Lösungsbeispiele zur Klausur „Einführung in die Stochastik“
am 27.08.2010

Aufgabe 1

Es gilt $P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A)} = P(B \cap C \mid A)$. Man beachte, dass im Nenner $P(A \cap B) > 0$ (Voraussetzung) und somit auch $P(A) > 0$.

Aufgabe 2

Wir beschreiben die Ergebnisse der Ziehungen durch Zufallsvariablen X_n mit Werten in $\{0, 1, ..., n\}$, $n \geq 1$. Hierbei steht 0 für die weiße Kugel, und $1, ..., n$ für die n schwarzen Kugeln im n-ten Schritt (sofern dieser erreicht wird). Die Forderung des zufälligen Ziehens legt nahe, dass jede in der Urne befindliche Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird, daher setzen wir eine Gleichverteilung voraus. Damit X_n auch definiert ist, wenn der n-te Schritt nicht erreicht wird, ist es nützlich, das Spiel gedanklich durch Ziehungen auch nach Spielende (jeweils mit Zurücklegen der gezogenen Kugel und Hinzufügen einer schwarzen Kugel) fortzusetzen. Dabei kann man die Gleichverteilung, unabhängig von der Vergangenheit, auch für diese hypothetischen Ziehungen zugrundelegen.

Wir betrachten also eine Folge von unabhängigen auf $\{0, 1, ..., n\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen X_n, $n \geq 1$, definiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Solches existiert nach Vorlesung (Satz 14.8, Bem. 6.7, Kap. 3).

Das Ereignis, dass irgendwann die weiße Kugel gezogen wird, ist

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 0\} \; .$$

Gesucht ist also $P(A)$.

Lösung: Zunächst gilt für jedes $N \geq 1$

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P((\textstyle\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 0\})^c) = P(\textstyle\bigcap_{n \geq 1} (\{X_n = 0\}^c)) \\ &\leq P(X_1 \neq 0, ..., X_N \neq 0) \underset{\text{Unabh.}}{=} P(X_1 \neq 0) \cdot ... \cdot P(X_N \neq 0) \\ &\underset{\text{Gleichvert.}}{=} \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{1+2} \cdot ... \cdot \frac{N}{1+N} = \frac{1}{1+N} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck kann beliebig klein gemacht werden durch Wahl hinreichend großer

N, es gilt $\frac{1}{1+N} \to 0$. Also folgt $P(A^c) = 0$ und somit $P(A) = 1$.

Also wird mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann die weiße Kugel gezogen.

Aufgabe 3

X und X unkorreliert $\Rightarrow \operatorname{Cov}(X, X) = 0 \Rightarrow V(X) = 0$

$\underset{15.6}{\Rightarrow}$ $P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) \leq \frac{V(X)}{(1/n)^2} = 0$ für alle $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $|X - E(X)| < \frac{1}{n}$ f. s. für alle $n \geq 1$ $\underset{16.3}{\Rightarrow}$ $|X - E(X)| < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ f. s.

$\Rightarrow$ $X = E(X)$ f. s. $\Rightarrow$ $X = c$ f. s. für ein $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Für jede reellwertige Zufallsvariable Y und Mengen $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$P(X \in A, Y \in B) = E(1_{\{X \in A\}} \cdot 1_{\{Y \in B\}}) \underset{16.6}{=} E(1_{\{c \in A\}} \cdot 1_{\{Y \in B\}})$$

$$\underset{10.4(\mathrm{d})}{=} 1_{\{c \in A\}} \cdot E(1_{\{Y \in B\}}) = E(1_{\{c \in A\}}) \cdot E(1_{\{Y \in B\}}) \underset{16.6}{=} E(1_{\{X \in A\}}) \cdot E(1_{\{Y \in B\}})$$

$$= P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

$\underset{13.5}{\Rightarrow}$ Für jede reellwertige Zufallsvariable Y gilt: X, Y sind unabhängig.

(Die Stellenangaben beziehen sich auf das Online-Skript.)

Aufgabe 4

Es gilt $E(X_i) = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$ und $V(X_i) = E((X_i - 0)^2) = E(1) = 1$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \tfrac{1}{\sqrt{n}} Y_n \leq b) = \lim_{n\to\infty} P(\tfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b) - P(\tfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \leq a)$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

nach dem zentralen Grenzwertsatz. Hierbei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Aufgabe 5

Für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt

(a) $E_\vartheta(X) = \int_{\vartheta-1}^{\vartheta+1} x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{x=\vartheta-1}^{\vartheta+1} = \frac{(\vartheta+1)^2 - (\vartheta-1)^2}{4} = \frac{2\vartheta \cdot 2}{4} = \vartheta$,

(b) $P_\vartheta([X - (1-\alpha), X + (1-\alpha)] \ni \vartheta) = P_\vartheta(\vartheta - (1-\alpha) \leq X \leq \vartheta + (1-\alpha))$

$$= \int_{\vartheta-(1-\alpha)}^{\vartheta+(1-\alpha)} \frac{1}{2}\, dx = \frac{2(1-\alpha)}{2} \geq 1 - \alpha \ .$$