9 Extrema mit Nebenbedingungen

Prof. Dr. U. Kohlenbach (basierend auf R. Farwig: Skript Analysis II) ; LaTex-Version: F. Völz

In diesem Abschnitt behandeln wir lokale Extrema von Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, bei denen die zulässigen Werte x im Definitionsbereich eine Nebenbedingung $g(x) = 0$ erfüllen müssen, wobei $g : U \to \mathbb{R}$.

Der folgende Satz gibt eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines solchen lokalen Extremums unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ an:

Satz 9.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Setze $N := \{x \in U : g(x) = 0\}$ und sei $a \in N$ mit $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$. Weiter habe f in a ein lokales Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, d.h. es existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von a, sodass*

$$\forall x \in V \cap N : f(a) \geq f(x) \quad (\textit{bzw. } f(a) \leq f(x)).$$

Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \neq 0$ und setze $a = (a_1, a')$ mit $a' = (a_2, \ldots, a_n)$. Sei $U_1 \subseteq \mathbb{R}$, $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit $U = U_1 \times U'$. Der Satz über implizite Funktionen (§8, Satz 2) liefert mit $F := g$, $k := n - 1$ und $m := 1$ (da $\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a)\right) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \neq 0$) eine offene Umgebung $V' \subseteq U'$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : V' \to U_1$ mit $\varphi(a') = a_1$ und

$$\forall x' \in V' : g(\varphi(x'), x') = 0. \tag{1}$$

Ferner existiert eine Umgebung $V_1 \subseteq U_1$ von a_1, sodass in der Umgebung $V_1 \times V'$ von a gilt

$$N \cap (V_1 \times V') = \{x \in V_1 \times V' : x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Die Kettenregel, angewandt auf (1), liefert für die i-te Komponente (§6, Korollar zu Satz 3)

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a') + \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \text{für } i = 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Betrachte nun

$$F : V' \to \mathbb{R}, F(x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n).$$

Da nach Voraussetzung f in a eingeschränkt auf N ein lokales Extremum besitzt, folgt, dass F auch auf $V' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ein lokales Extremum besitzt. Nach §7, Satz 3 gilt daher

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a') = 0 \quad \text{für } i = 2, \ldots, n.$$

Wiederum mit §6, Korollar zu Satz 3 folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a') + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \text{für } i = 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Setze nun

$$\lambda := \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a)\right)^{-1}.$$

(2) und (3) liefern für $i = 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a') = -\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}(a)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a') = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Unmittelbar aus der Definition von λ folgt, dass dies auch für $i = 1$ gilt. Also gilt

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a).$$

$\square$

Beispiel 9.2. Bestimme im $\mathbb{R}^n$ den Abstand der Ebene $\langle \mathsf{v}, x\rangle - c = 0$ vom Nullpunkt, wobei $\mathsf{v} = (\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n)$ mit $\mathsf{v} \neq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und c eine beliebige reelle Konstante ist.

Dies lässt sich als die Aufgabe formulieren, für die Abstandsfunktion vom Nullpunkt oder äquivalent für

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x) = \langle \mathsf{v}, x\rangle - c = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{v}_i x_i - c = 0$$

das Minimum x zu bestimmen.

Bestimme x, sodass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $2x = \lambda \mathsf{v}$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
& 2\langle \mathsf{v}, x\rangle - \lambda\langle \mathsf{v}, \mathsf{v}\rangle = 0 \\
\Rightarrow\quad & 2c - \lambda\|\mathsf{v}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2c}{\|\mathsf{v}\|^2} \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{\lambda}{2}\mathsf{v} = \frac{c}{\|\mathsf{v}\|^2}\mathsf{v}
\end{aligned}$$

Da also x durch "$\exists \lambda \in \mathbb{R} : 2x = \lambda \mathsf{v}$" eindeutig bestimmt ist, muss in x das lokale Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ vorliegen, das zugleich globales Minimum ist (Übung). Der minimale Abstand ist also $\|x\| = \frac{c}{\|\mathsf{v}\|}$.

