§12 Der Gaußsche Integralsatz

Das Ziel dieses Abschnitts ist die folgende zentrale Aussage der mehrdimensionalen Analysis und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen: Für geeignete beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Vektorfelder $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma;$$

dabei ist $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ der äußere Normaleneinheitsvektor. Dieses Ergebnis beinhaltet insbesondere auch die Formel der partiellen Integration im $\mathbb{R}^n$ und den Greenschen Satz im $\mathbb{R}^2$.

12.1 Gebiete mit C^1-Rand

Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, d.h., Ω ist offen und zusammenhängend. Man sagt, Ω habe einen Rand $\partial\Omega$* vom Typ C^1 *(C^1-Rand, $\partial\Omega \in C^1$), falls $\Omega = \overline{\Omega}^\circ$ gilt und falls es zu jedem Randpunkt $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine C^1-Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ gibt mit*

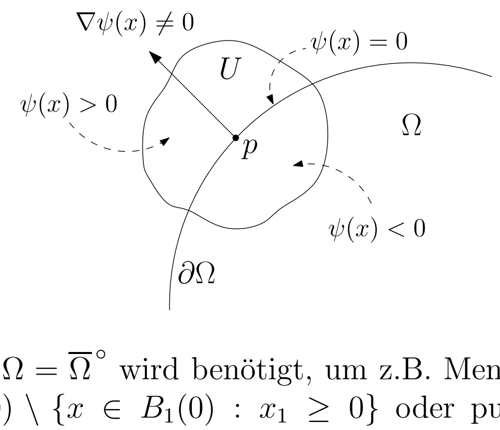
(i) $\overline{\Omega} \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$,

(ii) $\nabla\psi(x) \neq 0$ *für alle $x \in U$.*

Bemerkung. (1) Ist $\partial\Omega$ vom Typ C^1, so sieht man leicht, dass

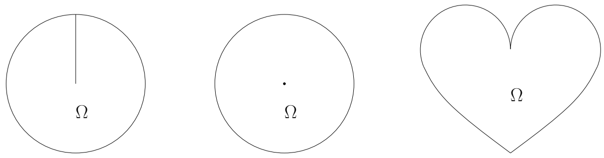
$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap U &= \{x \in U : \psi(x) = 0\}, \\ \Omega \cap U &= \{x \in U : \psi(x) < 0\}, \\ U \setminus \overline{\Omega} &= \{x \in U : \psi(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ (siehe Satz 10.1).

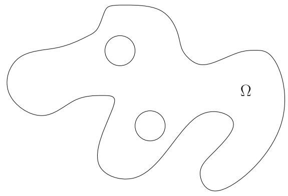


(2) Die Bedingung $\Omega = \overline{\Omega}^\circ$ wird benötigt, um z.B. Mengen mit „Schnitt“ wie z.B. $\Omega = B_1(0) \setminus \{x \in B_1(0) : x_1 \geq 0\}$ oder punktierte Kugeln $\Omega = B_1(0)\setminus\{0\}$ auszuschließen. Unter der Bedingung $\Omega = \overline{\Omega}^\circ$ gilt stets $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$.

Beispiel. Die folgenden Mengen sind keine C^1-Gebiete (siehe Bemerkung):



Dagegen ist die folgende Menge ein C^1-Gebiet:



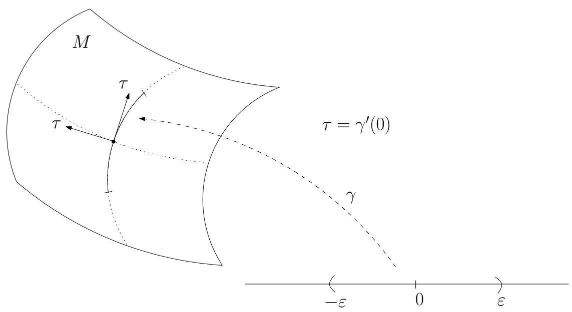
Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.*

