§0 Motivation

0.1 Vertauschung von Integration und Grenzwerten

Eine der sehr häufig in der Analysis benutzten Schritte ist die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung von Funktionenfolgen. Die bisher bekannte Aussage für das Riemann-Integral lautet:

Satz. *Sei (f_k) eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel. (1) Sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{x^k}{k}$. Dann konvergiert f_k gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ und es gilt $\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k(k+1)} \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) Sei $f_k(x) = x^k$ auf $[0,1]$. Dann gilt

$$f_k(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad \text{punktweise, aber } \textit{nicht} \text{ gleichmäßig.}$$

Wie in (1) ist f Riemann-integrierbar, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und

$$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

obwohl der obige Satz *nicht* anwendbar ist.

(3) Analog gilt für $f_k(x) = \sqrt{k}\,x^k$ auf $[0,1]$

$$f_k(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ \infty & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

Daraus folgt $\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{k}}{k+1} \to 0$. Die Funktion f ist (uneigentlich) Riemann-integrierbar mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dagegen ist diese Konvergenzaussage für die Integrale der Funktionenfolge $f_k(x) = kx^k$, die für $k \to \infty$ die gleiche Grenzfunktion f besitzt, offensichtlich falsch.

(4) Sei $f_k(x) = k\chi_{\left(\frac{1}{2k},\frac{1}{k}\right]}$. Dann gilt $f_k \to f = 0$ punktweise, aber

$$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Problem ist, dass man als gleichmäßige Abschätzung in $k \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$ die Ungleichung $f_k(x) \le \frac{1}{x} =: g(x)$ findet, und die Funktion g *nicht* uneigentlich Riemann-integrierbar ist: $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Unser Ziel wird es sein, den sog. *Satz von Lebesgue* zu formulieren und zu beweisen. Er besagt Folgendes:

Gilt $|f_k(x)| \leq g(x)$ auf $[a,b]$ mit $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ sowie $f_k \to f$ punktweise auf $[a,b]$, so folgt

$$\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit anderen Worten,

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

0.2 Integrierbarkeit der Grenzfunktion

Wir betrachten die Funktion

$$f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\,,$$

die *nicht* Riemann-integrierbar ist. Nun schreiben wir die Menge $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ in der Form

$$\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{q_k : k\in\mathbb{N}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \quad \text{mit} \quad M_k = \{q_1\dots,q_k\},$$

und erhalten die Riemann-integrierbaren Funktionen

$$f_k = \chi_{M_k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

mit $\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$; außerdem gilt die punktweise Konvergenz $f_k \to f$. Wie wir aber bereits wissen, ist die Funktion f nicht Riemann-integrierbar. Für einen erweiterten Integralbegriff sollte aber f integrierbar sein und

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} 1\,\mathrm{d}x = 0$$

gelten.

0.3 Messbarkeit von Mengen

Aus Analysis II sind uns die folgenden Begriffe bekannt.

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-* bzw. *Lebesgue-Nullmenge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abgeschlossene und beschränkte Rechtecke R_j, $1\leq j\leq k$, $k\in\mathbb{N}$, bzw. $1\leq j<\infty$, gibt mit

$$N \subset \bigcup_j R_j \quad \text{und} \quad \sum_j |R_j| < \varepsilon.$$

Dabei ist $|R_j|$ das klassische n-dimensionale Volumen der Menge R_j.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, falls χ_M Riemann-integrierbar auf einem Rechteck $R \supset M$ ist. Nach dem Satz von Lebesgue ist dies äquivalent zur Aussage, dass ∂M eine Lebesgue- (oder auch Jordan-) Nullmenge ist

Proposition 1. *Seien N_j mit $1 \leq j \leq k$ Jordan-Nullmengen bzw. seien N_j mit $1 \leq j < \infty$ Lebesgue-Nullmengen. Dann ist auch $\bigcup_j N_j$ eine Jordan- bzw. Lebesgue-Nullmenge.*

Proposition 2. *Seien M_j, $1 \leq j \leq k$, Jordan-messbar mit Volumen $\mu(M_j) = \int_{M_j} 1 \, \mathrm{d}x$ im Sinne des n-dimensionalen Riemann-Integrals. Dann gilt:*

(1) *Die Vereinigung $\bigcup_{j=1}^k M_j$ ist Jordan-messbar und*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} M_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(M_j).$$

(2) *Falls die Mengen M_j paarweise disjunkt sind, gilt sogar*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} M_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} \mu(M_j).$$

Man stellt sich nun die folgenden Fragen:

(1) Gilt Proposition 2 auch für abzählbar viele Mengen M_j?

Leider ist die Antwort im Allgemeinen nein, siehe zum Beispiel die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ aus Abschnitt 0.2.

(2) Ist jede offene oder abgeschlossene (kompakte) Menge im $\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar?

In den nächsten Paragraphen haben wir die folgenden Ziele:

- Konstruiere ein *Maß* μ, eine sogenannte *Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ (mit $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{+\infty\}$) auf einer möglichst großen Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften:

  (i) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen $\Rightarrow M \in \mathcal{A}$,

  (ii) $M_j \in \mathcal{A}$ für alle $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \in \mathcal{A}$ und

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j) \quad \text{sowie} \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$$

  für paarweise disjunkte Mengen M_j,

(iii) $R := (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ halboffenes Rechteck $\Rightarrow$

$$\mu(R) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

- Konstruiere ein *Integral* auf $\mathbb{R}^n$ (nicht nur auf beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$) und für möglichst viele (auch unbeschränkte) Funktionen. Es soll gelten:

  (i)
  $$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{falls } f \text{ Riemann-integrierbar ist,}$$

  (ii)
  $$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M \, \mathrm{d}\mu = \mu(M) \quad \text{für alle „messbaren" Mengen } M \in \mathcal{A},$$

  (iii)
  $$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

  (iv) Es gilt der Konvergenzsatz von Lebesgue aus Abschnit 0.1.