Bemerkung 9.3. *Ist $N := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ eine kompakte Menge, so besitzt $f_{|N}$ ein Minimum und ein Maximum, d.h. f hat dann unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ein globales und damit auch ein lokales Minimum und Maximum. Der kleinste bzw. größte Wert $f(a)$, den man bei Bestimmung derjenigen $a \in N$ mit*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a)$$

erhält, ist dann das Minimum bzw. das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

Beispiel 9.4. Bestimme die extremalen Werte der Funktion $f(x,y) := xy$ auf der Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$. Betrachte $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Für (x,y) mit $x^2 + y^2 = 1$ sei

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y),$$

d.h.

$$y = 2\lambda x \quad \text{und} \quad x = 2\lambda y.$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit x und der zweiten Gleichung mit y liefert $xy = 2\lambda x^2$ und $xy = 2\lambda y^2$ und somit (da offensichtlich $\lambda \neq 0$) $x^2 = y^2$. Mit $x^2 + y^2 = 1$ folgt also $2x^2 = 1$, d.h. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ lösen die Gleichung mit $\lambda = \frac{1}{2}$ und die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ mit $\lambda = -\frac{1}{2}$. Wegen

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

und

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

sind also (nach der vorrangegangenen Bemerkung) $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ die gesuchten Extremwerte.

10 Kurvenintegrale

Prof. Dr. U. Kohlenbach (basierend auf R. Farwig: Skript Analysis II) ; LaTex-Version: F. Völz

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine rektifizierbare Kurve (die man sich als Weg eines Teilchens von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ vorstellen kann).

Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Um das Teilchen von $\gamma(t_{j-1})$ nach $\gamma(t_j)$ entlang des Geradenstücks $\{(1-\lambda)\gamma(t_{j-1}) + \lambda\gamma(t_j) : \lambda \in [0, 1]\}$ zu bewegen, wird im angenähert konstanten Kraftfeld $f(\gamma(t_j))$ die Arbeit

$$\langle f(\gamma(t_j)), (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\rangle$$

aufgewendet. Also ist (wir schreiben im Folgenden $\mathrm{v} \cdot w$ statt $\langle \mathrm{v}, w\rangle$)

$$\sum_{j=1}^{m} f(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

eine Approximation der Gesamtarbeit beim Transport von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Wie schon bei den Riemannschen Summen in der Analysis I, lässt man auch im Folgenden allgemeine Riemannsche Summen

$$R(f, \gamma, Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

mit beliebigen $\xi_j \in \gamma\left([t_{j-1}, t_j]\right)$ zu.

Wegen $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \approx \gamma'(t_j)(t_j - t_{j-1})$, approximiert $R(f, \gamma, Z)$ (falls $\lim_{|Z|\to 0} R(f, \gamma, Z)$ existiert) ein **Kurvenintegral**

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Satz 10.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\gamma : [a, b] \to U$ eine rektifizierbare Kurve. Dann existiert $I(f, \gamma) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:*
Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ mit Feinheit $|Z| := \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \ldots, m\} < \delta$ gilt

$$\left|R(f, \gamma, Z) - I(f, \gamma)\right| < \epsilon,$$

d.h.

$$I(f, \gamma) = \lim_{|Z|\to 0} R(f, \gamma, Z)$$

existiert.

Beweis. Ganz ähnlich dem Beweis der Konvergenz Riemannscher Summen in Analysis I unter Verwendung der gleichmäßigen Stetigkeit von $f \circ \gamma$ auf $[a, b]$. □

Definition 10.2. *$I(f,\gamma)$ heißt* ***Kurvenintegral*** *(oder* ***Wegintegral****) von f entlang γ und wird mit*

$$\int_\gamma f(x)\cdot dx \quad \left(\text{oder auch } \int_\gamma f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n\right)$$

bezeichnet.

