§9 Fourier-Transformation

Definition. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mu = \mu_n$ das Lebesgue-Maß des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

die Fouriertransformierte *von f. Dabei bezeichnet $x \cdot \xi$ das Skalarprodukt der* Ortsvariablen $x \in \mathbb{R}^n$ *mit der* Phasenvariablen $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Mit dem umnormierten Maß*

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\mathrm{d}\mu$$

schreibt man auch kurz

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Analog definiert man die Faltung $*_\lambda$ durch

$$f *_\lambda g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} f * g(x).$$

Wir beachten, dass der Satz von Fubini und die Substitutionsregel in unveränderter Form mit dem Maß λ gelten.

Lemma 9.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$, $0 \neq \delta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) *Ist $g(x) = f(x)\,e^{ix\cdot\alpha}$, so ist $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$.*

(2) *Ist $g(x) = f(x-\alpha)$, so ist $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,e^{-i\alpha\cdot\xi}$.*

(3) *Ist $g(x) = \overline{f(-x)}$, so ist $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.*

(4) *Ist $g(x) = f(\frac{x}{\delta})$, so ist $\hat{g}(\xi) = |\delta|^n\,\hat{f}(\delta\xi)$.*

Beweis. Wir zeigen nur die Aussagen (2) und (4). Mit der Substitutionsregel folgt

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\alpha)\,e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,e^{-i(y+\alpha)\cdot\xi}\,\mathrm{d}\lambda(y) = e^{-i\alpha\cdot\xi}\hat{f}(\xi),$$
$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\lambda(x) = |\delta|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,e^{-iy\cdot\delta\xi}\,\mathrm{d}\lambda(y) = |\delta|^n \hat{f}(\delta\xi).$$

□

Satz 9.2. *Die Fourier-Transformation ist eine stetige, lineare Abbildung*

$$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^0(\mathbb{R}^n) :\ u(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty\}$ bezeichnet.

Außerdem ist $\mathcal{F}_1$ ein Algebrenhomomorphismus *von $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *_\lambda)$ nach $(C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$, d.h., $\mathcal{F}_1$ erfüllt zusätzlich*

$$\mathcal{F}_1(f *_\lambda g) = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Hilfe dreier Behauptungen.

Behauptung 1. *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig.*

Beweis von Beh. 1. Seien $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi_k \to \xi$ gegeben. Aus der Ungleichung

$$\big|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_k)\big| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\big|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix\cdot\xi_k}\big| \,\mathrm{d}\lambda(x)$$

folgt wegen

$$\begin{aligned} e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix\cdot\xi_k} &\longrightarrow 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und für } k \to \infty, \\ |f(x)|\,\big|\,e^{-ix\cdot\xi} - e^{-ix\cdot\xi_k}\big| &\le 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue die Konvergenz $\hat{f}(\xi_k) \to \hat{f}(\xi)$. ∎

Behauptung 2. *Es gilt $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.*

Beweis von Beh. 2. Ohne Einschränkung sei $n = 1$. Da $e^{-\pi i} = -1$ ist, gilt die Identität

$$\hat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi(x+\pi/\xi)} \,\mathrm{d}\lambda(x) = -\int_{\mathbb{R}} f\Big(x - \frac{\pi}{\xi}\Big)\, e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \big|\hat{f}(\xi)\big| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big(f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\xi}\Big)\Big)\, e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}\lambda(x)\right| \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\|f - f\Big(\cdot - \frac{\pi}{\xi}\Big)\right\|_1 \quad \longrightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \to \infty \end{aligned}$$

nach Korollar 7.9. ∎

Versieht man nun $C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm, so ist $(C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Zusammen mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n) \times C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n) &\to C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n), \\ (u, v) &\mapsto u \cdot v, \end{aligned}$$

$(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x)$, ist $C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ dann sogar eine Banachalgebra, d.h., es gilt

$$\|u \cdot v\|_\infty \le \|u\|_\infty \cdot \|v\|_\infty.$$

Behauptung 3. *Es gilt* $\widehat{f *_\lambda g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Beweis von Beh. 3. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt nach Satz 8.1 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und folglich auch $f *_\lambda g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Sätze von Fubini und von Tonelli liefern dann die gewünschte Identität

$$\begin{aligned}\widehat{f *_\lambda g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}\lambda(y)\Big)\, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, e^{-i\xi\cdot y}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, e^{-i\xi\cdot(x-y)}\, \mathrm{d}\lambda(x)\Big)\, \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

■

□

Satz 9.3. (1) *Ist* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und zusätzlich* $|x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *so ist* $\hat{f}$ *in* ξ *differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = -i\, \widehat{x_k f(x)}(\xi), \quad 1 \le k \le n.$$

(2) *Ist* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *so gilt*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi), \quad 1 \le k \le n.$$

Insbesondere ist $\hat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-1})$ *für* $|\xi| \to \infty$.

