§3 Messbare Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum.

Definition. *Eine Funktion* $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *heißt* messbar (*bezüglich* $\mathcal{A}$)*, falls die Menge*

$$\{f < c\} = \{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}([-\infty, c)) = f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}((-\infty, c))$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ *messbar ist, d.h.* $\{f < c\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *Eine Funktion* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist genau dann messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

(1) $\{f \leq c\}$ *ist messbar für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(2) $\{f > c\}$ *ist messbar für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(3) $\{f \geq c\}$ *ist messbar für alle* $c \in \mathbb{R}$,

(4) $\{f > c\}$ *ist messbar für alle* $c \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Für die ersten drei oben genannten Mengen gilt

$$\{f \leq c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ f < c + \frac{1}{n} \right\}, \quad \{f > c\} = X \setminus \{f \leq c\}, \quad \{f \geq c\} = X \setminus \{f < c\}.$$

Für den Beweis von (4) sei $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann existiert eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{Q}$, so dass $c_n \searrow c$, und es gilt $\{f > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f > c_n\}$. □

Proposition 3.2. *Seien* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \mathbb{R}$ *messbare Funktionen und sei* $\alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$. *Dann sind die folgenden Funktionen bzw. Mengen messbar:*

(1) $|f|$, αf, $\alpha + f$, f^2 *und* $\frac{1}{f}$, *falls* $f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$,

(2) $f \cdot g$, $f \pm g$ *und* $\frac{f}{g}$, *falls* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$,

(3) $\{f > g\} := \{f - g > 0\}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus äquivalenten Umformulierungen für Mengen. Sei $c \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel sind die Mengen

$$\{|f| > c\} = \begin{cases} \{f > c\} \cup \{f < -c\}, & \text{falls } c \geq 0, \\ X, & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

$$\{f > g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{f \geq q\} \cap \{g < q\}\big)$$

$$\{f \pm g > c\} = \{f > \mp g + c\} \quad \text{nach (1) und (3)}$$

messbar. □

Proposition 3.3. *Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen auf X. Dann sind auch die (punktweise definierten) Funktionen*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

messbar.

Beweis. Die Funktion $\sup_n f_n$ ist messbar, da für $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\big\{ \sup_n f_n > c \big\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ f_n > c \}$$

messbar ist. Eine ähnliche Aussage gilt für $\inf_n f_n$.

Sei $\varphi_n = \sup_{j \geq n} f_j$. Dann ist nach dem ersten Teil des Beweises φ_n für jedes n messbar. Aus der Gleichheit

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_n \varphi_n(x) = \lim_n \varphi_n(x)$$

folgt nun, dass auch $\limsup_n f_n$ messbar ist. □

Definition. *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen. Wir schreiben $f = g$* fast überall *oder kurz:* f.ü. (almost everywhere (a.e.), presque partout (p.p.)) *in X, falls es eine Nullmenge $N \subset X$ gibt mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \backslash N$.*

Eine Eigenschaft reellwertiger Funktionen gilt fast überall, *falls sie für alle Punkte $x \in X$ bis auf eine Nullmenge $N \subset X$ gilt.*

Lemma 3.4. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $f = g$ fast überall, so ist auch g messbar.*

Beweis. Sei $N = \{f \neq g\}$, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist N eine μ-Nullmenge und die Menge

$$\{g > c\} = \big(\{f > c\} \cap (X \backslash N)\big) \cup \big(\{g > c\} \cap N\big)$$

ist messbar, weil sowohl die Menge $\{f > c\} \cap (X \backslash N)$ als auch die Nullmenge $\{g > c\} \cap N$ messbar sind. □

Korollar 3.5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen auf X, die fast überall (in $\overline{\mathbb{R}}$) konvergiert. Dann ist auch f, definiert durch $f(x) = \lim_n f_n(x)$ f.ü., messbar.*

Bemerkung. Man beachte, dass die Funktion f in Korollar 3.5 zuerst einmal nur f.ü. in X definiert ist, also auf $X \setminus N$ mit einer Nullmenge N. Da aber die Aussagen in Korollar 3.5 von der Existenz dieser Ausnahmemenge N nicht beeinflusst werden, reicht es in der Maß– und Integrationstheorie häufig aus, eine Funktion nur f.ü. zu definieren.

Beweis von Korollar 3.5. Die Funktion f ist zuerst nur fast überall definiert. Sei

$$N = \{x \in X : \text{die Folge } (f_n(x)) \text{ konvergiert nicht in } \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Dann ist $\mu(N) = 0$, und nach Lemma 3.4 ist die Funktion $\tilde{f}_n$ definiert durch

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{für } x \in X \backslash N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}$$

messbar. Nach Proposition 3.3 ist auch die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{für } x \in X \backslash N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}, \text{ d.h. } F(x) = \lim_n \tilde{f}_n(x),$$

messbar und $f = F$ fast überall. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.4. □

Beispiel. (1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M} = \mathcal{M}_n, \mu = \mu_n)$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}(U)$ offen. Weil für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f > c\} = f^{-1}((c, \infty))$ offen ist, gilt $\{f > c\} \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}$, und die Funktion f ist messbar.

(2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1, \mu = \mu_1)$. Dann ist die Funktion definiert durch $f = \chi_{\{r\}}$, also $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = r \\ 0 & \text{für } x \neq r \end{cases}$, messbar.

Nach Proposition 3.3 (oder Korollar 3.5) ist die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ messbar und es gilt sogar $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ fast überall, weil $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ ist.

(3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$. Dann ist die charakteristische Funktion χ_A für jede offene, jede abgeschlossene und sogar für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar.

Hauptsatz 3.6 (Satz von Egoroff). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, das heißt $\mu(X) < \infty$, und sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen auf X, die punktweise gegen $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass (f_n) gleichmäßig auf E_ε gegen f konvergiert.*

Beweis. Sei

$$S_{n,k} = \bigcap_{j>n} \left\{x \in X : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann gilt für festes $k \in \mathbb{N}$

$$S_{n,k} \in \mathcal{A}, \quad S_{n,k} \subset S_{n+1,k} \subset \ldots, \quad \bigcup_n S_{n,k} = X$$

und nach Proposition 1.4(2)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(S_{n,k}) = \mu\big(\bigcup_n S_{n,k}\big) = \mu(X).$$

Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k = n_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass (beachte $\mu(X) < \infty$)

$$\mu(X\backslash S_{n_k,k}) = \mu(X) - \mu(S_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Nun behaupten wir, dass die Menge

$$E_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{n_k,k}$$

die gewünschten Eigenschaften besitzt. Offensichtlich ist $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$\mu(X\backslash E_\varepsilon) = \mu\big(X\backslash \bigcap_k S_{n_k,k}\big) = \mu\big(\bigcup_k (X\backslash S_{n_k,k})\big) \le \sum_k \mu(X\backslash S_{n_k,k}) < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Außerdem ist $E_\varepsilon \subset S_{n_k,k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $x \in E_\varepsilon$

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } j > n_k,$$

und f_j konvergiert auf E_ε gleichmäßig gegen f. $\square$

Bemerkung. Satz 3.6 ist ohne die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ im Allg. falsch.

Definition. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* Treppenfunktion*, falls sie nur endlich viele Funktionswerte annimmt, d.h., es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und $E_j \in \mathcal{A}$ sowie $f_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le N$, so dass*

$$f = \sum_{j=1}^{N} f_j \chi_{E_j}.$$

Sind in dieser Darstellung die Mengen E_j paarweise disjunkt und die Zahlen f_j paarweise verschieden, heißt diese Darstellung kanonisch.

Im Allg. ist die oben genannte Darstellung nicht kanonisch; es gibt aber immer eine eindeutig bestimmte kanonische Darstellung. Treppenfunktionen sind messbare Funktionen, und Summen und Produkte von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen.

Satz 3.7. *Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen (f_n) mit $f_n \le f_{n+1}$, die punktweise auf X gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir unterteilen den Bildbereich $[0,\infty]$ auf in die Menge $[n,\infty]$ und die halboffenen Intervalle

$$\Big[0,\frac{1}{2^n}\Big),\ \Big[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}\Big),\dots,\ \Big[\frac{n2^n-1}{2^n},n\Big],$$

und definieren f_n durch

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & \text{falls } f(x)\geq n,\\ \frac{j}{2^n}, & \text{falls } \frac{j}{2^n}\leq f(x)<\frac{j+1}{2^n}, j=0,\dots,n2^n-1.\end{cases}$$

Dann ist f_n eine Treppenfunktion, $f_n\leq f_{n+1}$ und für $\frac{j}{2^n}\leq f(x)<\frac{j+1}{2^n}$ gilt

$$|f(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{2^n}.$$

Ist dagegen $f(x)=+\infty$, dann ist $f_n(x)=n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, und es gilt wieder $f_n(x)\to f(x)$ für $n\to\infty$. □

Korollar 3.8. *Sei $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen (f_n), die punktweise gegen f konvergiert.*

Beweis. Wir schreiben die Funktion f als $f=f^+-f^-$, wobei $f^+=\frac{1}{2}(|f|+f)=\max(f,0)$, $f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)=-\min(f,0)$ gilt. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.7. □

Lemma 3.9. *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)=(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}_n,\mu_n)$, und sei $f:X\to\mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit beschränktem „Träger“ $\{f\neq 0\}=E$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine kompakte Menge $E_\varepsilon\subset E$ mit $\mu(E\backslash E_\varepsilon)<\varepsilon$, so dass $f|_{E_\varepsilon}$ auf E_ε stetig ist.*