Satz 10.3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\gamma\colon [a,b] \to U$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(x)\cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)dt.$$

Beweis. Sei $Z_{\underline{t},\underline{\xi}}\colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit Stützstellen $\xi_j \in \gamma([f_{j-1},t_j])$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&R(f,\gamma,Z_{\underline{t},\underline{\xi}}) - \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^m \left(f(\xi_j)\cdot(\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \right) \\
&\overset{\text{Hauptsatz der Differential-}}{\underset{\text{u. Integralrechnung}}{=}} \sum_{j=1}^m \left(f(\xi_j)\cdot \int_{t_{j-1}}^{t_j}\gamma'(t)dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(f(\xi_j) - f(\gamma(t))\Big)\cdot\gamma'(t)dt.
\end{aligned}$$

Da $f\circ\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist, existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle Zerlegungen $Z_{\underline{t},\underline{\xi}}$ und alle $t \in [t_{j-1},t_j]$

$$\left|Z_{\underline{t},\underline{\xi}}\right| < \delta \quad\Rightarrow\quad \|f(\xi_j)-f(\gamma(t))\| < \frac{\epsilon}{L(\gamma)}$$

gilt, wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ ist. Für solche $Z_{\underline{t},\underline{\xi}}$ folgt also

$$\begin{aligned}
&\left| R(f,\gamma,Z) - \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\epsilon}{L(\gamma)}\cdot\|\gamma'(t)\|dt \\
&= \int_a^b \frac{\epsilon}{L(\gamma)}\cdot\|\gamma'(t)\|dt \overset{\S4,\ \underline{S}.5.1}{=} L(\gamma)\frac{\epsilon}{L(\gamma)} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Satz (10.1) liefert nun die Behauptung. $\square$

Korollar 10.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [a,b] \to U$ eine rektifizierbare Kurve in U und $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Dann gilt*

(i)

$$\int_\gamma (f+g)(x) \cdot dx = \int_\gamma f(x) \cdot dx + \int_\gamma g(x) \cdot dx$$

und

$$\int_\gamma (cf)(x) \cdot dx = c \int_\gamma f(x) \cdot dx \quad \text{für alle} \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Sei γ^- die aus γ entstehende Kurve, wenn man die Orientierung umkehrt, d.h.

$$\gamma^- : [a,b] \to U, \gamma^-(t) := \gamma(a+b-t).$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma^-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx.$$

(iii) Sei $\tilde{\gamma} : [b,c] \to U$ eine weitere rektifizierbare Kurve, deren Anfangspunkt gleich dem Endpunkt von γ ist, d.h. $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$, und sei $\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [a,c] \to U$ die Kurve, die durch Aneinanderhängen von γ und $\tilde{\gamma}$ entsteht, d.h.

$$\gamma \oplus \tilde{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a,b] \\ \tilde{\gamma}(t), & t \in]b,c] \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma \oplus \tilde{\gamma}} f(x) \cdot dx = \int_\gamma f(x) \cdot dx + \int_{\tilde{\gamma}} f(x) \cdot dx.$$

(iv) Für die Supremumsnorm $\|f\|_{\infty,\gamma} := \sup\{\|f(x)\| : x \in \gamma([a,b])\}$ von γ auf dem (kompakten) Bild $\gamma([a,b])$ von γ gilt

$$\left| \int_\gamma f(x) \cdot dx \right| \leq \|f\|_{\infty,\gamma} \cdot L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ ist.

Beweis. (i)-(iii) folgen sofort mit Satz (10.1) aus den entsprechenden Eigenschaften der Riemann-Summen. Es bleibt (iv) zu zeigen:

$$\begin{aligned} \left| R(f,\gamma,Z) \right| &= \left| \sum_j f(\xi_j) \cdot \left(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \right) \right| \\ &\leq \sum_j \|f(\xi_j\| \cdot \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\ &\leq \|f\|_{\infty,\gamma} \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun ebenfalls mit Satz (10.1). □

Satz 10.5 (Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, γ eine rektifizierbare Kurve in U und φ eine orientierungstreue C^1-Parametertransformation. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{\gamma\circ\varphi} f(x) \cdot dx.$$