Beweis. (1) Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(\hat{f}(\xi + he_k) - \hat{f}(\xi)\big) &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\big(e^{-ix\cdot(\xi+he_k)} - e^{-ix\cdot\xi}\big)\, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x_k, h)\, \mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

Dabei besitzt die Funktion $\varphi(x_k, h) = \frac{1}{h}(e^{-ix_k h} - 1)$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned}|\varphi(x_k, h)| &= \Big|\frac{1}{h}(e^{-ix_k h} - 1)\Big| \le |x_k| \quad \text{für alle } 0 \ne h, x_k \in \mathbb{R}, \\ \varphi(x_k, h) &\longrightarrow -ix_k \quad \text{für } h \to 0 \text{ und } x_k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nach dem Satz von Lebesgue

$$\frac{1}{h}\big(\hat{f}(\xi + he_k) - \hat{f}(\xi)\big) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-ix_k)\, e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(x) = -i\, \widehat{x_k f(x)}(\xi).$$

(2) Wegen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(0)} |f(y)|\,\mathrm{d}o(y) \right) \mathrm{d}r < \infty.$$

Dann gibt es eine Folge (r_j) mit $r_j \nearrow \infty$, so dass

$$\int_{\partial B_{r_j}(0)} |f(y)|\,\mathrm{d}o(y) \longrightarrow 0 \quad \text{für } j \to \infty.$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\,\widehat{\partial_k f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty} \int_{B_{r_j}(0)} \partial_k f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{j\to\infty} \Bigg(-(-i)\,\xi_k \int_{B_{r_j}(0)} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad + \int_{\partial B_{r_j}(0)} f(y)\, e^{-iy\cdot\xi} \frac{y_k}{|y|}\,\mathrm{d}o(y) \Bigg) \\
&= \lim_{j\to\infty} i\,\xi_k \int_{B_{r_j}(0)} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x + 0 \\
&= i\,\xi_k \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = i\,\xi_k\,(2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Für $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ist $\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} = f(\xi)$.

Zm Beweis sei zuerst $n = 1$. Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+is)^2/2}\,\mathrm{d}x \right) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (x+is)\, e^{-(x+is)^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{-(x+is)^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots = \lim_{r\to 0} \int_{-r}^{r} \cdots$ beachten. Daraus folgt, dass die Abbildung $s \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+is)^2/2}\,\mathrm{d}x$ konstant in s ist, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+is)^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}\,\mathrm{d}x \cdot e^{-\xi^2/2} = e^{-\xi^2/2}.$$

Sei nun $n > 1$. Mit der Bezeichnung $f_j(x_j) = e^{-x_j^2/2}$ folgt aus dem Fall $n = 1$ und den Eigenschaften der e-Funktion die Identität

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdot \ldots \cdot \hat{f}_n(\xi_n) = e^{-\xi_1^2/2} \cdot \ldots \cdot e^{-\xi_n^2/2} = e^{-|\xi|^2/2}.$$

Satz 9.4 (Fourier'scher Umkehrsatz). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und zusätzlich $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird die* inverse Fourier-Transformierte *g von $\hat{f}$ durch*

$$g(x) = (\hat{f})^\vee = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{+ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi)$$

definiert, und es gilt $g \in C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ sowie $f = g$ fast überall in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 9.5. *Für $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{h}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, h(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Beweis. Der Beweis folgt mit dem Satz von Fubini. □

Beweis von Satz 9.4. Sei $g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon^2|x|^2/2}$. Aus Lemma 9.1(4) und dem obigen Beispiel erhalten wir die Fourier-Transformierte von g_ε, nämlich

$$\widehat{g_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, e^{-|\xi|^2/2\varepsilon^2}.$$