(1) *Ein Vektor $\tau \in \mathbb{R}^n$ heißt ein* Tangentialvektor *in p an M, falls ein C^1-Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = \tau$ existiert. Ferner sei*

$$T_p(M) = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \tau \textit{ ist Tangentialvektor in } p \textit{ an } M\}$$

der Tangentialraum *von M in p.*

(2) *Ein Vektor $\nu \perp T_p(M)$ heißt* Normalenvektor *an M in p.*



Lemma 12.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und sei (φ, U) eine Karte von M. Dann gilt*

$$T_{\varphi(x)}(M) = \operatorname{Bild} D\varphi(x) \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Insbesondere ist $\dim T_{\varphi(x)}(M) = k$ *und folglich*

$$\dim \{\nu \in \mathbb{R}^n : \nu \textit{ ist Normalenvektor an } M \textit{ in } \varphi(x)\} = n - k.$$

Beweis. Wie teilen den Beweis in zwei Teile auf.

Behauptung 1. *Es gilt* $\operatorname{Bild} D\varphi(x) \subset T_{\varphi(x)}(M)$.

Beweis von Beh. 1. Sei $v \in \mathbb{R}^k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad \gamma(t) := \varphi(x + tv),$$

ein Weg in M mit $\gamma(0) = \varphi(x)$ und $\gamma'(0) = D\varphi(x) \cdot v$ ist. Wir erhalten also

$$D\varphi(x) \cdot v \subset T_{\varphi(x)}(M) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

■

Behauptung 2. *Es gilt* $T_{\varphi(x)}(M) \subset \operatorname{Bild} D\varphi(x)$.

Beweis von Beh. 2. Für einen Weg γ in $M \cap \varphi(U)$ mit $\gamma(0) = \varphi(x)$ sei $\tau = \gamma'(0)$. Dann gilt lokal $\gamma = \varphi \circ \left(\varphi^{-1} \circ \gamma\right)$, wobei $\varphi^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ vom Typ C^1 ist (ohne Beweis, vgl. Beweis von Satz 10.3 zum Kartenwechsel). Daraus folgt

$$\tau = \gamma'(0) = D\varphi(x) \cdot \left(\varphi^{-1} \circ \gamma\right)'(0) \in \operatorname{Bild} D\varphi(x).$$

■

Außerdem gilt nach Definition $\dim(\operatorname{Bild} D\varphi(x)) = \operatorname{rang} D\varphi(x) = k$, da φ eine Karte ist. □

Beispiel. (1) Der Rand $\partial\Omega$ eines beschränkten C^1-Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei lokal (in der Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ eines Punktes $p \in \partial\Omega$) gegeben als Graph einer C^1-Funktion $h : V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen; d.h., es gilt

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap U &= \{x = (x', h(x')) : x' \in V\}, \\ \Omega \cap U &= \{x = (x', x_n) : x_n < h(x'), x' \in V\} \cap U. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\psi(x', x_n) = x_n - h(x')$ auf $U = V \times (a, b)$ eine geeignete Funktion entsprechend der Definition des C^1-Gebietes ist.

Mit der oben genannten lokalen Beschreibung ist $\varphi(x') = (x', h(x'))$, $x' \in V$, eine Karte von $\partial\Omega$. Ferner bilden die $n-1$ Spaltenvektoren

$$\tau_1 = (1, 0, \ldots, 0, \partial_1 h(x'))^T, \; \ldots, \; \tau_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, \partial_{n-1} h(x'))^T$$

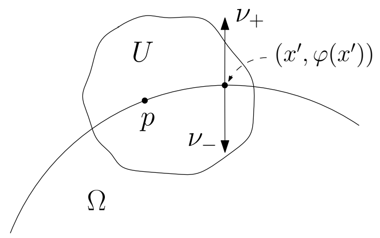
eine Basis des Tangentialraums $T_{\varphi(x')}(M)$, und

$$\nu_\pm = \pm \frac{(-\nabla' h(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla' h(x')|^2}},$$

$\nabla' := (\partial_1, \ldots, \partial_{n-1})$, sind die (einzigen) Normaleneinheitsvektoren an $\partial\Omega$ in $\varphi(x')$. Dabei ist $\nu = \nu(\varphi(x')) = \nu_+$ der *äußere* Normalen(einheits)vektor, denn es gilt

$$\varphi(x') + t\nu(\varphi(x')) \notin \overline{\Omega} \quad \text{und} \quad \varphi(x') - t\nu(\varphi(x')) \in \Omega \quad \text{für } t \in (0, \varepsilon)$$

mit $\varepsilon > 0$ genügend klein.