Beweis. Sei zunächst γ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt mit der C^1-Parametertransformation $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x) \cdot dx &\overset{(10.3)}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&\underset{t=\varphi(s)}{\overset{Substitution}{=}} \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \cdot \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) ds \\
&= \int_\alpha^\beta f\left((\gamma \circ \varphi)(s)\right) \cdot \frac{d}{ds}(\gamma \circ \varphi)(s) ds \\
&= \int_{\gamma\circ\varphi} f(x) \cdot dx.
\end{aligned}$$

Falls γ nur rektifizierbar ist, muss man direkt mit approximierenden Riemann-Summen argumentieren. □

Definition 10.6. *Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* ***Gebiet****, wenn U wegzusammenhängend ist, d.h. wenn es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in U$ eine Kurve $\gamma\colon [a, b] \to U$ gibt, mit $x = \gamma(a)$ und $y = \gamma(b)$.*

Bemerkung 10.7. *Zu je zwei Punkten $x, y \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ in einem Gebiet U gibt es immer einen Polygonzug, der x und y verbindet.*

Beweis. Der Beweis verbleibt als Übungsaufgabe. □

Definition 10.8. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. f heißt* ***Gradientenfeld****, wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$f(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) \left(= \nabla\varphi\right).$$

φ heißt ein ***Potential*** *zu f. (siehe §5)*

Satz 10.9. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld. Dann sind alle Potentialfunktionen von f bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.*

Beweis. Mit $f = \nabla\varphi$ gilt auch $f = \nabla(\varphi + c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Seien φ, ψ Potentiale zu f. Dann gilt

$$\nabla(\varphi - \psi) = \nabla\varphi - \nabla\psi = f - f = 0.$$

Da $\varphi - \psi$ differenzierbar ist, gilt $D(\varphi - \psi)(x) = 0$ für alle $x \in G$.

Seien $a, b \in G$. Nach Bemerkung (10.7) existiert ein Polygonzug in U (mit gewissen Eckpunkten a_j), der a und b verbindet. Anwendung des Mittelwertsatzes (§6, Korollar zu S.5) auf jede der Strecken S_k mit den Eckpunkten a_j, a_{j+1} liefert nun für $\chi := \varphi - \psi$

$$\left\|\chi(a_{j+1}) - \chi(a_j)\right\| \leq \sup\{\|D\chi(\xi)\|\colon \xi \in S_k\} = 0$$

und somit $\chi(b) = \chi(a)$, d.h. χ ist konstant. □

Satz 10.10. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Gradientenfeld mit Potential $\varphi \in C^1(G)$.*

(i) Seien $x, y \in G$ beliebig. Für jede stetig differenzierbare Kurve γ in G, die x mit y verbindet, gilt

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(y) - \varphi(x),$$

*d.h. das Kurvenintegral eines Gradientenfeldes hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ ab, nicht aber vom Verlauf von γ. (**Wegunabhängigkeit**)*

(ii) Ist γ insbesondere eine geschlossene Kurve, d.h. $\gamma(b) = \gamma(a)$, so gilt

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0.$$

Bezeichnung 10.11. *Für Kurvenintegrale über geschlossene Kurven γ schreiben wir auch*

$$\oint_\gamma f(x) \cdot dx.$$

Beweis. (i) Nach Satz (10.3) gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&\overset{Kettenregel}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) dt \\
&\underset{\text{u. Integralrechnung}}{\overset{\text{Hauptsatz der Differential-}}{=}} (\varphi \circ \gamma)(b) - (\varphi \circ \gamma)(a) = \varphi(y) - \varphi(x).
\end{aligned}$$

(ii) Folgt unmittelbar aus (i).

