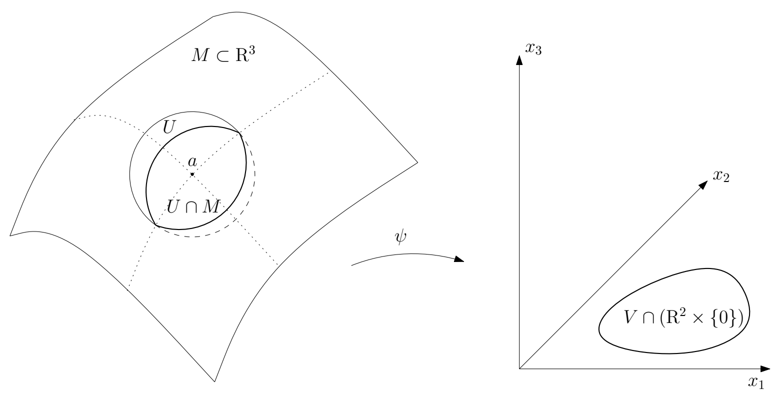
§10 Untermannigfaltigkeiten

Definition. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-*dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, *$1 \le k \le n$, falls es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und einen Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),$$

$0 \in \mathbb{R}^{n-k}$, gilt. Dabei sei im Allg. ψ ein C^1-Diffeomorphismus (d.h. $\psi \in C^1(U)$ mit $\psi^{-1} \in C^1(V)$); deshalb heißt M auch k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit.



Beispiel. (1) Der Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(2) Die Einheitskugel $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(3) Der Weg parametrisiert durch $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, die sog. *Neilsche Parabel*, ist keine 1-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, weil man zum Punkt $a = (0, 0)$ keinen geeigneten C^1-Diffeomorphismus ψ findet. γ definiert aber einen C^∞-Weg.

(4) Ein C^∞-Weg mit einer Selbstdurchdringung ist keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(5) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Dann ist der Graph

$$M = G(f) = \{(x', f(x')) : x' \in D\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zum Punkt $a = (x_0', f(x_0'))$, $x_0' \in D$, definiert man

$$\psi(x) = \psi(x', x_n) = \big(x', x_n - f(x')\big)$$

mit $U = D\times\mathbb{R}$, $V = D\times\mathbb{R}$, $\psi(M) = \psi(U\cap M) = V\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) = D\times\{0\}$. Hier gilt

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ löst die Gleichung } F(x', x_n) := f(x') - x_n \overset{!}{=} 0.$$

Satz 10.1. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass*

(i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$,

(ii) *die Ableitung $f'(a) = Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ hat den maximalen Rang $n-k$ (oder äquivalent: $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ist surjektiv).*

Der obige Satz besagt also, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit lokal durch das Lösen von $n-k$ (nichtlinearen) Gleichungen beschrieben werden kann.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Richtung "$\Rightarrow$". Sei zu $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $\psi : U \to V$ mit $\psi(U\cap M) = V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})$ gegeben. Wir definieren

$$f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \to \mathbb{R}^{n-k}, \quad f := (\psi_{k+1}, \dots, \psi_n).$$

Dann ist $f \in C^1(U)^{n-k}$ und die Ableitung $f'(a) = \big(\nabla\psi_{k+1}(a), \dots, \nabla\psi_n(a)\big)$ besteht aus $n-k$ linear unabhängigen Vektoren, nämlich $n-k$ Zeilenvektoren der invertierbaren Jacobi-Matrix $D\psi(a) \in \mathbb{R}^{n,n}$ von ψ in a. Außerdem ist $x \in M\cap U$ genau dann, wenn $(\psi_{k+1}, \dots, \psi_n)(x) = f(x) = 0$ gilt.

Für den Beweis der Richtung "$\Leftarrow$" seien $a \in M$, U eine offene Umgebung von a und $U\cap M = \{x \in U : f(x) = (f_1, \dots, f_{n-k})(x) = 0\}$ sowie $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$ linear unabhängig.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$ im $\mathbb{R}^n$ senkrecht auf $e_1, \dots, e_k$ stehen, so dass also

$$e_1, \dots, e_k, \nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet. Wir definieren $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi(x) = (x_1, \dots, x_k, f(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n).$$

Dann ist $D\psi(a) = (e_1, \dots, e_k, \nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a))$ invertierbar, und nach dem Satz über Umkehrfunktionen bildet ψ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von a bijektiv auf eine offene Umgebung V von $\psi(a)$ ab. Folglich ist $\psi : \tilde{U} \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Schließlich erhalten wir

$$x \in M \cap \tilde{U} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \ \ (x \in \tilde{U}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) = (x', 0) \in V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

$\square$

Definition (reguläre Parametrisierungen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n$, offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt* Immersion (reguläre Parametrisierung)*, wenn die lineare Abbildung $\phi'(x) = D\phi(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ für jedes $x \in U$ injektiv ist (oder äquivalent:* $\operatorname{rang} \phi'(x) = k = max.$*).*

Beispiel. (1) Ein Weg $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Immersion, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$; d.h. genau dann, wenn für alle $t \in (a,b)$ der Weg γ einen nichttrivialen Tangentialvektor besitzt.