Dann folgt aus Lemma 9.5 mit $h = g_\varepsilon$ und aus Lemma 9.1(2)

$$\begin{aligned}
\big(f *_\lambda \widehat{g_\varepsilon}\big)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)\, \widehat{g_\varepsilon}(x)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)\, \widehat{g_\varepsilon}(-x)\, \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t+x)\, \widehat{g_\varepsilon}(x)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f(t+\cdot)}(\xi)\, g_\varepsilon(\xi)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot t} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot t}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) = g(t),
\end{aligned}$$

wobei $g \in C^0_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ ist; der obige Grenzübergang gilt nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, da $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Andererseits ist

$$\frac{\widehat{g_\varepsilon}(\xi)}{(2\pi)^{n/2}} = \varrho_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho\Big(\frac{\xi}{\varepsilon}\Big) \quad \text{mit } \varrho(\xi) = \frac{e^{-|\xi|^2/2}}{(2\pi)^{n/2}},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_\varepsilon(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 1 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

(vergleiche mit den Friedrichs'schen Glättungskernen in Satz 8.4). Deshalb folgt

$$f *_\lambda \widehat{g_\varepsilon} = f * \widehat{\rho_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n)$$

und somit nach dem Satz von Fischer-Riesz (für eine Teilfolge) auch

$$f *_\lambda \widehat{g_\varepsilon}(t) \longrightarrow f(t) \quad t\text{-fast überall.}$$

Also erhalten wir $f = g$ fast überall. □

Korollar 9.6 (Eindeutigkeit)**.** *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} = \hat{g}$ ξ-fast überall. Dann ist $f = g$ x-fast überall.*

Beweis. Sei $h = f - g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach der Voraussetzung ist $\hat{h} = 0$ fast überall, also $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aus dem Satz 9.4 folgt $h = (\hat{h})^\vee = 0^\vee = 0$ fast überall. □

Lemma 9.7. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*

Beweis. Nach Lemma 9.5 gilt für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Identität $\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\,\mathrm{d}x$.

(1) Sei zuerst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir nehmen nun $g = \overline{\hat{f}} = (\overline{f})^\vee$, woraus zuerst einmal nur formal $\hat{g} = \overline{f}$ folgt. Tatsächlich gilt wegen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 9.3(2) $|\xi|^{2n}\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und auch $(1 + |\xi|^{2n})\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, woraus wir $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erhalten und die Gleichung $\hat{g} = \overline{f}$ mit Satz 9.4 rechtfertigen können.

Jetzt folgt mit Lemma 9.5

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(2) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ und in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Wir bemerken, dass die Folge (f_k) als $f_k = \varrho_\varepsilon * (f\chi_{B_k(0)})$ mit $\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho\,\mathrm{d}x = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{k}$, konstruiert werden kann.

Die obige Konvergenz liefert $\|f_k\|_2 \longrightarrow \|f\|_2$. Außerdem ist (f_k) eine Cauchy-Folge in L^2, so dass nach (1) auch $(\widehat{f_k})$ eine Cauchy-Folge in L^2 ist. Deshalb existiert ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widehat{f_k} \longrightarrow g \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|\widehat{f_k}\|_2 \longrightarrow \|g\|_2.$$

Andererseits folgt aus $f_k \xrightarrow{L^1} f$ punktweise für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{f_k}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,e^{-i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}\lambda(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \hat{f}(\xi).$$

Also gilt nach dem Satz von Fischer-Riesz $g = \hat{f}$ ξ-fast überall und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|g\|_2 \longleftarrow \|\widehat{f_k}\|_2 = \|f_k\|_2 \longrightarrow \|f\|_2.$$

□

Hauptsatz 9.8. *Es gibt eine bijektive, stetige, lineare Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f},$$

die sog. L^2-Fourier-Transformation*, mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathcal{F}$ ist eine stetige Fortsetzung der L^1-Fourier-Transformation $\mathcal{F}_1$ von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, genauer: $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_1 f$ fast überall für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(1') *Ebenso ist die Inverse $\mathcal{F}^{-1}$ von $\mathcal{F}$ eine stetige Fortsetzung von $\mathcal{F}_1^{-1}|_{L^1 \cap L^2}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(2) (**Satz von Plancherel**) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2.$$

$\mathcal{F}$ ist also ein isometrischer Isomorphismus *auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(3) *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die* Formel von Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, \overline{g}\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \overline{\hat{g}}\, \mathrm{d}\lambda.$$

(4) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $R > 0$ sei*

$$\varphi_R(\xi) = \int_{B_R(0)} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(x), \quad \psi_R(x) = \int_{B_R(0)} \hat{f}(\xi)\, e^{+ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi).$$