□

Bemerkung 10.12. *Die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals eines Gradientenfeldes gilt auch für Kurven γ, die nur stückweise stetig differenzierbar sind: Zerlege $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ in eine endliche Summe von Kurvenintegralen über die entsprechenden Kurvenstücke und argumentiere wie zuvor.*

Umgekehrt impliziert die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ eines stetigen Vektorfeldes $f : G \to \mathbb{R}^n$ für beliebige stückweise stetig differenzierbare Funktionen, dass f ein Gradientenfeld ist. Genauer gilt:

Satz 10.13. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig mit wegunabhängigem Kurvenintegral, $a \in G$ fest gewählt und $\varphi : G \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(y) \cdot dy := \int_{\gamma_x} f(y) \cdot dy,$$

wobei γ_x eine beliebige a mit x verbindende stückweise stetig differenzierbare Kurve in G ist. Dann ist φ stetig differenzierbar und es gilt

$$f = \nabla \varphi.$$

Beweis. Auf Grund der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von f ist φ wohldefiniert. Sei $x \in G$ und wähle $\epsilon > 0$ so klein, dass $B_\epsilon(x) \subseteq G$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \epsilon$

$$[x, x+h] = \{ \underbrace{x + th}_{\sigma_h(t)} : 0 \le t \le 1\} \subseteq B_\epsilon(x).$$

γ_x sei eine a mit x verbindende Kurve in G, sodass $\gamma_x \oplus \sigma_h$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in G ist, die a mit $x + h$ verbindet. Mit dem Korollar (10.4) (iii),(iv) und Satz (10.3) folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(x+h) - \varphi(x) - f(x) \cdot h &= \int_{\gamma_x \oplus \sigma_h} f(y) \cdot dy - \int_{\gamma_x} f(y) \cdot dy - f(x) \cdot h \\
&\overset{(10.4)\ (iii)}{=} \int_{\sigma_h} f(y) \cdot dy - f(x) \cdot h \\
&\overset{S.(10.3)}{=} \int_0^1 \big(f(x+th) - f(x)\big) \cdot h \, dt
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\big|\varphi(x+h) - \varphi(x) - f(x) \cdot h\big| &\le \left| \int_0^1 \big(f(x+th) - f(x)\big) \cdot h \, dt \right| \\
&\overset{(10.4)\ (iv)}{\le} \|h\| \sup_{t \in [0,1]} \big\| f(x+th) - f(x) \big\| =: \chi(h).
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f in x folgt, dass $\chi = \circ(\|h\|)$, d.h. φ ist differenzierbar in x und

$$D\varphi(x) = \nabla \varphi(x) = f(x).$$

□

Satz 10.14. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld. Dann gilt*

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k \quad \textit{für} \quad 1 \le j, k \le n.$$

Beweis. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ ein Potential von f, d.h. $f = \nabla \varphi$. Dann ist φ zweimal stetig partiell differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz (§5, 5.1) folgt für $1 \le j, k \le n$

$$\partial_k f_j = \partial_k \partial_j \varphi = \partial_j \partial_k \varphi = \partial_j f_k.$$

□

11 Integration im $\mathbb{R}^n$

Prof. Dr. U. Kohlenbach (basierend auf R. Farwig: Skript Analysis II) ; LaTex-Version: F. Völz

Definition 11.1. *(1) Seien $J_1, \ldots, J_n$ kompakte nichtleere Intervalle in $\mathbb{R}$. Dann heißt*

$$R = J_1 \times \ldots \times J_n \subseteq \mathbb{R}^n$$

ein (kompaktes) ***Rechteck*** *im $\mathbb{R}^n$.*

(2) Für jedes $J_i = [a_i, b_i]$ sei eine Zerlegung Z_i mit

$$Z_i : a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \ldots < t_{i,k_i} = b_i \quad (k_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n)$$

gegeben. Dann definiert die Menge aller Rechtecke der Form

$$[t_{1,j_1}, t_{1,j_1+1}] \times \ldots \times [t_{n,j_n}, t_{n,j_n+1}] \quad \text{mit} \quad 0 \leq j_i \leq k_i - 1, \; i = 1, \ldots, n$$

eine ***Partition*** *P* ***des Rechtecks*** *R, die wir mit $P_1 \times \ldots \times P_n$ bezeichnen.*