Bemerkung. Üblicherweise wird der Träger einer Funktion f, z.B. einer stetigen oder sogar C^∞-Funktion, als der Abschluss der Menge $\{f\neq 0\}$ definiert, also $\operatorname{supp} f=\overline{\{f\neq 0\}}$. Im Zusammenhang mit "nur" messbaren Funktionen ist diese Definition nicht sinnvoll, da dann z.B. der Träger der Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ mit $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Beweis von Lemma 3.9. Sei

$$f=\sum_{j=1}^{N}f_j\chi_{E_j}$$

die kanonische Darstellung von f. Die Mengen E_j sind paarweise disjunkt, jedes $E_j\in\mathcal{M}_n$ ist beschränkt und $E=\bigcup_{j=1}^N E_j$. Nach Satz 2.8(3) gibt es abgeschlossene Mengen $E_{j,\varepsilon}\subset E_j$ mit

$$\mu(E_j\backslash E_{j,\varepsilon})<\frac{\varepsilon}{N}.$$

Die Mengen $E_{j,\varepsilon}$ sind kompakt und paarweise disjunkt. Sei nun

$$E_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N} E_{j,\varepsilon}.$$

Dann gilt $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$, die Funktion $f|_{E_\varepsilon}$ ist stückweise konstant und wegen dist $(E_{j,\varepsilon}, E_{k,\varepsilon}) > 0$ für alle $j \neq k$ auch stetig. $\square$

Hauptsatz 3.10 (**Satz von Lusin**). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \mu_n)$, *und sei* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion mit beschränktem „Träger“* $\{f \neq 0\} = E$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine kompakte Menge* $E_\varepsilon \subset E$ *mit* $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$, *so dass* $f|_{E_\varepsilon}$ *auf* E_ε *stetig ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f \geq 0$ (sonst zerlege $f = f^+ - f^-$). Nach Satz 3.7 gibt es eine Folge (f_k) von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dabei gilt nach der Konstruktion im Beweis von Satz 3.7 $f_k(x) = 0$ für alle $x \notin E$. Wegen Lemma 3.9 existieren abgeschlossene Mengen $E_{k,\varepsilon} \subset E$ mit

$$\mu(E \backslash E_{\varepsilon,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad f_k|_{E_{\varepsilon,k}} \text{ ist stetig.}$$

Aus dem Satz von Egoroff, Satz 3.6, angewandt auf f, f_k in E, $\mu(E) < \infty$, folgt, dass es eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset E$ gibt mit

$$\mu(E \backslash F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad f_k \to f \text{ gleichmäßig auf } F_\varepsilon.$$

Sei nun

$$E_\varepsilon = F_\varepsilon \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}.$$

Dann ist E_ε abgeschlossen, kompakt und wegen $\mu(E \backslash E_{\varepsilon,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, $\mu(E \backslash F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt die Abschätzung

$$\mu(E \backslash E_\varepsilon) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \backslash E_{\varepsilon,k}) \cup (E \backslash F_\varepsilon)\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \backslash E_{\varepsilon,k}) + \mu(E \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Da $f_k|_{E_\varepsilon}$ stetig ist und f_k gleichmäßig auf E_ε gegen f konvergiert, ist auch $f|_{E_\varepsilon}$ stetig. $\square$

§4 Das allgemeine Lebesgue-Integral

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

4.1 Nichtnegative Funktionen

Definition. *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine (nichtnegative) Treppenfunktion, $f = \sum_{j=1}^{N} f_j \chi_{E_j}$ mit $f_j \geq 0$, $E_j \in \mathcal{A}$. Dann heißt*

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_X f\, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{N} f_j \mu(E_j) \in [0, \infty]$$

das (Lebesgue-) Integral *von f.*

Im Fall $\mu(E_j) < \infty$ für alle $j = 1, \ldots, N$ ist $\int_X f\, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty)$, und f heißt (Lebesgue-) integrierbar.

Bemerkung. Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften:

(1) Der Wert
$$\sum_{j=1}^{N} f_j \mu(E_j)$$
hängt nicht von der Darstellung der Treppenfunktion ab (falls alle $f_j \geq 0$).

(2) Seien $f, g \geq 0$ Treppenfunktionen und gelte $f \geq g$ fast überall. Dann gilt
$$\int_X f\, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g\, \mathrm{d}\mu.$$

(3) Seien $f, g \geq 0$ Treppenfunktionen. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \geq 0$
$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X g\, \mathrm{d}\mu.$$

Definition. *Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und sei*

$$T_f = \{h : X \to [0, \infty) : h \text{ ist Treppenfunktion, } h \leq f \text{ f.ü.}\}$$

(beachte: $T_f \neq \emptyset$, da $0 \in T_f$). Dann heißt

$$\int_X f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_X f\, \mathrm{d}\mu := \sup_{h \in T_f} \left\{ \int_X h\, \mathrm{d}\mu : h \in T_f \right\} \in [0, \infty]$$

das (Lebesgue-) Integral *von f. Für $E \in \mathcal{A}$ sei dann*

$$\int_E f\, \mathrm{d}\mu := \int_X f \chi_E\, \mathrm{d}\mu.$$

Falls $\int_X f\, \mathrm{d}\mu < \infty$, heißt f (Lebesgue-) integrierbar.

Bemerkung. Ist $h \in T_f$ eine Treppenfunktion mit nichtleerer Ausnahmemenge $N = \{h > f\} \in \mathcal{A}$, so ist auch $h_0 = h\chi_{X \setminus N}$ eine Treppenfunktion. Es gilt $h_0 \le f$ auf X und $\int_X h_0 \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \, \mathrm{d}\mu$. Deshalb kann die Menge T_f in obiger Definition durch die kleinere Menge

$$\widetilde{T}_f = \{h : X \to [0, \infty) : h \text{ ist Treppenfunktion}, \ h \le f\}$$

ersetzt werden.

Beispiel. Sei μ auf $\mathbb{N}$ das Zählmaß, d.h. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(E) = \#E$ für alle $E \subset \mathbb{N}$. Dann ist *jede* Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (d.h. jede Folge) messbar. Für $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ ist

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_n f(n) \in [0, \infty]$$

das Lebesgue-Integral von f über $\mathbb{N}$ bezüglich μ, und f ist genau dann integrierbar, wenn $\sum_n f(n)$ konvergiert.

Lemma 4.1. *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $E \in \mathcal{A}$ gegeben. Dann gilt:*

(1) *Gilt $f = g$ f.ü., folgt $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.*

(2) *Falls $0 \le f \le g$ f.ü., ist $0 \le \int_E f \, \mathrm{d}\mu \le \int_E g \, \mathrm{d}\mu \le \infty$.*

(3) *Sind $E_1 \subset E_2 \in \mathcal{A}$, dann ist $\int_{E_1} f \, \mathrm{d}\mu \le \int_{E_2} f \, \mathrm{d}\mu$ erfüllt.*

(4) *Es ist $\int_E cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $c \in \mathbb{R}_+$.*

(5) *Sei $f = 0$ auf E fast überall oder sei $\mu(E) = 0$. Dann ist $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.*

(6) (**Tschebyscheff-Ungleichung**) *Für jedes $\alpha > 0$ gilt*

$$\mu(\{f \ge \alpha\} \cap E) \le \frac{1}{\alpha} \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

(7) *Es gilt $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall auf E ist.*

Beweis. Wir beweisen nur die Aussagen (6) und (7).

Der Beweis der Tschebyscheff-Ungleichung folgt aus Aussage (3) und aus der folgenden Ungleichungskette:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \overset{(3)}{\ge} \int_{E \cap \{f \ge \alpha\}} f \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E \cap \{f \ge \alpha\}} \alpha \, \mathrm{d}\mu = \alpha\mu(E \cap \{f \ge \alpha\}).$$

Bei Aussage (7) folgt die Rückrichtung bereits aus (5). Für den Beweis der Richtung "⇒" folgt aus der Tschebyscheff-Ungleichung, dass für alle $\alpha > 0$ das Maß

$$\mu(E \cap \{f > \alpha\}) \le \frac{1}{\alpha} \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

ist. Das liefert

$$\mu(E \cap \{f > 0\}) = \mu\Big(E \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{f > \frac{1}{k}\Big\}\Big) = \lim_{k\to 0} \mu\Big(E \cap \Big\{f > \frac{1}{k}\Big\}\Big) = 0.$$

□

Hauptsatz 4.2 (**Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz**)**.** *Sei (f_k) mit $f_k : X \to [0,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise fast überall monoton wächst, d.h.*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty \quad \textit{f.ü. in } X.$$

Dann existiert $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ fast überall in X, f ist messbar, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \in [0,\infty].$$

Beweis. Nach der Voraussetzung gibt es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty \quad \text{für alle } x \in X\backslash N.$$

Dann ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \lim_k f_k(x) \in [0,\infty] & \text{für alle } x \in X\backslash N \\ 0 & \text{für alle } x \in N \end{cases}$$

wohldefiniert auf X. Wegen Korollar 3.5 ist $f \ge 0$ auch messbar, und das Lebesgue-Integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in [0,\infty]$ existiert.

Ohne Beschränktheit der Allgemeinheit sei $f_k(x) = 0$ für alle $x \in N$ und alle $k \in \mathbb{N}$ (dabei bleibt $\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$ erhalten). Also können wir o.B.d.A. $N = \emptyset$ annehmen.