(2) Im Fall $n = 3$ erhält man zwei linear unabhängige Tangentialvektoren

$$\tau_1 = (1, 0, \partial_1 h)^T \quad \text{und} \quad \tau_2 = (0, 1, \partial_2 h)^T.$$

Wegen $\tau_1 \wedge \tau_2 = (-\partial_1 h, -\partial_2 h, 1)^T$ ist

$$\nu = \frac{\tau_1 \wedge \tau_2}{|\tau_1 \wedge \tau_2|}$$

der äußere Normalenvektor.

Lemma 12.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Dann gibt es zu jedem Randpunkt $p \in \partial\Omega$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall (a, b) sowie eine C^1-Funktion $h : V \to (a, b)$, so dass (ggf. nach Umnummerierung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$) gilt $p \in V \times (a, b)$ und*

$$\partial\Omega \cap (V \times (a, b)) = \{(x', h(x')) : x' \in V\}.$$

Insbesondere ist $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, wobei $\nu(x)$ den äußeren Normalenvektor in $x \in \partial\Omega$ bezeichnet, stetig.

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$, und gelte mit einer C^1-Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$

$$\Omega \cap U = \{x \in U : \psi(x) < 0\} \quad \text{und} \quad \partial\Omega \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$$

sowie $\nabla\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Ohne Einschränkung gelte $\partial_n\psi(p) > 0$ und sogar $\partial_n\psi(x) > 0$ für alle $x \in U$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine offene Teilmenge $V \times (a, b)$ von U und eine C^1-Funktion $h : V \to (a, b)$ mit der Eigenschaft:

$$\psi(x) = 0 \text{ für alle } x \in V \times (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad x = (x', h(x')) \text{ für alle } x \in V \times (a, b).$$

Daraus folgt nun die Behauptung. □

12.2 Der Gaußsche Satz

Hauptsatz 12.3 (Satz von Gauß). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet mit äußerem Normalenvektor $\nu = \nu(x)$ auf $\partial\Omega$ und sei $f \in C^1(\Omega)^n \cap C^0(\overline{\Omega})^n$ ein Vektorfeld mit der Eigenschaft* $\operatorname{div} f \in L^1(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma.$$

Bevor wir den Satz von Gauß beweisen, formulieren wir noch einige wichtige und nützliche Lemmata.

Lemma 12.4 (Zerlegung der Eins). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Dann gibt es offene Rechtecke $U_1', U_1, U_2', U_2, \dots, U_m', U_m$ mit*

$$\overline{U_1'} \subset U_1, \dots, \overline{U_m'} \subset U_m \quad \textit{und} \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m U_i'$$

sowie offene Mengen U_0', U_0 mit

$$\overline{U_0'} \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset \Omega \quad \textit{und} \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^m U_i' \cup U_0'.$$

Zu dieser Überdeckung gibt es Funktionen $0 \le \eta_i \in C_0^\infty(U_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$, mit

$$\eta_i > 0 \;\; \textit{auf} \;\; \overline{U_i'} \quad \textit{und} \quad \sum_{i=0}^m \eta_i = 1 \;\; \textit{auf} \;\; \overline{\Omega}.$$

Beweis. Nach Lemma 12.2 gibt es zu jedem $p \in \partial\Omega$ ein offenes Rechteckgebiet $U_p = V_p \times (a_p, b_p)$, so dass $\partial\Omega \cap U_p$ in einem geeigneten Koordinatensystem als Graph einer auf V_p definierten C^1-Funktion geschrieben werden kann.