(3) Das ***n-dimensionale Volumen*** *des Rechtecks R im $\mathbb{R}^n$ wird definiert als*

$$\mathrm{vol}_n(R) := |R| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Lemma 11.2. *Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und P eine Partition von R. Dann gilt*

$$|R| = \sum_{S \in P} |S|.$$

Beweis. Offensichtlich. □

Definition 11.3. *(1) Sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei P eine Partition des Rechtecks R. Dann heißt*

$$U_R(P, f) = U(P, f) := \sum_{S \in P} \inf\big(f(S)\big) \cdot |S|$$

$$\text{bzw.} \quad O_R(P, f) = O(P, f) := \sum_{S \in P} \sup\big(f(S)\big) \cdot |S|$$

untere *bzw.* ***obere Riemann-Summe*** *von f auf R.*

(2) Eine weitere Partition P^* von R heißt ***Verfeinerung von*** *P, falls für alle $S^* \in P^*$ ein $S \in P$ existiert, sodass $S^* \subseteq S$ gilt.*

Lemma 11.4. *Ist P^* eine Verfeinerung von P, so gilt*

$$U(P, f) \leq U(P^*, f) \leq O(P^*, f) \leq O(P, f).$$

Beweis. Einfache Übung. $\square$

Definition 11.5 (Riemann-Integral auf R). *(1) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und $f : R \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt*

$$\int_{*R} f(x)dx := \sup_P U_R(P, f)$$
$$\text{bzw.} \quad \int_R^* f(x)dx := \inf_P O_R(P, f)$$

das (Riemann-) ***Unter-*** *bzw.* ***Oberintegral*** *von f auf R. Hierbei werden in $\sup_P$ bzw. $\inf_P$ alle Partitionen P von R betrachtet.*

(2) f heißt ***Riemann-integrierbar****, falls*

$$\int_{*R} f(x)dx = \int_R^* f(x)dx.$$

In diesem Fall wird

$$\int_R f(x)dx := \int_R^* f(x)dx$$

als das ***Riemann-Integral*** *von f über R bezeichnet.*

Lemma 11.6 (Riemannsches Integrabilitätskriterium). *Eine beschränkte Funktion $f : R \to \mathbb{R}$ auf einem Rechteck R ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition P von R mit*

$$O(P, f) - U(P, f) < \epsilon$$

gibt.

Beweis. Lemma (11.4) $\square$

Satz 11.7. *(1) Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum (mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation).*

(2) (i) $f \mapsto \int_R f(x)dx$ ist ein linearer Operator.

(ii) $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_R f(x)dx \geq 0$.

(iii) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_R f(x)dx \leq \int_R g(x)dx$.

(3) Stetige Funktionen $f : R \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir zeigen, dass mit f, g auch $f + g$ Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_R (f+g)(x)dx = \int_R f(x)dx + \int_R g(x)dx.$$

Die entsprechende Aussage für $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{R})$ ist offensichtlich, ebeso wie (2) (ii), was seinerseits (iii) impliziert (auf Grund der Linearität). Seien also f, g integrierbar und $\epsilon > 0$. Nach Lemma (11.6) existieren Partitionen P, P' von R mit

$$O(P, f) - U(P, f) < \epsilon \quad \text{und} \quad O(P', g) - U(P', g) < \epsilon \tag{1}$$

Sei

$$P'' := \{S \cap S' : S \in P, S' \in P', (S \cap S')^\circ \neq \emptyset\}$$

und somit eine Verfeinerung von P und P' (hierbei bezeichnet A° das Innere von A). Für $S \in P''$ gilt

$$\begin{aligned} \inf f(S) + \inf g(S) &\leq \inf(f+g)(S) \\ &\leq \sup(f+g)(S) \leq \sup f(S) + \sup g(S) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} U(P'', f) + U(P'', g) &\leq U(P'', f+g) \\ &\leq O(P'', f+g) \leq O(P'', f) + O(P'', g). \end{aligned}$$