Aus $\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f_{k+1} \,\mathrm{d}\mu \le \cdots \le \infty$ folgt die Existenz des Grenzwerts

$$\alpha := \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \in [0,\infty].$$

Wegen $\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ ist dann auch

$$\alpha \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Es bleibt nun

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \alpha$$

zu zeigen. Dazu sei $s \in T_f$ eine Treppenfunktion, $s = \sum_{j=1}^{M} s_j \chi_{A_j}$, o.B.d.A. $s \le f$ in X, und sei $c \in (0,1)$. Wir definieren

$$E_k = \{f_k \ge c\, s\}.$$

Dann ist $E_k \in \mathcal{A}$, $E_k \subset E_{k+1} \cdots$ und $\bigcup_k E_k = X$, da $f_k(x) \nearrow f(x)$ für alle $x \in X$ und $c < 1$ gilt. Da nach Proposition 1.2(4) $\mu(A_j \cap E_k)$ gegen $\mu(A_j)$ für $k \to \infty$ konvergiert, folgt aus

$$\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{E_k} f_k \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{E_k} c\, s \,\mathrm{d}\mu = c \sum_{j=1}^{M} s_j \mu(A_j \cap E_k) \to c \sum_{j=1}^{M} s_j \mu(A_j) = c \int_X s \,\mathrm{d}\mu$$

und aus $\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \to \alpha$, dass

$$\alpha \ge c \int_X s \,\mathrm{d}\mu$$

für jedes $c \in (0,1)$ und jede Funktion $s \in T_f$ gilt. Damit erhalten wir die gewünschte Ungleichung $\alpha \ge \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Korollar 4.3. *Seien $f, g : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Nach Satz 3.7 seien $(s_k) \subset T_f$, $(t_k) \subset T_g$ gegeben mit

$$0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots,\ s_k \nearrow f, \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots,\ t_k \nearrow g \quad \text{punktweise in } X.$$

Nach dem Satz 4.2 von Lebesgue konvergieren die Integrale

$$\int_X s_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad \int_X t_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_X g \,\mathrm{d}\mu$$

und

$$\int_X s_k \,\mathrm{d}\mu + \int_X t_k \,\mathrm{d}\mu = \int_X (s_k + t_k) \,\mathrm{d}\mu \to \int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu$$

für $k \to \infty$. $\square$

Hauptsatz 4.4 (Lemma von Fatou). *Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt*

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung. In der obigen Ungleichung kann „$<$“ auftauchen.

Beweis. Sei
$$g_i(x) = \inf_{k \geq i} f_k(x)$$
für $i \in \mathbb{N}$ und $x \in X$. Dann ist g_i nach Proposition 3.3 messbar. Aus $g_k \leq f_k$ folgt die Ungleichung
$$\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu,$$
und
$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots, \quad g_k \nearrow \lim_k g_k = \liminf_k f_k \quad \text{punktweise in } X.$$
Nach dem Satz 4.2 von Lebesgue erhalten wir für $k \to \infty$
$$\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_X \lim_k g_k \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_k f_k \,\mathrm{d}\mu,$$
woraus zusammen mit $\int_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$ die Behauptung folgt. □

4.2 Das allgemeine Lebesgue-Integral

Definition. (1) *Ist $f : X \to [-\infty, 0]$ messbar, so ist*
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := -\int_X (-f) \,\mathrm{d}\mu \in [-\infty, 0]$$
das (Lebesgue-) Integral *von f.*

(2) *Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ heißt* integrierbar*, falls $|f|$ integrierbar ist. Dann ist*
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu \in (-\infty, \infty)$$
das Lebesgue-Integral *von f.*

(3) *Analog definiert man*
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f\chi_E)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X (f\chi_E)^- \,\mathrm{d}\mu$$
das Lebesgue-Integral *von f über $E \in \mathcal{A}$, falls $f\chi_E$ integrierbar ist.*

(4) *Die Menge*
$$L^1(X, \mu) = L^1(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \textit{ ist integrierbar}\}$$
heißt der Lebesgue-Raum $L^1(X)$ *der* L^1-Funktionen *auf X. Analog definiert man $L^1(E) = L^1(E, \mu)$.*

Bemerkung. Wegen $0 \leq f^+, f^- \leq |f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$, ist f genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind.

Proposition 4.5. *Sei $E \in \mathcal{A}$ und $f, g \in L^1(E)$. Dann gilt:*

(1) *Es ist $|\int_E f \, \mathrm{d}\mu| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$.*

(2) *Die Funktion f ist fast überall endlich.*

(3) *Falls $\mu(E) = 0$ oder $f = 0$ f.ü. in E gilt, ist $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$.*

(4) *Ist $f \leq g$ f.ü., dann ist $\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.*

(5) *Es ist $f + g \in L^1(E)$ und $\int_E (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.*

(6) *Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $cf \in L^1(E)$ und $\int_E (cf) \, \mathrm{d}\mu = c \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.*

Beweis. (1) Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}\int_E f \, \mathrm{d}\mu &= \int_X (f\chi_E)^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X (f\chi_E)^- \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X (f\chi_E)^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X (f\chi_E)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(2) Da f in $L^1(E)$ liegt, ist auch $|f| \in L^1(E)$. Dann ist $|f|$ nach Lemma 4.1 f.ü. endlich. Daraus folgt, dass f auch f.ü. endlich ist.

(4) Aus $f \leq g$ f.ü. folgt $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$ f.ü., woraus wiederum die Behauptung folgt.

(5) Aus $|f + g| \leq |f| + |g|$ und $\int_E (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_E |g| \, \mathrm{d}\mu$ (siehe Korollar 4.3) folgt $f + g \in L^1(E)$.

Um die Integralidentität zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle: $g \geq |f|$ bzw. $f, g \in L^1(E)$ allgemein.

Sei zuerst $g \geq |f|$. Substrahieren wir das Integral $\int_E f^- \, \mathrm{d}\mu$ von beiden Seiten der Identität

$$\begin{aligned}\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu &= \int_E (f^+ + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E ((f + f^-) + g) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E ((f+g) + f^-) \, \mathrm{d}\mu = \int_E (f+g) \, \mathrm{d}\mu + \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

erhalten wir die Behauptung.

Seien nun $f, g \in L^1(E)$. Weil $|f+g| \leq |f| + |g|$ ist, folgt aus dem ersten Fall die Identität

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu + \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu &\overset{1.\,\text{Fall}}{=} \int_E (f+g+|f|+|g|)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_E (f+|f|+g+|g|)\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Kor. 4.3}}{=} \int_E (f+|f|)\,\mathrm{d}\mu + \int_E (g+|g|)\,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{1.\,\text{Fall}}{=} \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu + \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit nach Korollar 4.3 erfüllt ist. Es reicht nun die Integrale $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$, $\int_E |g|\,\mathrm{d}\mu$ von beiden Seiten dieser Identität zu subtrahieren.

Der Beweis von (3) und (6) ist klar. □

Hauptsatz 4.6 (**Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz**). *Sei (f_k) eine Folge messbarer Funktionen auf X, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Ferner existiere eine Funktion $g \in L^1(X)$* (Majorante) *mit*

$$|f_k(x)| \leq g(x) \quad \textit{fast überall in } X.$$

Dann ist auch $f \in L^1(X)$, und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung. Ohne die Majorante $g \in L^1(X)$ ist die Aussage im Allgemeinen falsch; auch die Voraussetzung $f \in L^1(X)$ reicht nicht aus.

Beweis. Die Eigenschaften $|f_k| \leq g$ und $f_k \to f$ f.ü. liefern $|f| \leq g$ f.ü. und die Messbarkeit von f. Also ist $f \in L^1(X)$.

Für den Beweis der Konvergenzaussage können wir wegen $0 \leq |f_k - f| \leq 2g$ f.ü. das Lemma von Fatou (Satz 4.4) auf die Funktion $2g - |f_k - f|$ anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_X 2g\,\mathrm{d}\mu &= \int_X \liminf_{k\to\infty} (2g - |f_k - f|)\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X (2g - |f_k - f|)\,\mathrm{d}\mu \\
&= 2\int_X g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Dies liefert $\limsup_k \int_X |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu \leq 0$ und damit

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus der Ungleichung

$$\left|\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X (f_k - f) \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0.$$

□

Korollar 4.7. (1) *Sei $\mu(X) < \infty$ und sei $(f_k) \subset L^1(X)$ punktweise f.ü. gegen eine Funktion f konvergent. Es gebe eine Konstante $M \geq 0$ mit $|f_k(x)| \leq M$ f.ü. in X. Dann gilt*

$$\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_X f \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für } k \to \infty.$$

(2) *Sei $\mu(X) < \infty$ und sei $(f_k) \subset L^1(X)$ gleichmäßig konvergent gegen f. Dann gilt*

$$\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \to \int_X f \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für } k \to \infty.$$

Beweis. In (1) ist die Funktion $g = M \in L^1(X)$ eine Majorante. In (2) kann für $k \in \mathbb{N}$ genügend groß die Funktion $g = |f| + 1$ als Majorante gewählt werden. □

Satz 4.8 (Satz von Vitali zur absoluten Stetigkeit). *Sei $f \in L^1(X)$ gegeben. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad E \mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

absolut stetig, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon \quad \textit{für alle } E \in \mathcal{A} \textit{ mit } \mu(E) < \delta.$$

