LINEARE ALGEBRA II. FÜR PHYSIKER

BÁLINT FARKAS

4. Rechnen mit Matrizen

In diesem Kapitel werden wir zunächst die so genannten **elementaren Umformungen** studieren, die es ermöglichen eine Matrix auf besonders einfache Gestalt zu bringen: auf **Zeilenstufenform** (Hausaufgabe: das Gaußsche Eliminationsverfahren wiederholen). Die elementaren Umformungen dienen auch dazu, inhomogene und homogene lineare Gleichungssysteme einfach behandeln zu können. Am Endes des Kapitels führen wir die **Determinante** einer Matrix ein.

Als Aufwärmung betrachten wir eine weitere Operation die man mit Matrizen bzw. mit linearen Abbildungen ausführen kann.

4.4. Die Adjungierte einer linearen Abbildung. Gegeben seien die endlichdimensionalen Vektorräume V, W über dem Körper K. Wir betrachten die Dualräume von V und W, d.h., die Räume der Linearformen auf V und W. Die üblichen Notationen dafür sind V' und W'. Ist $T : V \to W$ eine lineare Abbildung, so können wir jede Linearform $\ell \in W'$ mit T verketten, so erhalten wir eine neue Linearform jetzt aber auf V:

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\ell} K, \qquad \ell \circ T(v) = \ell(Tv).$$

Da T und ℓ beide linear sind, so ist tatsächlich auch ihre Verkettung, d.h. $\ell \circ T \in V'$, und somit können wir die folgende Definition betrachten.

Definition. Sei $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Die Abbildung, die zu jeder Linearform $\ell \in W'$ die Linearform $\ell \circ T \in V'$ zuordnet, heißt die **Adjungierte der Abbildung** T. Also $T'\ell = \ell \circ T$.

Bemerkung. 1. Man zeigt dass T' wieder eine lineare Abbildung ist, und bildet W' nach V'.
2. A C H T U N G : im Falle, dass V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind, und sind versehen mit Skalarprodukte, haben wir einen weiteren Begriff definiert, den wir auch als "Adjungierte" bezeichnet und mit A^* notiert haben. Aus der Situation soll/wird immer eindeutig sein, welche eben gemeint ist.

Nun wollen wir es untersuchen, wie die Matrizen von T und T' zusammenhängen. Dazu brauchen wir Basen in V' und W'. Die interessante Wahl ist jene von dualen Basen. Seien

$$\mathcal{L} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V \quad \text{und} \quad \mathcal{M} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\} \subseteq W$$

Basen in V bzw. in W. Betrachte die zugehörigen **dualen Basen**

$$\mathcal{L}' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\} \subseteq V' \quad \text{und} \quad \mathcal{M}' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_m\} \subseteq W'$$

in V' und W'. D.h. es gelten $b'_j(b_k) = \delta_{jk}$ und $c'_i(c_p) = \delta_{ip}$ für alle $j, k = 1, \dots, n$ und $i, p = 1, \dots, m$ (δ bezeichnet das Kronecker-Delta). Ist $A \in M_{m,n}(K)$, $A = (\alpha_{ij})$ die Matrix der Abbildung T bzgl. der Basen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$, so können wir die Matrix $B = (b_{pk}) \in M_{m,n}(K)$ von T' bzgl. $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{M}'$ folgenderweise bestimmen: Die k-te Koordinate von $v' \in v'$ bzgl. der Basis $\mathcal{L}'$ ist $v'(b_k)$. Daraus bekommen wir

$$\beta_{kp} = (T'c'_p)(b_k) = c'_p(Tb_k) = c'_p\Big(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} c_i\Big) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} c'_p(c_i) = \alpha_{pk}.$$

Dies bedeutet aber, dass B die Transponierte von A ist, also

$$B = A^\top = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Das heißt, die Zeilenvektoren von B sind genau die Spaltenvektoren von A. Diese einfache Tatsache werden wir später oft ausnutzen.

4.4. Elementare Umformungen. Gegeben sei eine Matrix

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K).$$

Die Zeile bzw. die Spalten möchten wir als Vektoren in K^n bzw. in K^m auffassen (Zeilen- bzw. Spaltenvektoren).

