rechte Seite $b \in \mathbb{R}^3$ wählt wir die Gleichung nicht lösbar. Zum Beispiel setze $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. So bekommt man das Folgende:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat Rang 3, echt größer als die Matrix A. Wir stellen also fest, dass die Gleichung nicht lösbar ist.

2. Bestimme die allgemeine Lösung, falls $(*)$ lösbar ist. Bringe (A, b) auf Zeilenstufenform und dann durch Vertauschen von Spalten auf die Form

$$(\widetilde{A}, \widetilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} \widetilde{\alpha}_{11} & & * & * & \widetilde{b}_1 \\ \vdots & \ddots & & * & \vdots \\ 0 & \dots & \widetilde{\alpha}_{ll} & * & \widetilde{b}_l \\ \hline 0 & & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),$$

wobei $\widetilde{\alpha}_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, l$. Hier ist das Block, das wir mit $*$ bezeichnet haben, uninteressant. Betrachte also das Gleichungssystem (ein Teilsystem)

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{11} & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \widetilde{\alpha}_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{b}_l \end{pmatrix},$$

das einfach zu lösen ist: beginne von unten und setze ein. Eine spezielle Lösung des kompletten Gleichungssystems $(*)$ ergibt sich zum Beispiel, wenn man $x_{l+1} = \cdots = x_n = 0$ setzt. Nun bestimme die allgemeine Lösung des *homogenen* Problems, wie es in **4.5** gezeigt wurde. Die allgemeine Lösungen der *inhomogenen* Gleichung bekommt man mithilfe des ersten Satzes in **4.6**.

Begründung. Die Blockmatrix $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ habe Zeilenstrukturform, d.h. entsteht als $(\widetilde{A}, \widetilde{b}) = S(A, b)$ mit S invertierbare $m \times m$-Matrix. Genauer $SA = \widetilde{A}$ und $Sb = \widetilde{b}$. Daher ist $Ax = b$ zu $SAx = Sb$, also zu $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ äquivalent. ∎

Beispiel. Auf unserem Beispiel sieht es folgenderweise aus:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\widetilde{A}, \widetilde{b}).$$

(Wir vertauschen jetzt, nicht die Spalten, könnten wir aber tun.) Wir wählen $x_2 = x_4 = 0$, und müssen nunt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen. Durch Anschauen bekommt man $x_3 = -1$ und $x_1 = 2$. Wir haben früher auch alle Lösungen des homogene Problems bestimmt. So ist die Lösungsmenge der Gleichung der folgende affine Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda + \mu \\ \lambda \\ -1 - \mu \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$