Sei U_p' das zu U_p konzentrische Rechteckgebiet mit halben Kantenlängen. Dann ist $\overline{U_p'} \subset U_p$. Außerdem ist $\partial\Omega \subset \bigcup_{p \in \partial\Omega} U_p'$. Da der Rand $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es sogar endlich viele $U_i' = U_{p_i}'$, $i = 1, \dots, m$, mit

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m U_i'.$$

Außerdem finden wir offene Mengen $U_0' \subset U_0 \subset \Omega$ mit der Eigenschaft

$$\overline{\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i'} \subset U_0' \subset \overline{U_0'} \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset \Omega.$$

Dann gilt

$$\overline{\Omega} \subset U_0' \cup \bigcup_{i=1}^m U_i'.$$

Sei nun $0 \le \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, \mathrm{d}x = 1$ ein Friedrichs'scher Glättungskern und $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$. Zur Konstruktion der Funktionen η_i sei $\eta'_i = \chi_{U_i'}$ und $\eta_i = \eta'_i * \rho_\varepsilon$, $i = 0, 1, \dots, m$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt wird, dass $\operatorname{supp} \eta_i \subset U_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, gilt. Dann erhalten wir

$$0 < \eta_i \;\text{ auf }\; \overline{U_i'}, \quad \eta_i \in C_0^\infty(U_i) \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^m \eta_i(x) > 0 \;\text{ für alle } x \in \overline{\Omega},$$

da $\eta_i > 0$ in einer Umgebung von $\overline{U_i}$ für jedes $0 \le i \le m$ ist. Folglich sind

$$\widehat{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\sum_{j=0}^m \eta_j}, \quad 0 \le i \le m,$$

die gesuchten Funktionen in der Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U_i\}$ von $\overline{\Omega}$. □

Lemma 12.5. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für $\varphi \in C_0^1(U)$ und $\psi \in C^1(U)$ sowie $1 \le j \le n$ die Identität*

$$\int_U (\partial_j \varphi)\psi \,\mathrm{d}x = -\int_U \varphi\, \partial_j \psi \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Die offene Menge U darf durch $U = \mathbb{R}^n$ ersetzt werden, da man φ durch Null auf $\mathbb{R}^n \backslash U$ zu einer Funktion $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen kann. Dann folgt mit dem Satz von Fubini sowie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (hier im Fall $j = n$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n(\varphi\psi)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_n(\varphi\psi)\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x' = 0.$$

Dies liefert die Behauptung. □

Mit $\psi = 1$ und nach Summation über $j = 1, \dots, n$ folgt aus Lemma 12.5 der Gaußsche Satz für den Spezialfall $f \in C_0^1(\Omega)^n$.

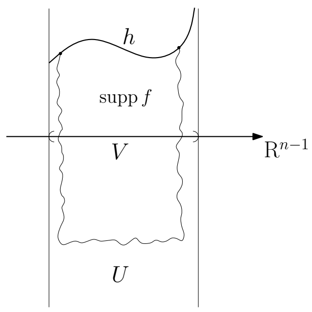
Lemma 12.6. *Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein offenes Rechteck, $h \in C^1(V)$ und*

$$U = \{x = (x', x_n) : x_n < h(x'), x' \in V\}.$$

Ferner sei $f \in C^0(\overline{U})^n \cap C^1(U)^n$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{div} f \in L^1(U)$ und kompaktem Träger in $U \cup G(h)$, wobei $G(h) \subset \mathbb{R}^n$ den Graphen von h bezeichnet. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei das Oberflächenintegral von $f \cdot \nu$ nur auf einer kompakten Teilmenge von $G(h)$ benötigt wird.



Beweis. Im ersten Teil des Beweises ersetzen wir die Menge U durch die um $\varepsilon > 0$ nach unten verschobene Menge

$$U_\varepsilon = \{x = (x', x_n) \in U : x_n < h(x') - \varepsilon\}.$$

Nach dem Satz von Fubini gilt dann

$$\int_{U_\varepsilon} \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_V \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\varepsilon} \partial_k f_k(x', x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x' =: \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

Wir wollen nun die Integrale I_k, $k = 1, \dots, n$, berechnen.