Beweis. Ohne Beschränktheit der Allgemeinheit sei $f \geq 0$. Wir definieren

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \leq n, \\ n, & \text{falls } f(x) > n. \end{cases}$$

Dann ist

$$f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots, \quad f_n \nearrow f \in L^1(X),$$

und aus dem Satz 4.6 von Lebesgue (oder auch aus Satz 4.2) folgt die Konvergenz

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } n \to \infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that

$$\int_X f_{n_\varepsilon} \,\mathrm{d}\mu > \int_X f \,\mathrm{d}\mu - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definieren wir nun $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, gilt für jedes $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ die Abschätzung

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_{n_\varepsilon} \,\mathrm{d}\mu + \int_E (f - f_{n_\varepsilon}) \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(E) n_\varepsilon + \int_X (f - f_{n_\varepsilon}) \,\mathrm{d}\mu < \delta n_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

4.3 Lebesgue- und Riemann-Integral

Satz 4.9. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes beschränktes Rechteck und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (folglich ist f beschränkt). Dann gilt $f \in L^1(Q)$ bezüglich des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes μ_n und*

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q f\,\mathrm{d}\mu_n.$$

Beweis. Da die Funktion f Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Folge von Partitionen (P_k) von Q,

$$P_k = \left\{Q_j^k : Q_j^k \subset Q \text{ sind offene, paarweise disjunkte Rechtecke, } Q = \bigcup_j \overline{Q_j^k}\right\},$$

so dass die Treppenfunktionen l_k, u_k,

$$l_k|_{Q_j^k} = \inf_{Q_j^k} f, \quad u_k|_{Q_j^k} = \sup_{Q_j^k} f,$$

die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$l_k \le l_{k+1} \le \cdots \le f \le \cdots \le u_{k+1} \le u_k,$$
$$\int_Q l_k(x)\,\mathrm{d}x \nearrow \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \swarrow \int_Q u_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann existieren fast überall die Grenzwerte $l := \lim_k l_k$, $u := \lim_k u_k$ und es ist $l \le f \le u$ f.ü. Nach dem Satz von Lebesgue (Satz 4.6) gilt

$$\int_Q l_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q l_k\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_Q l\,\mathrm{d}\mu_n$$
$$\int_Q u_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q u_k\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_Q u\,\mathrm{d}\mu_n.$$

mit $l, u \in L^1(Q)$. Daraus folgt

$$\int_Q l\,\mathrm{d}\mu_n = \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q u\,\mathrm{d}\mu_n;$$

insbesondere ist $\int_Q (u-l)\,\mathrm{d}\mu_n = 0$, und wegen $l \le u$ f.ü. gilt nach Lemma 4.1(7) $u = l$ f.ü. Dann folgt aber wegen $l \le f \le u$ f.ü. auch $u = f = l$ f.ü. Deshalb ist $f \in L^1(Q)$ und

$$\int_Q f\,\mathrm{d}\mu_n = \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Korollar 4.10. *Sei $f \geq 0$ auf $(a,b]$ uneigentlich Riemann-integrierbar, d.h., f ist Riemann-integrierbar auf $[a+\varepsilon, b]$ für jedes $\varepsilon > 0$ und der Grenzwert*

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

existiert. Dann gilt $f \in L^1([a,b]) = L^1((a,b))$ und

$$I = \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\mu_1.$$

Beweis. Nach Satz 4.9 gilt $\int_{(a+\varepsilon,b)} f\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \to I$ für $\varepsilon \to 0^+$. Da der Satz von Lebesgue 4.2 über monotone Konvergenz den Grenzübergang

$$\int_{(a+\varepsilon,b)} f\,\mathrm{d}\mu_1 \nearrow \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\mu_1 \quad \text{für } \varepsilon \to 0^+$$

liefert, erhalten wir die Gleichheit

$$\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\mu_1 = I < \infty,$$

also $f \in L^1((a,b))$. □

Korollar 4.11. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar, d.h., ∂E ist eine Lebesgue-Nullmenge. Ferner sei $f : E \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, d.h., f ist beschränkt und für ein kompaktes Rechteck $Q \supset E$ ist die Fortsetzung f_Q,*

$$f_Q(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \in Q \backslash E \end{cases},$$

Riemann-integrierbar auf Q. Dann gilt $E \in \mathcal{M}_n$, wobei $\mathcal{M}_n$ die Lebesgue'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, $f \in L^1(E)$ und

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f\,\mathrm{d}\mu_n.$$

Beweis. Das Innere $E^\circ = E \backslash \partial E$ ist offen und deshalb gilt $E^\circ \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$. Weil $\mu_n(\partial E) = 0$ und $\mathcal{M}_n$ vollständig ist (siehe Korollar 2.2), folgt auch $E = E^\circ \cup (\partial E \cap E) \in \mathcal{M}_n$. Die Funktion f_Q ist Riemann-integrierbar und nach Satz 4.9 sogar in $L^1(Q)$. Dies liefert, dass $f = f_Q|_E$ in $L^1(E)$ liegt. Außerdem erhalten wir

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q f_Q(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Satz 4.9}}{=} \int_Q f_Q\,\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\,\mathrm{d}\mu_n.$$

□

Definition (Erweiterung des Lebesgue-Integrals auf komplexwertige Funktionen). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

(1) *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt* messbar, *falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ messbar sind.*

(2) *Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar, falls $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(X)$. Dann sei*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X \operatorname{Re} f \, \mathrm{d}\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$$

das Lebesgue-Integral *von f.*

Proposition 4.12. (1) *Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \in L^1(X)$ gilt. Dieses gilt genau dann, wenn $|f| \in L^1(X)$.*

(2) *Es gelten alle Aussagen von Proposition 4.5 (außer (4) und mit $c \in \mathbb{C}$ in (6)). Insbesondere gilt*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

(3) *Es gilt der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz und der Satz von Vitali zur absoluten Stetigkeit (Sätze 4.6 und 4.8).*

Beweis. Wir zeigen die Ungleichung in (2). Sei $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = re^{i\varphi}$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq r = e^{-i\varphi} \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X e^{-i\varphi} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_X \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f) \, \mathrm{d}\mu + i \int_X \operatorname{Im}(e^{-i\varphi} f) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f) \, \mathrm{d}\mu + 0 \\ &\leq \int_X |\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f)| \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

da $\int_X \operatorname{Im}(e^{-i\varphi} f) \, \mathrm{d}\mu = \operatorname{Im}\big(\int_X e^{-i\varphi} f \, \mathrm{d}\mu \big) = 0$. □

§5 Mehrfachintegration

Satz 5.1 (1. Version des Satzes von Fubini). *Seien* $I_1 \subset \mathbb{R}^n$ *und* $I_2 \subset \mathbb{R}^m$ *abgeschlossene (nicht notwending beschränkte) Rechtecke und sei* $f \in L^1(I_1 \times I_2)$ *(bzgl. des Lebesgue-Maßes* μ_{n+m} *auf* $\mathbb{R}^{n+m}$*).*

(1) *Dann ist für fast alle* $x \in I_1$ *(*μ_n*-f.ü.) die Funktion*

$$y \mapsto f(x,y),\ y \in I_2,$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_m *auf* I_2*. Außerdem ist die fast überall in* I_1 *definierte Funktion*

$$h(x) = \int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_n *auf* I_1*.*

(2) *Analog zu (1) ist für fast alle* $y \in I_2$ *die Funktion*

$$x \mapsto f(x,y),\ x \in I_1,$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_n *auf* I_1*. Außerdem ist die fast überall in* I_2 *definierte Funktion*

$$g(y) = \int_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_m *auf* I_2*.*

(3) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{I_1\times I_2} f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} &= \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)\right)\mathrm{d}\mu_n(x)\\ &= \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\mathrm{d}\mu_m(y).\end{aligned}$$

Beweis. Zuerst benötigen wir die folgenden Vorbereitungen:

(1) Setzt man f durch 0 auf $\mathbb{R}^{n+m}\backslash(I_1 \times I_2)$ fort, so darf ohne Einschränkung $I_1 = \mathbb{R}^n$, $I_2 = \mathbb{R}^m$ angenommen werden.

(2) Wir sagen, eine Funktion $f \in L^1(I_1 \times I_2)$ habe die *Eigenschaft* $\mathcal{F}$, falls f die Aussagen (1)-(3) des Satzes 5.1 erfüllt.

(3) Im Laufe des Beweises wird gezeigt, dass jede charakteristische Funktion χ_E, $E \in \mathcal{M}_{n+m}$ mit $\mu_{n+m}(E) < \infty$, die Eigenschaft $\mathcal{F}$ hat. Der Abschluss des Beweises benutzt dann die Approximation von $f \in L^1(I_1 \times I_2)$ durch Treppenfunktionen, um die Eigenschaft $\mathcal{F}$ für f zu zeigen. Wichtige Beweismittel werden der Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz und Satz 2.8 zur Regularität des Lebesgue-Maßes sein.