(2) Die Neilsche Parabel ist ein C^∞-Weg, aber wegen $\gamma'(0) = (0,0)$ keine Immersion.

(3) Der C^∞-Weg $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + 2\cos t)(\cos t, \sin t)$ ist eine Immersion, aber wegen der Selbstdurchdringung an der Stelle $t = \pi \pm \pi/3$ keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(4) Der Graph $G(f)$ einer C^1-Funktion ist eine Immersion, denn für die Abbildung $\phi(x') = (x', f(x')), x' \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, hat

$$\phi'(x') = D\phi(x') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \partial_1 f & \dots & \partial_{n-1} f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n-1}$$

den maximalen Rang $n-1$.

Bemerkung. Anhand des dritten Beispiels sieht man also, dass der Begriff der Immersion zu schwach ist, um Untermannigfaltigkeiten zu charakterisieren.

Satz 10.2 (Parametrisierungssatz). *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung V von a, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(U) = V \cap M$ derart gibt, dass $\phi : U \to \phi(U)$ (mit der Relativtopologie des $\mathbb{R}^n$ auf M) ein* Homöomorphismus *ist, d.h., ϕ ist bijektiv, stetig und ϕ^{-1} ist stetig. Insbesondere folgt, dass $\phi(U) = V \cap M$ relativ offen in M ist. In diesem Fall heißt ϕ auch* Einbettung.

Ohne Beweis. (s. H. Amann-J. Escher: Analysis II, Satz VII 9.10 und 9.12) □

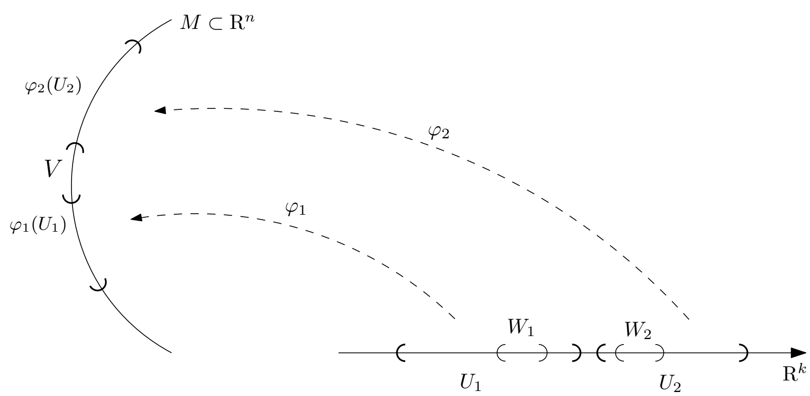
Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist eine* Karte *von M eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ definierte Immersion $\phi : U \to M$, die zugleich als Abbildung $\phi : U \to \phi(U)$ ein Homöomorphismus ist (ϕ ist eine Einbettung).*

In dieser Situation heißen $(\phi^{-1}(p))_1, \dots, (\phi^{-1}(p))_k$ für $p \in \phi(U)$ Koordinaten *von p bzgl. der Karte ϕ, die Funktionen $(\phi^{-1})_1, \dots, (\phi^{-1})_k : \phi(U) \to \mathbb{R}$ heißen* lokale Koordinaten.

Offensichtlich sind lokale Koordinaten zu $p \in M$ nicht eindeutig. Für zwei Karten (φ_1, U_1), (φ_2, U_2) kann ohne Weiteres

$$\emptyset \neq \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \;\; \text{(relativ offen in } M\text{)}$$

gelten. Welche Eigenschaften hat dann $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ auf dem $\mathbb{R}^k$?