Sei zuerst $1 \le k \le n-1$. Mit Hilfe der Kettenregel sowie Methoden der Analysis I zeigt man die Gleichung

$$\partial_k \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\varepsilon} f_k(x', x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) = \int_{-\infty}^{h(x')-\varepsilon} \partial_k f_k(x', x_n) \, \mathrm{d}x_n + f_k(x', h(x') - \varepsilon) \, \partial_k h(x').$$

Da der Träger von f kompakt in $U \cup G(h)$ liegt, erhalten wir mit Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} I_k &= \int_V \partial_k \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\varepsilon} f_k(x', x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x' - \int_V f_k(x', h(x') - \varepsilon) \, \partial_k h(x') \, \mathrm{d}x' \\ &= - \int_V f_k(x', h(x') - \varepsilon) \, \partial_k h(x') \, \mathrm{d}x'. \end{aligned}$$

Für I_n gilt wiederum nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$I_n = \int_V f_n(x', h(x') - \varepsilon) \, \mathrm{d}x'.$$

Insgesamt erhalten wir mit dem äußerem Normalenvektor

$$\nu(x', h(x') - \varepsilon) = \frac{(-\nabla' h, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla' h|^2}}$$

auf $\partial U_\varepsilon \cap \operatorname{supp} f$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \int_{U_\varepsilon} \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x &= \int_V f(x', h(x') - \varepsilon) \cdot (-\partial_1 h, \dots, -\partial_{n-1} h, 1) \, \mathrm{d}x' \\ &= \int_V f(x', h(x') - \varepsilon) \cdot \nu(x', h(x') - \varepsilon) \sqrt{1 + |\nabla' h|^2} \, \mathrm{d}x' \\ &= \int_{\partial U_\varepsilon} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma \,. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0_+$. Tatsächlich gilt wegen $\operatorname{div} f \in L^1(U)$ nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

$$\int_{U_\varepsilon} \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon \to 0_+} \int_U \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x.$$

Da außerdem f in $C^0(\overline{U})^n$ und h in $C^1(V)$ liegen, liefert die klassische Konvergenzaussage für Riemann-Integrale bei gleichmäßiger Konvergenz den Grenzübergang

$$\int_{\partial U_\varepsilon} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma \xrightarrow{\varepsilon \to 0_+} \int_{\partial U} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma.$$

□

Beweis von Hauptsatz 12.3. Für den Beweis des Hauptsatzes benutzen wir die Zerlegung der Eins (η_i) nach Lemma 12.4 und schreiben f in der Form

$$f = \sum_{i=0}^{m} (\eta_i f) \;\text{ auf }\; \overline{\Omega} \quad \text{mit} \quad \operatorname{supp}(\eta_i f) \subset U_i \cap \overline{\Omega}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{m} \int_\Omega \operatorname{div}(\eta_i f) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{U_0} \operatorname{div}(\eta_0 f) \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_{U_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\eta_i f) \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dabei ist aber $\int_{U_0} \operatorname{div}(\eta_0 f) \, \mathrm{d}x = 0$ wegen der Tatsache $\operatorname{supp}(\eta_0 f) \subset U_0 \subset \Omega$ und Lemma 12.5 mit $\varphi = \eta_0 f$ und $\psi \equiv 1$.

Für $1 \le i \le m$ liefert Lemma 12.6 mit $U = U_i$ wegen $\eta_i \in C_0^\infty(U_i)$ die Identität

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \int_{U_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\eta_i f) \, \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{m} \int_{U_i \cap \partial\Omega} \eta_i f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial\Omega} \eta_i f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{m} \eta_i \Big) f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^m \eta_i = 1$ auf $\partial\Omega$ ist. □

Bemerkung. Der Satz von Gauß gilt auch für allgemeinere beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

(1) Die Menge der sog. *singulären Randpunkte*, in denen lokal der Rand $\partial\Omega$ *nicht* als Graph einer C^1-Funktion geschrieben werden kann, sei eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge, d.h.

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\text{singuläre Randpunkte}\}) = 0$$

für das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{n-1}$ (siehe Königsberger, Analysis II, §12).

(2) Das Gebiet Ω hat einen *Lipschitz-Rand*, d.h., lokal kann $\partial\Omega$ als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion geschrieben werden:

$$\overline{\Omega} \cap U = \{x = (x', x_n) \in U : x_n \leq h(x'), x' \in V\}$$

mit einer Funktion $h : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $h \in C^{0,1}(V)$. In diesem Fall existiert der äußere Normalenvektor

$$\nu(x) = \frac{(-\nabla' h(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla' h(x')|^2}}, \quad x = (x', h(x')),\, x' \in V,$$

nur x'-fast überall in V (siehe H.W. Alt, Funktionalanalysis).