Der Beweis benutzt die folgenden Lemmata:

Lemma 5.2. *Eine endliche Linearkombination von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathcal{F}$ hat ebenfalls die Eigenschaft $\mathcal{F}$.*

Beweis von Lemma 5.2. Der Beweis ist trivial. Die Messbarkeit gilt auch für Linearkombinationen und das Integral ist linear. Außerdem ist eine endliche Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge. ■

Lemma 5.3. *Sei (f_k) eine Folge in $L^1(I_1 \times I_2)$ aus Funktionen mit der Eigenschaft $\mathcal{F}$, die monoton steigend (oder fallend) gegen eine Funktion $f \in L^1(I_1 \times I_2)$ konvergiert. Dann hat auch f die Eigenschaft $\mathcal{F}$.*

Beweis von Lemma 5.3. Wir wollen den Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz anwenden. Ist $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \nearrow f$, aber $f_1 \geq 0$ nicht erfüllt, betrachte man $0 \leq f_1 - f_1 \leq f_2 - f_1 \leq \cdots \nearrow f - f_1$. Ist dagegen $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \searrow f$, betrachte man stattdessen $0 \leq f_1 - f_2 \leq f_1 - f_3 \leq \cdots \nearrow f_1 - f$.

Gelte also ohne Einschränkung $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \nearrow f$. Weil f_k die Eigenschaft $\mathcal{F}$ erfüllt, gibt es eine μ_n-Nullmenge $N_k \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$f_k(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash N_k.$$

Sei $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Dann ist $\mu_n(N) = 0$ und

$$f_k(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash N.$$

Wenden wir nun den Satz von Lebesgue auf $f_k(x, \cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash N$ an, erhalten wir den Grenzübergang

$$h_k(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f_k(x, y) \,\mathrm{d}\mu_m(y) \nearrow h(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \,\mathrm{d}\mu_m(y).$$

Dabei ist die Funktion $f(x, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^m$ messbar x-f.ü., weil für alle $y \in \mathbb{R}^m$ die Konvergenz $f_k(x, y) \nearrow f(x, y)$ gilt. Nach der Voraussetzung (f_k hat $\mathcal{F}$) ist h_k in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n+m}.$$

Der Satz von Lebesgue angewandt auf $h_k \nearrow h$ liefert sowohl die Messbarkeit von h als auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) \nearrow \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x).$$

Derselbe Satz angewandt auf $f_k \nearrow f$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ impliziert nun

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n+m} \nearrow \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \,\mathrm{d}\mu_{n+m}.$$

Daraus folgt

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} h \, \mathrm{d}\mu_n \overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f \, \mathrm{d}\mu_m \right) \mathrm{d}\mu_n.$$

Insbesondere ist

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, \mathrm{d}\mu_m(y)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ endlich, also ist auch $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ für fast alle x, und es gilt sogar $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Die gleiche Vorgehensweise wie oben mit x und y vertauscht liefert nun, dass f die Eigenschaft $\mathcal{F}$ besitzt. ∎

Lemma 5.4. *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Menge vom Typ G_δ, d.h. $E = \bigcap_{k=1}^\infty G_k$ mit offenen Mengen G_k, und sei $\mu_{n+m}(G_1) < \infty$. Dann hat χ_E die Eigenschaft $\mathcal{F}$.*

Beweis von Lemma 5.4. Wir unterscheiden fünf Fälle.

1. Fall Für ein offenes, beschränktes Rechteck $E = J_1 \times J_2$ ist der Beweis trivial. Insbesondere lautet die Aussage (3) in dem Fall

$$\mu_{n+m}(J_1 \times J_2) = \mu_n(J_1)\, \mu_m(J_2).$$

2. Fall Sei E eine beliebige Teilmenge (nicht nur vom Typ G_δ) des Randes eines Rechtecks $J_1 \times J_2$.

Bezeichnen wir für $x \in \mathbb{R}^n$ mit E_x die Schnittmenge

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\},$$

ist hier $E_x \subset \partial J_2$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ (außer für $x \notin \partial J_1$) und somit $\mu_m(E_x) = 0$. Daraus folgt, dass $\chi_E(x,\cdot)$ für fast alle x μ_m-messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x,y) \, \mathrm{d}\mu_m(y) = 0 \quad x\text{-fast überall.}$$

Folglich ist die Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x,y) \, \mathrm{d}\mu_m(y)$$

messbar, liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E \, \mathrm{d}\mu_m \right) \mathrm{d}\mu_n = 0.$$

Außerdem ist $\mu_{n+m}(E) = 0$, woraus die μ_{n+m}-Messbarkeit von χ_E und die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_E \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = 0$$

folgen. Dies liefert die Behauptung.

3. Fall Seien $J_1 \subset \mathbb{R}^n$, $J_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene und beschränkte Rechtecke und sei $J_1 \times J_2 \subset E \subset \overline{J_1 \times J_2}$. Dann folgt die Aussage „χ_E hat die Eigenschaft $\mathcal{F}$“ mit der Zerlegung $\chi_E = \chi_{J_1 \times J_2} + \chi_{E \setminus (J_1 \times J_2)}$ aus den ersten beiden Fällen und aus Lemma 5.2.

4. Fall Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen mit $\mu_{n+m}(E) < \infty$. Dann läßt sich E als Vereinigung von disjunkten, beschränkten, „halboffenen“ Rechtecken schreiben:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j, \quad J_j^\circ \subset J_j \subset \overline{J_j}.$$

Sei

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \chi_{J_j}.$$

Dann hat f_k nach dem dritten Fall und Lemma 5.2 die Eigenschaft $\mathcal{F}$. Da außerdem die Konvergenz $f_k \nearrow \chi_E$ gilt, liefert Lemma 5.3, dass χ_E die Eigenschaft $\mathcal{F}$ besitzt.

5. Fall Sei nun E eine G_δ-Menge mit $\mu_{n+m}(G_1) < \infty$. Dann gelte ohne Einschränkung $G_1 \supset G_2 \supset \cdots \searrow E$ (sonst nehme $G_1, G_2 \cap G_1, G_3 \cap G_2 \cap G_1, \ldots$). Nach dem vierten Fall hat χ_{G_k} die Eigenschaft $\mathcal{F}$. Aus $\chi_{G_k} \searrow \chi_E$ erhalten wir mit Hilfe von Lemma 5.3 die Behauptung des Lemmas. ■

Lemma 5.5. *Ist $\mu_{n+m}(N) = 0$, so hat χ_N die Eigenschaft $\mathcal{F}$. Insbesondere ist N_x für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge des $\mathbb{R}^m$.*

Beweis von Lemma 5.5. Nach dem Hauptsatz 2.8(2) gibt es eine G_δ-Menge G, $N \subset G$, mit

$$\mu_{n+m}(G) = \mu_{n+m}(N) = 0.$$

Ohne Einschränkung sei

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

G_k offen, mit $\mu_{n+m}(G_1) < \infty$. Dann ist wegen Lemma 5.4

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_G \, \mathrm{d}\mu_m \right) \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_G \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = 0.$$

Aus Lemma 4.1(8) und $\chi_G \geq 0$ folgt

$$\mu_m(G_x) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_G(x, \cdot) \, \mathrm{d}\mu_m = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\mu_m(N_x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ (da $N_x \subset G_x$ ist). Das liefert, dass $\chi_N(x, \cdot)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ μ_m-messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \chi_N(x, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_m = 0 \quad x\text{-fast überall}$$

gilt. Schließlich erhalten wir, dass die Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \chi_N(x, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_m$$

μ_n-messbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_N \,\mathrm{d}\mu_m \right) \mathrm{d}\mu_n = 0 \quad \left(= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \chi_N \,\mathrm{d}\mu_{n+m} \right)$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Lemma 5.6. *Ist $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar mit $\mu_{n+m}(E) < \infty$, so hat χ_E die Eigenschaft $\mathcal{F}$.*

Beweis von Lemma 5.6. Nach dem Hauptsatz 2.8(2) gibt es eine G_δ-Menge G ($G = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$, G_j offen, mit $\mu_{n+m}(G_1) < \infty$) mit den Eigenschaften

$$E \subset G, \quad \mu_{n+m}(G) = \mu_{n+m}(E) < \infty, \quad \mu_{n+m}(G \backslash E) = 0.$$

Also ist $N = G\backslash E$ eine Nullmenge. Aus Lemma 5.4, 5.5 und 5.2 folgt, dass $\chi_E = \chi_G - \chi_N$ die Eigenschaft $\mathcal{F}$ besitzt. ∎

Jetzt können wir die Aussagen des Satzes 5.1 beweisen. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$. Wegen $f = f^+ - f^-$, $f^\pm \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$, reicht es $f \geq 0$ zu betrachten. Dann gibt es nach Satz 3.7 Treppenfunktionen f_k mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \nearrow f$. Da $f \in L^1$ ist, ist auch $f_k \in L^1$, und in der Darstellung

$$f_k = \sum_{j=1}^{N_k} a_{jk}\, \chi_{E_{jk}}$$

mit paarweise disjunkten Mengen E_{jk}, $a_{jk} > 0$, ist das Maß $\mu_{n+m}(E_{jk}) < \infty$. Nach Lemma 5.6 und 5.2 hat f_k die Eigenschaft $\mathcal{F}$ und nach Lemma 5.3 gilt dies auch für f. □

Korollar 5.7 (Folgerung für messbare Funktionen)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist die Funktion*

$$y \mapsto f(x, y),\ y \in \mathbb{R}^m,$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar.

Insbesondere ist für eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ die Schnittmenge

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar.

Beweis. Wir teilen den Beweis in zwei Teile auf.