Dann gilt (φ_R), $(\psi_R) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\varphi_R \longrightarrow \hat{f}, \quad \psi_R \longrightarrow f \quad \text{in } \|\cdot\|_2 \text{ für } R \to \infty.$$

Beweis. **Zur Definition von $\mathcal{F}$:**
Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, gibt es eine Folge $(f_k) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{in } \|\cdot\|_2.$$

Wegen Lemma 9.7 gilt

$$\|\widehat{f_k} - \widehat{f_l}\|_2 = \|f_k - f_l\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{für } k, l \to \infty.$$

Also ist $(\widehat{f_k})$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, gibt es ein Element in $L^2(\mathbb{R}^n)$, bezeichnet mit $\hat{f}$, mit

$$\widehat{f_k} \longrightarrow \hat{f} \quad \text{in } \|\cdot\|_2.$$

Dann gilt auch $\|\widehat{f_k}\|_2 \to \|\hat{f}\|_2$. Da außerdem nach Lemma 9.7

$$\|\widehat{f_k}\|_2 = \|f_k\|_2 \longrightarrow \|f\|_2$$

gilt, folgt die Identität $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Mit dieser Methode definieren wir die Fortsetzung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}_1|_{L^1 \cap L^2}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Fortsetzung ist dadurch *wohldefiniert*, denn es gilt:

Sei $(g_k) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_k \to f$ in $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$g_k - f_k \longrightarrow 0 \quad \text{in } \|\cdot\|_2$$

und wegen Lemma 9.7 auch $\widehat{g_k} - \widehat{f_k} \to 0$ in $\|\cdot\|_2$. Daraus folgt

$$\widehat{g_k} \longrightarrow \hat{f} \quad \text{in } \|\cdot\|_2.$$

Analog wird mit Hilfe von $\mathcal{F}_1^{-1}|_{L^1\cap L^2}$ eine eindeutige Fortsetzung

$$\mathcal{F}^{-1} = {}^\vee \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \|\check{f}\|_2 \text{ für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

definiert.

Behauptung. *Es gilt* $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$ *und* $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Der Operator* $\mathcal{F}^{-1}$ *ist also tatsächlich die Inverse zu* $\mathcal{F}$.

Beweis der Beh. Sei wieder $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist nach Satz 9.3(2) $\hat{f} = \mathcal{F}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Satz 9.4 liefert

$$f = \mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_1 f = \mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f,$$

wobei $\mathcal{F}_1 f = \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, erhalten wir wegen der L^2-Stetigkeit des Operators $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ auch $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Beweis von (4). Wir zeigen nur die Aussage für φ_R. Für ψ_R ist der Beweis analog. Für $R > 0$ sei $f_R = f\chi_{B_R(0)}$. Dann ist $f_R \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $f_R \to f$ in $\|\cdot\|_2$ für $R \to \infty$. Außerdem liegt f_R in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da $\operatorname{supp} f_R \subset \overline{B_R(0)}$ kompakt ist. Also haben wir $f_R \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und Lemma 9.7 liefert $\varphi_R = \widehat{f_R} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit Hilfe des obigen Arguments zur Wohldefiniertheit von $\mathcal{F}$ folgt

$$\varphi_R = \widehat{f_R} \longrightarrow \hat{f} \quad \text{in } \|\cdot\|_2 \text{ für } R \to \infty.$$

∎

Beweis von (3). Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Aus der Identität

$$4f\bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$$

folgt mit dem Satz von Plancherel

$$\begin{aligned} 4\int_{\mathbb{R}^n} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}x &= \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2 \\ &= \|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|_2^2 + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|_2^2 - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|_2^2 \\ &= 4\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

∎

□

Korollar 9.9. *Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und zusätzlich $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \quad x\text{-}\textit{fast überall.}$$

Beweis. Nach Satz 9.8(4) gilt für $R \to \infty$

$$\int_{B_R(0)} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \longrightarrow f(x) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } R \to \infty.$$

Nach dem Satz von Fischer-Riesz gibt es eine Folge (R_k) mit $R_k \nearrow \infty$ für $k \to \infty$, so dass

$$\int\limits_{B_{R_k}(0)} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \longrightarrow f(x) \quad \text{fast überall}$$

gilt. Außerdem haben wir wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Konvergenz

$$\int\limits_{B_{R_k}(0)} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda(\xi).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$