Definition. Der **Zeilenrang** von A is die Dimension des Vektorraums aufgespannt durch die Zeilenvektoren:

$$\text{Z-Rang}(A) := \dim \operatorname{lin}\big\{\text{Zeilenvektoren von } A\big\}.$$

Analog definiert man den Spaltenrang:

$$\text{S-Rang} := \dim \operatorname{lin}\big\{\text{Spaltenvektoren von } A\big\}.$$

Beispiel.
Für die Matrix

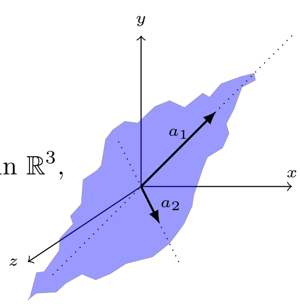
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\operatorname{lin}\big\{\text{Zeilenvektoren von } A\big\} = \big\{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = x\big\} = \text{Ebene in } \mathbb{R}^3,$$

und $\qquad \operatorname{lin}\big\{\text{Spalten von } A\big\} = \mathbb{R}^2.$

Daher ist Z-Rang$(A) = 2$ und S-Rang$(A) = 2$.



Wir werden es Zeigen, dass für jede Matrix die Gleichheit gilt.
Dazu brauchen wir aber einige Vorbereitungen.

Definition. Eine **elementare Zeilenumformung** (abgekürzt EZU) bzw. eine **elementare Spaltenumformung** (ESU) vom

Typ I ist Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem Skalar $0 \neq \lambda \in K$;
Typ II ist die Addition des λ-fachers ($\lambda \in K$) einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).
Typ III ist das Vertauschen zweier Zeilen (Spalten).

Entsteht eine Matrix B aus A durch endliche Anzahl von elementaren Zeilen- (Spalten-, oder beiden) Umformungen, so schreiben wir

$$A \underset{\text{EZU}}{\sim} B \quad (A \underset{\text{ESU}}{\sim} B,\ A \underset{\text{EU}}{\sim} B).$$

Man vergleiche diese Operationen mit dem Guaßschen Eliminationsverfahren. Die folgenden Aussagen lassen sich sehr leicht zu beweisen und werden dem Leser als Übungsaufgaben gelassen.

Behauptung. a) Es gilt $A \underset{\text{EZU}}{\sim} A$.
b) Ist $A \underset{\text{EZU}}{\sim} B$, so gilt auch $B \underset{\text{EZU}}{\sim} A$.

c) Sind $A \underset{\text{EZU}}{\sim} B$ und $B \underset{\text{EZU}}{\sim} V$, so auch $A \underset{\text{EZU}}{\sim} C$.

Man sagt, dass $\underset{\text{EZU}}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M_{m,n}(K)$ ist. Diese Eigenschaften stimmen natürlich auch für $\underset{\text{ESU}}{\sim}$ und $\underset{\text{EU}}{\sim}$.

Die folgenden Beobachtungen werden wir oft benutzen.

Beobachtung. a) Eine elementare Umformung vom Typ III läßt sich aus elementaren Umformungen von Typ I und Type II zusammenstellen. Wenn wir zum Beispiel die j-te und die i-te Spalten miteinander vertauschen möchten können wir folgenderweise vorgehen.

1. Wir addieren die j-te Spalte zu der i-ten (Typ II).
2. Wir substrahieren die i-te Spalte aus der j-ten (Typ II).
3. Wir addieren die j-te Spalte zu der i-ten (Typ II).
4. Wir multiplizieren die j-te Spalte mit -1 (Typ I).

$$\begin{tikzcd}
(\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots) \arrow[r, bend left, "\text{Schritt 1.}"] & (\dots,\alpha_i+\alpha_j,\dots,\alpha_j,\dots) \arrow[dl, bend right, "\text{Schritt 2.}"'] \\
(\dots,\alpha_i+\alpha_j,\dots,-\alpha_i,\dots) \arrow[r, bend right, "\text{Schritt 3.}"'] & (\dots,\alpha_j,\dots,-\alpha_i,\dots) \arrow[dl, bend left, "\text{Schritt 4.}"] \\
(\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots) &
\end{tikzcd}$$

b) Durch Transposition gehen elementare Zeilenumformungen in elementare Spaltenumformungen über und umgekehrt.

c) Seien $a_1,\dots,a_m$ die Zeilenvektoren von A. Bezeichne durch A_I bzw. durch A_{II} die Matrix nach einer (beliebigen) elementaren Zeilenumformung (vom Typ I bzw. II). D.h.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A_I = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A_{II} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$S_I := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \qquad S_{II} := \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \lambda & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