1. Teil Sei $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{M}_{n+m}$. Schreiben wir $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ mit den beschränkten, messbaren Mengen

$$E_k = E \cap \{(x,y) : |(x,y)| < k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

erhalten wir mit Hilfe von Lemma 5.6, dass die Schnittmenge $(E_k)_x$ für fast alle x messbar ist. Also ist auch E_x x-fast überall messbar.

2. Teil Sei f μ_{n+m}-messbar. Dann ist für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $E(a) = \{f > a\}$ messbar in $\mathbb{R}^{n+m}$. Wir wollen zeigen, dass es eine Nullmenge $N \in \mathcal{M}_n$ gibt, so dass die Menge

$$E(a)_x = \{y : f(x,y) > a\}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash N$ messbar ist.

Zuerst schreiben wir $\mathbb{Q}$ in der Form $\mathbb{Q} = \{a_k \in \mathbb{Q} : k \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es nach dem ersten Teil des Beweises für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $N_k \subset \mathbb{R}^n$, so dass $E(a_k)_x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash N_k$ messbar ist. Also ist $E(a_k)_x$ messbar für alle a_k und alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$.

Wegen

$$E(a)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} E(a_{k_j})_x$$

mit einer Teilfolge (a_{k_j}), $a_{k_j} \searrow a$, ist $E(a)_x$ messbar für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ und alle $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Hauptsatz 5.7 (Satz von Fubini). *Seien $E \in \mathcal{M}_{n+m}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:*

(1) *Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$, $y \in E_x$, messbar auf E_x.*

(2) *Ist $f \in L^1(E)$, so liegt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$, $y \in E_x$, in $L^1(E_x)$. Außerdem ist die Funktion*

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$$

bezüglich x integrierbar; im Fall $E_x = \emptyset$ sei $\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) := 0$. Ferner gilt

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x).$$

Beweis. Die Aussage (1) folgt aus Korollar 5.7, wenn man f durch 0 zu einer Funktion $\overline{f}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ fortsetzt.

Für (2) sei $f \in L^1(E)$. Dann ist auch $\overline{f} \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$ und

$$\begin{aligned}\int_E f \,\mathrm{d}\mu_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \overline{f} \,\mathrm{d}\mu_{n+m} \overset{\text{Satz 5.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \overline{f} \,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f \,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x),\end{aligned}$$

da für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^m} \overline{f} \,\mathrm{d}\mu_m = \int_{\mathbb{R}^m} f\chi_{E_x} \,\mathrm{d}\mu_m = \int_{E_x} f \,\mathrm{d}\mu_m$$

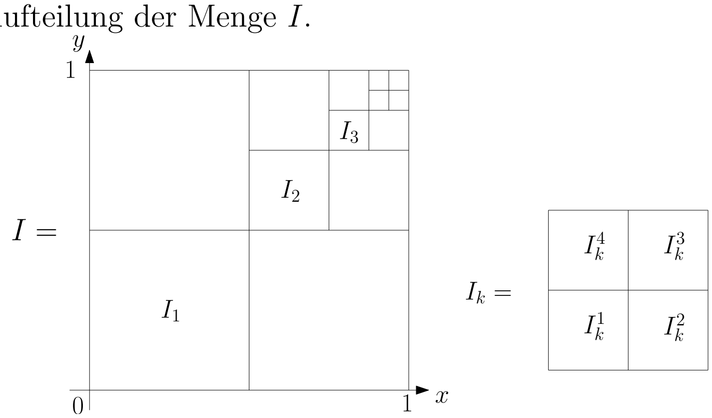
gilt. Insbesondere ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto \overline{f}(x,y) = f(x,y)\chi_{E_x}(y)$ integrierbar, d.h. $f(x,\cdot) \in L^1(E_x)$. □

Bemerkung. Aus $f \in L^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, folgt also die Gültigkeit des Satzes von Fubini. Dagegen reicht es nicht aus, dass beide iterierten Integrale

$$\int \left(\int f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int \left(\int f(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

(alles im L^1-Sinne) existieren und übereinstimmen, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Sei $n = m = 1$ und $I = [0,1]^2$. Wir betrachten die unten in der Skizze dargestellte Aufteilung der Menge I.



Weiter sei die Funktion f so definiert, dass auf I_k

$$f = \begin{cases} 1/\mu_2(I_k) & \text{in } I_k^1 \cup I_k^3 \\ -1/\mu_2(I_k) & \text{in } I_k^2 \cup I_k^4 \end{cases}$$

gilt. Sonst sei $f = 0$ in I. Dann gilt $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ für fast alle $x \in [0,1]$ bzw. $y \in [0,1]$ und also auch

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0.$$

Jedoch ist $f \notin L^1(I)$ und damit $\int_I f \, \mathrm{d}\mu_2$ nicht definiert, denn es gilt

$$\int_I |f| \, \mathrm{d}\mu_2 = \sum_k \int_{I_k} |f| \, \mathrm{d}\mu_2 = \sum_k 1 = \infty.$$

Dagegen gilt der Satz von Fubini immer, wenn $f \geq 0$ ist, wie der folgende Satz besagt.

Hauptsatz 5.8 (**Satz von Tonelli**). *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und f eine nichtnegative, messbare Funktion auf E. Dann ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$, $y \in E_x$, für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar, die Funktion $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y)$ ist messbar auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x)$$

(u.U. sind beide Seiten $+\infty$).

Beweis. Ohne Einschränkung sei $E = \mathbb{R}^{n+m}$. Um die Aussage mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über monotone Konvergenz auf den Satz von Fubini zurückzuführen, sei die Folge (f_k) definiert durch

$$f_k(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } |(x, y)| > k \\ \min\{k, f(x, y)\} & \text{für } |(x, y)| \leq k \end{cases}.$$

Dann folgt

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \nearrow f \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad f_k \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$$

und f_k genügt den Voraussetzungen des Satzes von Fubini.

Es gibt also eine gemeinsame (von $k \in \mathbb{N}$ unabhängige) Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f_k(x, y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $k \in \mathbb{N}$, in y messbar ist. Dank der punktweisen Konvergenz von f_k gegen f ist auch $f(x, y)$ in y messbar für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Nun liefert die Anwendung des Satzes von Fubini auf f_k die Messbarkeit der Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_k(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y) \nearrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y) \quad x - \text{fast überall.}$$

Folglich ist auch die Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_m(y)$$

messbar. Endlich liefert die zweifache Anwendung desselben Satzes von Lebesgue sowohl die Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)\right)\mathrm{d}\mu_n(x) \nearrow \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)\right)\mathrm{d}\mu_n(x)$$

als auch den Grenzüberang

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k\,\mathrm{d}\mu_m\right)\mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_k\,\mathrm{d}\mu_{n+m} \nearrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,\mathrm{d}\mu_{n+m}.$$

Daraus folgt nun die Behauptung. □

Beispiel. (1) Für das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zum Beweis betrachten wir zuerst die Funktion $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ auf $(0,R)\times(0,R) =: I_R$, $R>0$. Wegen

$$\int_{I_R} |f|\,\mathrm{d}\mu_2 \overset{\text{Satz 5.9}}{=} \int_0^R |\sin x|\left(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^R \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$$

ist $f \in L^1(I_R)$. Wenden wir nun den Satz von Fubini auf f, I_R an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^R \sin x\left(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{!}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^R \sin x\, e^{-xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\, e^{-xy}(-y\sin x - \cos x)\Big|_{x=0}^{x=R}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\left(e^{-Ry}(-y\sin R - \cos R) + 1\right)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Sei (R_n) eine monoton wachsende Folge in $(1,\infty)$ mit $R_n \nearrow \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{1+y^2}e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n) \to 0 \quad \text{für } n\to\infty \text{ und für alle } y>0$$

und

$$\left|\frac{1}{1+y^2}e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n)\right| \le \frac{(y+1)e^{-y}}{1+y^2} \in L^1(0,\infty).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\Big(e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n) + 1\Big)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty \Big(0 + \frac{1}{1+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}.$$

(2) Es gilt (im Sinne von L^1-Funktionen)

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zuerst haben wir

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos x}{x}\bigg|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

und

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad\to\quad \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } R\to\infty,\ \varepsilon\to 0$$

$$\frac{1-\cos x}{x}\bigg|_\varepsilon^R \quad\to\quad 0 \qquad \text{für } R\to\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

Aus der Identität $1-\cos x = 1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ erhalten wir schließlich

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \mathrm{d}y.$$

Bemerkung. Der Satz von Fubini (Satz 5.8) gilt auch für Funktionen $f : E \to \mathbb{C}$.

§6 Die Substitutionsregel

Definition. (1) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt C^1-*Diffeomorphismus*, falls $f \in C^1(U)^n$ bijektiv ist und die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist.*

(2) *Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt* lokal Lipschitz-stetig, *wenn es zu jedem $x \in U$ eine (offene) Umgebung U_x von x gibt, so dass f auf $U_x \cap U$ Lipschitz-stetig ist, d.h., es existiert ein $L_x \geq 0$ mit*

$$\left|f(y) - f(y')\right| \leq L_x|y - y'| \quad \text{für alle } y, y' \in U_x \cap U.$$

Wir schreiben kurz $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U)^m$.

Hauptsatz 6.1. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R}$ messbar. Genau dann ist $f \in L^1(V)$, wenn $f \circ \phi\,|\det D\phi|$ in $L^1(U)$ liegt. In diesem Fall gilt*

$$\int_V f \,\mathrm{d}y = \int_U f \circ \phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

Dabei ist $D\phi = (\partial_j \phi_i)_{i,j=1}^n = J_\phi$ die Funktionaldeterminante von ϕ. Formal gilt also für $y = \phi(x)$ die Identität $\mathrm{d}y = |\det D\phi(x)|\,\mathrm{d}x$.