Satz 10.3 (**Kartenwechsel**). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\varphi_1 : U_1 \to M$ und $\varphi_2 : U_2 \to M$ Karten von M mit $V := \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \neq \emptyset$. Dann ist V relativ offen in M, $W_j = \varphi_j^{-1}(V)$, $j = 1, 2$, ist offene Teilmenge von U_j und $\psi := (\varphi_2|_{W_2})^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \to W_2$ ist ein C^1-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Weil φ_1, φ_2 Karten sind, sind die Mengen $\varphi_1(U_1)$, $\varphi_2(U_2)$ relativ offen in M. Folglich ist auch $V = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$ relativ offen in M. Daraus erhalten wir, dass $W_j = \varphi_j^{-1}(V)$ offen in U_j, $j = 1, 2$, ist. Außerdem liefern die Eigenschaften von φ_1, φ_2 die Bijektivität und Stetigkeit von $\psi : W_1 \to W_2$. Es bleibt nun zu zeigen, dass ψ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Dazu fixieren wir $a \in W_1$ und zeigen, dass ψ in einer offenen Umgebung $A \subset W_1$ von a stetig differenzierbar ist. Weil φ_1 eine Immersion ist, sind die k Vektoren $\partial_1\varphi_1(a), \ldots, \partial_k\varphi_1(a) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Ohne Einschränkung (nach Drehung des Koordinatensystems) können wir also annehmen, dass

$$\partial_1\varphi_1(a), \ldots, \partial_k\varphi_1(a), e_1, \ldots, e_{n-k}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet. Wir definieren die Abbildung

$$\phi_1 : W_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_1(x, t_1, \ldots, t_{n-k}) = \varphi_1(x) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j e_j.$$

Dann ist die Ableitung $D\phi_1(a, 0) = (\partial_1\varphi_1(a), \ldots, \partial_k\varphi_1(a), e_1, \ldots, e_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar. Also gibt es nach dem Satz über inverse Funktionen eine offene Umgebung $A_1 \subset W_1$ von a und eine offene Umgebung $N_1 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von 0, so dass

$$\phi_1 : A_1 \times N_1 \to \Omega_1$$

mit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi_1(a) \in \Omega_1$, ein C^1-Diffeomorphismus ist. Dabei gilt $\phi_1(x,0) = \varphi_1(x)$ für alle $x \in A_1$. Analog definiert man einen C^1-Diffeomorphismus

$$\phi_2 : A_2 \times N_2 \to \Omega_2$$

mit offener Umgebung $A_2 \subset \mathbb{R}^k$ von $\psi(a)$, offener Nullumgebung $N_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ und offener Umgebung $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ von $\varphi_1(a)$. Verkleinert man ggf. A_1, N_1, Ω_1, erreicht man $\Omega_1 \subset \Omega_2$, und wir erhalten, dass

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : A_1 \times N_1 \to A_2 \times N_2$$

ein C^1-Diffeomorphismus auf einer geeigneten offenen Umgebung von $(a,0) \in A_1 \times N_1$ ist. Schließlich ist die Abbildung

$$x \mapsto (x,0) \mapsto (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(x,0) \mapsto \big((\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(x,0)\big)_{j=1}^k = \psi(x)$$

stetig differenzierbar und ihre Umkehrfunktion ist vom Typ C^1. □

Definition. (1) *Den C^1-Diffeomorphismus $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (\varphi_2|_{W_2})^{-1} \circ (\varphi_1|_{W_1})$ in Satz 10.3 nennt man einen* Kartenwechsel.

(2) *Eine Familie von Karten $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ (mit Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^k \to M$) mit der Eigenschaft $M = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$ heißt* Atlas *von M.*

Lemma 10.4. *Zu jeder k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ existiert ein Atlas aus abzählbar vielen Karten.*

Beweis. Die Existenz eines Atlas folgt aus dem Parametrisierungssatz 10.2. Sei also $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ ein Atlas von M. Dann gibt es zu jedem $a \in M$ eine Karte (φ_a, U_a), $U_a \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi_a(U_a) = V_a \cap M$, $V_a \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $a \in V_a \cap M$. Also ist a innerer Punkt von V_a. Da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ (und dicht für M) liegt, gibt es zu a einen rationalen Punkt $q_a \in \mathbb{Q}^n$ und einen Radius $0 < r_a \in \mathbb{Q}$, so dass

$$a \in B_{r_a}(q_a) \subset V_a$$

gilt. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_a|_{\varphi_a^{-1}(B_{r_a}(q_a) \cap M)} : \varphi_a^{-1}(B_{r_a}(q_a) \cap M) \to B_{r_a}(q_a) \cap M$$

eine Karte, und die abzählbar vielen Mengen

$$\{B_{r_a}(q_a) \cap M : a \in M\}$$

überdecken M. Also besitzt M einen Atlas aus höchstens abzählbar vielen Karten. □

Bemerkung. Häufig werden nur endlich viele Karten benötigt, um die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M zu überdecken. Beispielsweise kann die Untermannigfaltigkeit S^1, S^2 und allgemein $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, durch zwei Karten überdeckt werden.