Mit dieser Notationen gilt $A_I = S_I A$ und $A_{II} = S_{II} A$. [Dies ist leicht einsehbar, wenn man die rechten Seiten ausmultipliziert.] Analog entsteht jede elementare Spaltenumformung durch Multiplikation von rechts mit Matrizen S_I und S_{II} der obigen Form. Bemerke auch dass die Matrizen

S_I und S_{II} invertierbar sind. Die Inversen sind leicht anzugeben:

$$S_I^{-1} := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \frac{1}{\lambda} & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \qquad S_{II}^{-1} := \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -\lambda & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz. a) Elementare Zeilenumformungen (Spaltenumformungen) entsprechen der Multiplikation von links (rechts) mit invertierbaren Matrizen, also einem Basiswechsel in Bildraum (Urbildraum).

b) Ist A eine Matrix und B eine andere die durch elementare Umformungen aus A entsteht so gilt

$$\operatorname{lin}\{\text{Zeilenvektoren von } A\} = \operatorname{lin}\{\text{Zeilenvektoren von } B\}$$

(und analog für die Spaltenvektoren).

c) Durch elementaren Umformungen ändern sich der Zeilenrang und der Spaltenrang nicht.

4.4. Die Zeilenstufenform einer Matrix. Die elementare Umformungen dienen dazu eine Matrix auf einfachere Form bringen zu können, aber so, dass die wesentlichen Eigenschaften der Matrix erhalten bleiben (so ein Beispiel ist im Satz c) oben). Analog zu dem Fall von Gleichungssysteme kann man die folgende Definition machen:

Definition. Eine Matrix A hat **Zeilenstufenform**, falls

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1j_1} & \dots & & & & & & & & \\ \dots & \dots & 0 & \alpha_{2j_2} & \dots & & & & & & \\ & \dots & \dots & 0 & & & & & & & \\ & & \dots & \dots & 0 & \alpha_{ij_i} & \dots & & & & \\ & & & \dots & \dots & 0 & & & & & \\ & & & & \dots & \dots & 0 & \alpha_{lj_l} & \dots & & \\ 0 & & & & & & & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_{ij_i} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, l$.

Der Vorteil diese Form us zunächst, dass trivialerweise die nicht Null Zeilenvektoren linear unabhängig sind, und daher ist der Zeilenrang so einer Matrix sehr leicht abzulesen: Z-Rang$(A) = l$ =die Anzahl der nicht Null Zeilen (überlegen Sie: was ist der Spaltenrang?). Um den Zeilenrang einer Matrix zu bestimmen ist somit der folgende Satz sehr hilfsreich:

Satz. Sei $A \in M_{m,n}(K)$ eine $m \times n$-Matrix.

a) Durch elementare Umformungen vom Typ II läßt sich A auf Zeilenstufenform bringen.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   (i) Die Matrix A ist invertierbar (insbesondere quadratisch, $n \times n$-Matrix).
   (ii) Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II lässt sich A auf **obere Dreiecksform** bringen, d.h.,

$$A \underset{\text{EZU}_{\text{II}}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1 \dots, n$. Hier werden mit $*$ beliebige Zahlen bezeichnet (die uns gerade nicht interessant sind).

(iii) Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II lässt sich A auf diagonale Form bringen, d.h.,

$$A \underset{\mathrm{EZU_{II}}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

mit $\alpha_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(iv) Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ I und II lässt sich A auf die Form der Einheitsmatrix bringen, d.h.,

$$A \underset{\mathrm{EZU}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Durch elementare Umformungen lässt sich A auf dem folgenden Gestalt bringen:

$$A \underset{\mathrm{EU}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{ll} & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

Beweis. a) Wie haben diese Aussage beim Gaußschen Verfahren gesehen.

b) "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Ist A invertierbar, so auch quadratisch (also $n \times n$). Bringe A auf Zeilenstufenform. Die neue Matrix $\widetilde{A}$ hat den gleichen Spaltenrang wie A. Aber A ist invertierbar, und daher sind die Spalten von A linear unabhängig, also S-Rang$(A) = n$. Hätte $\widetilde{A}$ nicht die gewünschte Form, so wäre $\alpha_{nn} = 0$. Das würde auch S-Rang$(\widetilde{A}) < n$ bedeuten, was aber einen Widerspruch liefert.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Durch Zelienumformungen vom Typ II können wir alle nicht Null Elemente über der Diagonale eliminieren. (Beginne von unten mit dem n-ten Zeile).