(1) gilt erst recht für die feinere Partition P'' (Lemma (11.4)) und somit folgt

$$O(P'', f+g) - U(P'', f+g) < 2\epsilon.$$

Nach Lemma (11.6) ist daher $f + g$ integrierbar und

$$\int_R (f+g)(x)dx = \int_R f(x)dx + \int_R g(x)dx.$$

(iii) verbleibt als Übung oder folgt aus Satz (11.15) weiter unten. □

Satz 11.8 (G. Fubini, 1879-1943). *Seien $R \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakte Rechtecke. $f : R \times Q \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und $f_x := f(x, \cdot)$ sei für jedes $x \in R$ Riemann-integrierbar über Q. Dann ist auch $I(x) := \int_Q f_x(y)dy$ über R Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_{R\times Q} f(x,y)d(x,y) = \int_R \left(\int_Q f(x,y)dy \right) dx.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel Farwig: Skript zu Analysis II oder H. Heuser: Lehrbuch der Analysis II, Teubner. □

Korollar 11.9. *Sei $f : R \times Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für jedes $x \in R$ existiere das Riemann-Integral $\int_Q f(x,y)dy$ und für jedes $y \in Q$ existiere das Riemann-Integral $\int_R f(x,y)dx$. Dann gilt*

$$\int_R \left(\int_Q f(x,y)dy \right) dx = \int_{R\times Q} f(x,y)d(x,y) = \int_Q \left(\int_R f(x,y)dx \right) dy.$$

Warnung. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f über $R \times Q$ folgt nicht, dass f_x für jedes $x \in R$ Riemann-integrierbar ist.

Bemerkung 11.10. *Falls zum Beispiel f stetig ist, erlaubt Korollar* (11.9) *die Berechnung des Integrals von f über $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ durch die Berechnung von n eindimensional Integralen:*

$$\int_R f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \right) \ldots dx_{n-1} \right) dx_n$$

Definition 11.11. *Eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar**, wenn ihre charakteristische Funktion*

$$\chi_B(x) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } x \in B \\ 0, & \textit{falls } x \notin B \end{cases}$$

über einem kompakten Rechteck R mit $B \subseteq R$ Riemann-integrierbar ist. Man setzt dann

$$|B| := \int_R \chi_B dx.$$

Bemerkung 11.12. *(1) $|B|$ ist von der Wahl von R unabhängig.*

(2) Rechtecke $R \subseteq \mathbb{R}^n$ sind stets Jordan-messbar.

Zu einer auf einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ erklären wir die Fortsetzung $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{falls } x \notin B \end{cases}.$$

Definition 11.13. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heißt auf B Riemann-integrierbar, wenn für ein beliebiges Rechteck $R \supseteq B$ gilt, dass*

$$\int_B f(x)dx := \int_R f_B(x)dx$$

existiert.

Bemerkung 11.14. *Diese Definition ist wiederum unabhängig von der Wahl von R.*

Satz 11.15. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan-messbar. Dann ist jede stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. [nach M. Reichert-Hahn; Skript Analysis II, Frankfurt 1993]
Sei $R \supseteq B$ ein Rechteck. Wir zeigen, dass $\int_R f_B(x)dx$ existiert: Da B Jordan-messbar ist, existieren nach Lemma (11.6) zu jedem $\epsilon > 0$ Partitionen P von R mit

$$0 \leq O\left(P, \chi_B\right) - U\left(P, \chi_B\right) \leq \epsilon. \tag{2}$$

Da B kompakt ist, ist f auf B gleichmäßig stetig. Somit gibt es eine Verfeinerung P^* von P, sodass auf den Teilrechtecken $R_\nu^* \in P^*$ mit $R_\nu^* \subseteq B$ gilt

$$0 \leq M\left(R_\nu^*\right) - m\left(R_\nu^*\right) \leq \epsilon, \tag{3}$$

wobei für $R_\nu^* \in P^*$

$$M\left(R_\nu^*\right) := \sup\left\{f_B(x) \colon x \in R_\nu^*\right\},$$
$$m\left(R_\nu^*\right) := \inf\left\{f_B(x) \colon x \in R_\nu^*\right\}.$$

Setze nun

$$M^* := \left\{R_\nu^* : R_\nu^* \in P^*,\ R_\nu^* \cap B \neq \emptyset,\ R_\nu^* \nsubseteq B\right\}.$$