6.1 Bilder messbarer Mengen

Lemma 6.2. *Sei $N \in \mathcal{M}_n$ eine Lebesgue-Nullmenge und sei $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(N)^m$ mit $m \geq n$. Dann ist $f(N) \in \mathcal{M}_m$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. (Vergleiche mit Lemma 6.10 in Analysis II für Jordan-Nullmengen). Zuerst sei f global Lipschitz stetig auf N, d.h., es gibt ein $L > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in N.$$

Nach Definition des Lebesgue-Maßes μ_n als äußeres Maß gibt es zu jedem $0 < \varepsilon < L^m$ halboffene Rechtecke R_j und o.E. auch sogar offene Rechtecke R_j mit rationalen Kantenlängen, so dass

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(R_j) \leq \varepsilon / L^m.$$

Da alle Kantenlängen rational sind, dürfen wir sogar nach einer weiteren Zerlegung der Rechtecke annehmen, dass für jedes einzelne $j \in \mathbb{N}$ die Menge R_j ein offener Würfel der Kantenlänge $a_j > 0$ ist. Dann folgt aus der Lipschitzstetigkeit von f, dass $f(N \cap R_j)$ in einem m-dimensionalen Würfel R'_j der Kantenlänge $\leq La_j$ liegt und ein m-dimensionales Volumen

$$\mathrm{vol}_m(R'_j) \leq (La_j)^m = L^m \mathrm{vol}_n(R_j)^{m/n}$$

hat. Somit erhalten wir

$$f(N) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(N \cap R_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R'_j$$

und wegen $\varepsilon / L^m < 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_m(R'_j) \leq L^m \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(R_j)^{m/n} \leq L^m \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(R_j) < \varepsilon.$$

Folglich ist $\mu_m(f(N)) < \varepsilon$. Da ε beliebig ist, ist die Behauptung $\mu_m(f(N)) = 0$ bewiesen.

Nun sei $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(N)^m$ und $N \in \mathcal{M}_n$ eine Lebesgue-Nullmenge. Dann gibt es zu jedem $x \in N$ eine offene Umgebung U_x von x, so dass $f|_{N \cap U_x}$ Lipschitzstetig ist. Die gewünschte Behauptung $\mu_m(f(N)) = 0$ ist nun bewiesen, falls bereits abzählbar viele Mengen U_x zum Überdecken von N ausreichen; denn nach dem bereits bewiesenen Teil ist $f(N \cap U_x) \in \mathcal{M}_m$ eine Nullmenge und eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Zur Konstruktion dieser Teilüberdeckung betrachten wir alle offenen Kugeln vom Typ $B_\delta(y) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius $0 < \delta \in \mathbb{Q}$ und Mittelpunkt $y \in \mathbb{Q}^n$; es gibt höchstens abzählbar viele solche Kugeln. Offensichtlich kann man jede der obigen Mengen U_x als abzählbare Vereinigung solcher Kugeln schreiben. Somit erhalten wir abzählbar viele Kugeln $B_j = B_{\delta_j}(y_j)$, $j \in \mathbb{N}$, die bereits N überdecken. Wählt man jetzt zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine geeignete Menge $U_j = U_x$ mit $B_j \subset U_j$ aus, erhält man eine abzählbare Überdeckung $\{U_j\}$ von N als Teilauswahl der bisherigen Überdeckung $\{U_x\}$. □

Lemma 6.3. *Sei $A \in \mathcal{M}_n$ und $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(A)^m$ mit $m \geq n$. Dann gilt $f(A) \in \mathcal{M}_m$.*

Beweis. Sei zuerst $A \in \mathcal{M}_n$ beschränkt. Nach dem Hauptsatz 2.8(3) gibt es eine F_σ-Menge $C_0 = \bigcup_j C_j$, C_j abgeschlossen, mit

$$C_0 \subset A, \quad \mu_n(A \backslash C_0) = 0, \quad \mu_n(C_0) = \mu_n(A).$$

Dann ist $A = C_0 \cup N$ mit einer Nullmenge $N \in \mathcal{M}_n$ und wir erhalten $f(A) = \bigcup_j f(C_j) \cup f(N)$. Hier ist C_j sogar kompakt und $f \in C^0(C_j)$, also ist $f(C_j) \in \mathcal{M}_m$ kompakt. Aus Lemma 6.2 folgt $F(N) \in \mathcal{M}_m$ und damit $f(A) \in \mathcal{M}_m$.

Falls $A \in \mathcal{M}_n$ unbeschränkt ist, schreiben wir $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap B_k)$ mit einer Folge von Kugeln $B_k(0)$ und erhalten mit $f(A) = \bigcup_k f(A \cap B_k)$ und dem zuvor bewiesenen Teil der Behauptung $f(A) \subset \mathcal{M}_m$. □

Lemma 6.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)^m$, $m \geq n$, und sei $A \subset U$ messbar. Dann gilt $f(A) \in \mathcal{M}_m$.*

Beweis. Wegen $f|_A \in C^{0,1}_{\text{loc}}(A)^m$ liefert Lemma 6.3 die Behauptung. □

Satz 6.5 (Spezieller Transformationssatz). *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sei $A \in \mathcal{M}_n$. Dann gilt*

$$\mu_n(T(A)) = |\det T|\,\mu_n(A).$$

Beweis. Da T linear ist, gilt $T \in C^1(\mathbb{R}^n)^n$ und $T(A) \in \mathcal{M}_n$ wegen Lemma 6.3.

Falls die Abbildung T nicht bijektiv ist (d.h. $\det T = 0$), liegt $T(A)$ in einer höchstens $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Also ist in dem Fall

$$\mu_n(T(A)) = 0 = |\det T|\,\mu_n(A).$$

Sei also T bijektiv ($\det T \neq 0$). Dann sieht man leicht, dass $\tilde{\nu}(A) := \mu_n(T(A))$ ein translationsinvariates Maß auf $\mathcal{M}_n$ mit der Eigenschaft $0 < \tilde{\nu}((0,1]^n) < \infty$ ist (weil $T((0,1]^n)$ beschränkt ist und innere Punkte enthält). Aus Satz 2.9 folgt $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}((0,1]^n)\mu_n$, und wir erhalten die Identität

$$\mu_n(T(A)) = \mu_n(T((0,1]^n))\mu_n(A).$$

Es bleibt also

$$\mu_n(T((0,1]^n)) = |\det T|$$

zu zeigen. Da T linear mit $\det T \neq 0$ ist, gibt es endlich viele elementare Zeilen- und Spaltentransformationen T_j mit

$$(T_m \circ \cdots \circ T_1) \circ T \circ (T_{m+1} \circ \cdots \circ T_M) = I.$$

Also ist T ein Produkt von endlich vielen elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen, z.B. $T = T_1 \circ \ldots \circ T_J$. Wir zeigen, dass für jede elementare Transformation T_j die Behauptung

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = |\det T_j|$$

gilt. Dann ist nämlich nach obiger Argumention auch $\mu_n(T_j(A)) = |\det T_j|\,\mu_n(A)$ für $A \in \mathcal{M}_n$, was wiederum die gewünschte Identität für T,

$$\begin{aligned}\mu_n(T((0,1]^n)) &= \mu_n(T_1 \circ \cdots \circ T_J((0,1]^n)) \\ &= |\det T_1| \cdots |\det T_J|\,\mu_n((0,1]^n) = |\det T|,\end{aligned}$$

liefert. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) Sei T_j eine Permutationsmatrix. Dann haben wir $T_j((0,1]^n) = (0,1]^n$ und $|\det T_j| = 1$.

(2) Sei $T_j = \operatorname{diag}(\alpha, 1, \ldots, 1)$ mit $\alpha \neq 0$. Dann ist $T_j((0,1]^n) = (0,\alpha] \times (0,1]^{n-1}$ bzw. $T_j((0,1]^n) = (-\alpha, 0] \times (0,1]^{n-1}$ und es gilt

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = |\alpha| = |\det T_j|.$$

(3) Sei T_j von der Form $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, also $T_j e_1 = e_1 + e_2$, $T_j e_2 = e_2$ usw. (Addition der ersten beiden Zeilenvektoren). Dann folgt aus einer geometrischen Anschauung und aus der Translationsinvarianz von μ_n

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = 1 = \mu_n((0,1]^n) \quad \text{und} \quad |\det T_j| = 1.$$

□

6.2 Beweis der Substitutionsregel

Lemma 6.6. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt für jedes halboffene Rechteck $R = (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$ und $\overline{R} \subset U$*

$$\mu_n(\phi(R)) \leq \int_R |\det D\phi| \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Bezeichne $|\cdot|$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$.