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)": Multipliziere jede Spalte (ESU Typ I) mit dem jeweiligen Skalar $\frac{1}{\lambda_i}$.

"(iv) $\Rightarrow$ (i)": Der Spaltenrang von A ist gleich wie der Spaltenrang der identischen $n \times n$-Matrix, also S-Rang$(A) = n$. Dies bedeutet aber, dass die Spaltenvektoren von A eine Basis in ihrem linearen Aufspann bilden, also A ist invertierbar.

c) Durch elementare Zeilenumformungen können wir A auf Zeilenstufenform bringen, dann durch vertauschen der Spalten können wir erreichen das die Matrix die folgende Form hat:

$$A \underset{\mathrm{EU}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & & * & * & * \\ \vdots & \ddots & & * & * \\ 0 & \dots & \alpha_{ll} & * & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

mit $\alpha_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, l$. Durch Zeilenumformungen (oder Spaltenumformungen) vom Typ II können wir es erreichen, dass im ersten Block (oben, links) nur die Diagonale nicht Null wird:

$$\underset{\text{EZU}_{\text{II}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & & 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & & * & * \\ 0 & \dots & \alpha_{ll} & * & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right),$$

dann durch Spaltenumformungen vom Typ II bekommen wir die gewünschte Form. ∎

Anwendungen.

Satz. Für jede Matrix A sind der Zeilenrang und der Spaltenrang gleich. Also wir können über dem Rang

$$\text{Rang}(A) = \text{Z-Rang}(A) = \text{S-Rang}(A)$$

reden.

Beweis. Die elementare Umformungen verändern weder den Zeilenrang noch den Spaltenrang. Durch solchen Umformungen können wir die Matrix A auf die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{ll} & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

bringen. Für solche Matrizen gilt aber Z-Rang $= l =$ S-Rang, und somit ist der Beweis fertig. ∎

Aufgabe. Gegeben Vektoren $a_1, \dots, a_m \in K^n$ bestimme eine Basis für den linearen Aufspann

$$\lim\{a_1, \dots, a_n\},$$

(insbesondere: teste auf lineare Unabhängigkeit, bestimme Dimension der linearen Hülle).

Lösung. Wir fassen die Vektoren als die Zeilenvektoren der Matrix A auf, und bringen A auf Zeilenstufenform. Die nicht Null Zeilen bilden eine gesuchte Basis. ∎

Aufgabe. Sei A eine quadratische $(n \times n)$ Matrix. Stelle fest, ob A invertierbar ist, und bestimme gegebenfalls die Inverse.

Lösung. Bringe A auf Zeilenstufenform, so kann man die Invertierbarkeit ablesen: A ist genau dann invertierbar, wenn $l = n$.

Um die Inverse auszurechnen bringe A durch elementaren Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix. Führe parallel dazu dieselbe elementare Zeilenumformungen an der Einheitsmatrix I durch, dann ergibt sich daraus die Inverse A^{-1} von A. Diese Method funktioniert wegen der folgenden Tatsache. Elementare Zeilenumformungen entsprechen Multiplikation mit invertierbaren Matrizen der From S_I und S_{II} aus **4.4**. Ist A invertierbar, so gibt es $S_1, d \dots, S_N$ alle von diesen Gestalt, so dass

$$I = S_1 \cdot S_2 \cdots S_N \cdot A$$

Daher

$$A^{-1} = S_1 \cdot S_2 \cdots S_N \cdot I.$$

Zur Illustration betrachte folgenden Besipiel. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, die vorgeschlagene Methode sieht folgenderweise aus:

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \arrow[d, bend right=60, "3\times \text{ erste Zeile zu zweiter Zeile addieren}"'] \& \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \arrow[d, bend left=60, "3\times \text{ erste Zeile zu zweiter Zeile addieren}"] \\
\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} \arrow[d, bend right=60, "\text{zweite Zeile zu erster Zeile addieren}"'] \& \begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} \arrow[d, bend left=60, "\text{zweite Zeile zu erster Zeile addieren}"] \\
\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \arrow[d, bend right=60, "\text{zweite Zeile mit } \frac{1}{2} \text{ multiplizieren}"'] \& \begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix} \arrow[d, bend left=60, "\text{zweite Zeile mit } \frac{1}{2} \text{ multiplizieren}"] \\
\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \& \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$