Da P^* eine Verfeinerung von P ist, folgt mit Lemma (11.4) aus Gleichung (2)

$$\sum_{R_\nu^* \in M^*} \left|R_\nu^*\right| = O\left(P^*, \chi_B\right) - U\left(P^*, \chi_B\right) \leq \epsilon. \tag{4}$$

Sei M_a die Menge der Teilrechtecke $R_\nu^* \in P^*$ mit $R_\nu^* \cap B = \emptyset$ und M_i die Menge der Teilrechtecke $R_\nu^* \in P^*$ mit $R_\nu^* \subseteq B$. Dann gilt

$$M\left(R_\nu^*\right) = m\left(R_\nu^*\right) = 0 \quad \text{für} \quad R_\nu^* \in M_a \tag{5}$$

und nach Gleichung (3)

$$0 \leq M\left(R_\nu^*\right) - m\left(R_\nu^*\right) \leq \epsilon \quad \text{für} \quad R_\nu^* \in M_i. \tag{6}$$

Ferner gilt

$$\sum_{R_\nu^* \in M_i} \left|R_\nu^*\right| = U\left(P^*, \chi_B\right) \leq |B|. \tag{7}$$

Mit $K := \sup\{|f(x)| \colon x \in B\} (= \sup\{|f_B(x)| \colon x \in R\})$ folgt dann

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq\ O\left(P^*, f_B\right) - U\left(P^*, f_B\right) \\
&= \sum_{R_\nu^* \in M_a} \underbrace{\left(M\left(R_\nu^*\right) - m\left(R_\nu^*\right)\right)}_{=0 \text{ nach } (5)} \left|R_\nu^*\right| + \underbrace{\sum_{R_\nu^* \in M_i} \underbrace{\left(M\left(R_\nu^*\right) - m\left(R_\nu^*\right)\right)}_{\leq \epsilon \text{ nach } (6)} \left|R_\nu^*\right|}_{\leq \epsilon |B| \text{ nach } (7)} \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{R_\nu^* \in M^*} \underbrace{\left(M\left(R_\nu^*\right) - m\left(R_\nu^*\right)\right)}_{\leq 2K} \left|R_\nu^*\right|}_{\leq 2K \cdot \epsilon \text{ nach } (4)} \\
&\leq \epsilon\left(|B| + 2K\right).
\end{aligned}$$

Mit Lemma (11.6) folgt daher die Behauptung. □

Satz 11.16 (Substitutionsregel für mehrdimensionale Integration)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv und es gelte $det(Dg(t)) > 0$ für alle $t \in U$ oder $det(Dg(t)) < 0$ für alle $t \in U$. Ferner sei T eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge von U. Dann ist $g(T)$ Jordan-messbar und für stetige $f: g(T) \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{g(T)} f(x)dx = \int_T f\left(g(t)\right) \cdot \left| det\left(Dg(t)\right)\right| dt.$$

Beweis. Siehe zum Beispiel Farwig: Skript zu Analysis II oder H. Heuser: Lehrbuch der Analysis II, Teubner. □

Definition 11.17. *Ein (zweidimensionaler)* ***Normalbereich*** *bzgl. der x-Achse ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ der Form*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\},$$

wobei $a \le B$ und $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi \le \psi$ sind.

Satz 11.18 (Satz von Green (George Green 1793 - 1841) oder Satz von Gauß in der Ebene)**.** *Sei B ein Normalbereich in $\mathbb{R}^2$ (und damit Jordan-messbar) und $\gamma = \partial B$ der positiv orientierte Rand von B. Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \supseteq B$, so gilt*

$$\int_B \operatorname{rot} F(x)dx = \int_\gamma F(x) \cdot dx,$$

wobei

$$\operatorname{rot} F(x) := \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x).$$

Der Satz von Green bestimmt also das Integral von $\operatorname{rot} F$ über B als das Integral von F über dem Rand γ von B. (vergleiche den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, wo das Integral über $B = [a,b]$ von F' durch F auf dem Rand $\{a,b\}$ von $[a,b]$ ausgedrückt wurde)