Korollar 12.7 (Partielle Integration)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und seien $u, v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\nabla u, \nabla v \in L^1(\Omega)^n$ gegeben. Dann gilt für $j = 1, \ldots, n$*

$$\int_\Omega (\partial_j u) v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\, \partial_j v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_j \,\mathrm{d}\sigma,$$

wobei ν_j die j-te Komponente des äußeren Normalenvektors $\nu = \nu(x)$ bezeichnet.

Beweis. Sei $f = uve_j$ mit dem j-tem Einheitsvektor $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ mit Eins an der j-ten Stelle. Dann gilt $f \in C^0(\overline{\Omega})^n \cap C^1(\Omega)^n$ sowie $\operatorname{div} f = \partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u\partial_j v \in L^1(\Omega)$, und Satz 12.3 liefert

$$\int_\Omega ((\partial_j u)v + u\, \partial_j v) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_j \,\mathrm{d}\sigma.$$

□

Hauptsatz 12.8 (**Satz von Green**)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand $\partial\Omega = \Gamma = \gamma^0 \cup \cdots \cup \gamma^p$, wobei γ^0 die „äußere Randkomponente“ ist und die γ^i, $1 \leq i \leq p$, innere „Löcher“ beranden; alle Randkomponenten werden dabei im mathematisch positiven Sinne bzgl. Ω durchlaufen. Ferner sei $F \in C^1(\Omega)^2 \cap C^0(\overline{\Omega})^2$ ein Vektorfeld mit* $\operatorname{rot} F := \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \in L^1(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} F \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma F \cdot \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{p} \int_{\gamma^i} F \cdot \,\mathrm{d}x,$$

wobei das Wegintegral von F entlang γ^i durch

$$\int_{a_i}^{b_i} F(\gamma^i(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}(t) \,\mathrm{d}t$$

mittels einer Parametrisierung $\gamma^i : [a_i, b_i] \to \partial\Omega$ definiert wird.

Beweis. Zu F definieren wir das Vektorfeld $f \in C^1(\Omega)^2 \cap C^0(\overline{\Omega})^2$ durch

$$f(x) = (f_1, f_2)(x) = (F_2, -F_1)(x).$$

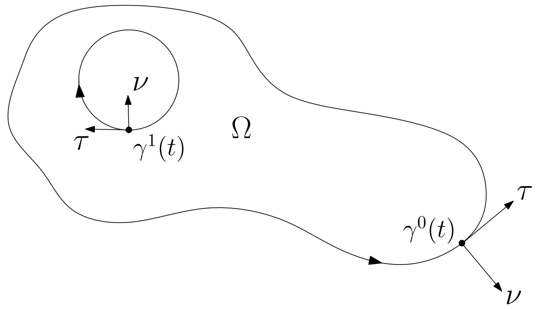
Dann ist $\operatorname{div} f = \operatorname{rot} F \in L^1(\Omega)$ und die Anwendung des Satzes von Gauß auf f liefert

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{rot} F \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div} f \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \sum_{i=0}^{p} \int_{\gamma^i} f \cdot \nu \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \sum_{i=0}^{p} \int_{a_i}^{b_i} f(\gamma^i(t)) \cdot \nu(\gamma^i(t)) \sqrt{1 + \Big|\frac{\mathrm{d}\gamma^i(t)}{\mathrm{d}t}\Big|^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{p} \int_{a_i}^{b_i} F(\gamma^i(t)) \cdot \tau(\gamma^i(t)) \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{p} \int_{\gamma^i} F \cdot \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma F \cdot \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

wobei die Beziehungen

$$\tau(\gamma(t)) = (\gamma_1(t)', \gamma_2(t)') = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{und} \quad \nu(\gamma(t)) = \frac{(\gamma_2(t)', -\gamma_1(t)')}{\sqrt{1 + \big|\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\big|^2}}$$

für $\gamma = \gamma^i$, $i = 0, \ldots, p$, benutzt wurden.



□