Behauptung. Sei $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für den Würfel $Q = B_{r/2}(x_0)$ mit $\overline{Q} \subset U$ gilt mit $K = \sup_{x \in Q} |D\phi(x)|$ (hier steht $|\cdot|$ für die Operatornorm von $D\phi(x)$ auf $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$)

$$\mu_n(\phi(Q)) \leq (Kr)^n = K^n \mu_n(Q). \tag{$*$}$$

Beweis der Behauptung. Aus dem „Mittelwertsatz“ im $\mathbb{R}^n$ (Integralabschätzung) folgt

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq K|x - x_0| \leq K\frac{r}{2} \quad \text{für alle } x \in Q.$$

Also ist $\phi(Q)$ in $B_{Kr/2}(\phi(x_0))$ enthalten, und $(*)$ gilt. ■

Sei nun $R = (a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}^n$, mit $\overline{R} \subset U$ gegeben, und seien $\varepsilon > 0$ und $M = \max_{x \in \overline{R}} |D\phi(x)^{-1}|$. Da $D\phi$ gleichmäßig stetig auf $\overline{R}$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|D\phi(x) - D\phi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{für alle } x, y \in \overline{R} \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Weil $a, b \in \mathbb{Q}^n$ sind, können wir R in N disjunkte halboffene Würfel R_k mit Kantenlänge kleiner als δ zerlegen. Wählen wir in $\overline{R_k}$ ein x_k mit

$$|\det D\phi(x_k)| = \min_{y \in \overline{R_k}} |\det D\phi(y)|$$

und setzen wir $T_k = D\phi(x_k)$, erhalten wir für alle $y \in \overline{R_k}$

$$|DT_k^{-1}\phi(y)| = |T_k^{-1}D\phi(y)| = |I+T_k^{-1}(D\phi(y)-D\phi(x_k))| \le 1+M\frac{\varepsilon}{M} = 1+\varepsilon. \quad (**)$$

Aus Satz 6.5, $(*)$ und $(**)$ folgt

$$\mu_n(\phi(R_k)) = \mu_n(T_kT_k^{-1}\phi(R_k)) = |\det T_k|\,\mu_n(T_k^{-1}\phi(R_k)) \le |\det T_k|(1+\varepsilon)^n\mu_n(R_k).$$

Mit Hilfe der Bijektivität von ϕ erkennt man $\phi(R)$ als disjunkte Vereinigung der Mengen $\phi(R_k)$, $1 \le k \le N$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\mu_n(\phi(R)) &= \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^N \phi(R_k)\Big) = \sum_{k=1}^N \mu_n(\phi(R_k)) \\
&\le (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^N |\det T_k|\,\mu_n(R_k) \le (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^N \int_{R_k} |\det D\phi|\,\mathrm{d}x \\
&= (1+\varepsilon)^n \int_R |\det D\phi|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

wobei sich die Abschätzung $|\det T_k| = |\det D\phi(x_k)| \le |\det D\phi(y)|$ für alle $y \in \overline{R_k}$ aus der Wahl des Punktes x_k ergibt. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0_+$ liefert nun die Behauptung. □

Lemma 6.7. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\mu_n(\phi(A)) = \int_A |\det D\phi|\,\mathrm{d}x \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{M}_{n,U},$$

wobei $\mathcal{M}_{n,U} = \{B \cap U : B \in \mathcal{M}_n\}$ ist.

Beweis. Wir teilen den Beweis in acht Schritte auf und zeigen in den ersten 4 Schritten für jede Menge $A \in \mathcal{M}_n$ die Ungleichung

$$\mu_n(\phi(A)) \le \int_A |\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

(1) Sei $O \subset \overline{O} \subset U$ offen und beschränkt. Dann kann man die Menge O in der Form $O = \bigcup_k R_k$ mit disjunkten Rechtecken R_k vom Typ $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}^n$, schreiben (siehe auch den Beweis von Satz 2.9, dyadische Würfel). Aus Lemma 6.6 folgt

$$\begin{aligned}
\mu_n(\phi(O)) = \mu_n\Big(\bigcup_k \phi(R_k)\Big) &= \sum_k \mu_n(\phi(R_k)) \\
&\le \sum_k \int_{R_k} |\det D\phi|\,\mathrm{d}x = \int_O |\det D\phi|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz gilt.

(2) Sei $O \subset U$ offen. Dann gibt es offene Mengen $O_k \subset O$ mit

$$O_k \subset \overline{O_k} \subset O_{k+1} \subset \cdots, \quad O = \bigcup_k O_k, \quad \overline{O_k} \text{ beschränkt.}$$

Mit Hilfe von Proposition 1.2(4) folgt

$$\mu_n(\phi(O)) = \lim_{k\to\infty} \mu_n(\phi(O_k)) \overset{(1)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \int_{O_k} |\det D\phi| \,\mathrm{d}x = \int_O |\det D\phi| \,\mathrm{d}x,$$

wobei die letzte Gleichheit nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt.

(3) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,U}$ mit $\overline{A} \subset U$ beschränkt. Dann gibt es nach Satz 2.8(2) eine G_δ-Menge $E = \bigcap_k E_k \subset U$ mit $E_k \subset \overline{E}_k \subset U$ offen, beschränkt,

$$A \subset E, \quad \mu_n(E \backslash A) = 0, \quad \mu_n(E) = \mu_n(A) < \infty.$$

Da E_1 kompakt in U ist und $\phi \in C^1(U)$, liegt die Funktion $|\det D\phi|$ in $L^1(E_1)$. Somit liefert der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

$$\mu_n(\phi(E)) \leq \mu_n\Big(\phi\Big(\bigcap_{j=1}^k E_j\Big)\Big) \overset{(2)}{\leq} \int_{\bigcap_{j=1}^k E_j} |\det D\phi| \,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_E |\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

Wegen $A \subset E$, $\mu_n(E) = \mu_n(A)$ folgt

$$\mu_n(\phi(A)) \leq \mu_n(\phi(E)) \leq \int_E |\det D\phi| \,\mathrm{d}x = \int_A |\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

(4) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,U}$ beliebig und sei

$$A_k = A \cap B_k(0) \cap \{x \in U : \operatorname{dist}(x, U) > 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus (3) wegen $\overline{A}_k \subset U$ und mit Proposition 1.2(4)

$$\mu_n(\phi(A)) = \lim_{k\to\infty} \mu_n(\phi(A_k)) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} |\det D\phi| \,\mathrm{d}x = \int_A |\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

Damit ist „$\leq$“ in Lemma 6.7 bewiesen.

(5) Sei $f \geq 0$ eine Treppenfunktion auf $V = \phi(U)$ in der kanonischen Form $f = \sum_{j=0}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{M}_{n,V}$ paarweise disjunkt, $\mu_n(A_j) < \infty$, $\alpha_j > 0$

paarweise verschieden. Dann folgt mit (4), den paarweise disjunkten Mengen $B_j = \phi^{-1}(A_j) \in \mathcal{M}_{n,U}$ und mit $\{\alpha_j\} = f(A_j) = f(\phi(B_j))$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_V f \,\mathrm{d}y = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu_n(A_j) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mu_n(\phi(B_j))\\ &\le \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_{B_j} |\det D\phi| \,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{j=0}^k \int_{B_j} f\circ\phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x\\ &= \int_U f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(6) Sei U offen und beschränkt und sei $f : V \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es nach Satz 3.7 eine Folge von Treppenfunktionen (f_k), $f_k \ge 0$ wie in (5), mit $f_k \nearrow f$ punktweise auf V. Also definiert $f_k\circ\phi \ge 0$ eine Folge von Treppenfunktionen auf U mit

$$f_k\circ\phi \nearrow f\circ\phi \quad \text{punktweise auf } U,$$

und $f_k\circ\phi\,|\det D\phi|$ ist messbar auf U. Aus dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz und aus (5) folgt

$$\int_V f\,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty}\int_V f_k\,\mathrm{d}y \le \lim_{k\to\infty}\int_U f_k\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x = \int_U f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

(7) Sei U eine beliebige offene Menge und sei $f : U \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es zu U eine Folge offener beschränkter Mengen $U_k \subset U$ mit $U_k \subset U_{k+1} \subset \cdots$, $U = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Mit (6) folgt

$$\int_{\phi(U_k)} f\,\mathrm{d}y \le \int_{U_k} f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir aus

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\int_{\phi(U_k)} f\,\mathrm{d}y & \xrightarrow{k\to\infty} & \displaystyle\int_{\phi(U)=V} f\,\mathrm{d}y\\ \displaystyle\int_{U_k} f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x & \xrightarrow{k\to\infty} & \displaystyle\int_U f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x\end{array}$$

die Ungleichung

$$\int_V f\,\mathrm{d}y \le \int_U f\circ\phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x. \tag{$\star$}$$

(8) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,U}$ beliebig. Wir vertauschen die Rollen von U, V und wenden (7) auf ϕ^{-1} statt ϕ. Dabei ersetzen wir f durch $\chi_{\phi(A)} \circ \phi \,|\det D\phi|$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_A |\det D\phi| \,\mathrm{d}x &= \int_U \chi_{\phi(A)} \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_V \chi_{\phi(A)} \circ \phi \circ \phi^{-1} |(\det D\phi) \circ \phi^{-1}| |\det D\phi^{-1}| \,\mathrm{d}y \\ &= \int_V \chi_{\phi(A)} \,|\det((D\phi \circ \phi^{-1}) D\phi^{-1})| \,\mathrm{d}y \\ &= \int_V \chi_{\phi(A)} \,|\det D(\phi \circ \phi^{-1})| \,\mathrm{d}y \\ &= \int_V \chi_{\phi(A)} \,\mathrm{d}y \\ &= \mu_n(\phi(A)).\end{aligned}$$

□

Korollar 6.8. *Seien U, V, ϕ wie in Hauptsatz 6.1. Dann gilt für jede messbare Funktion $f : U \to [0, \infty]$*

$$\int_V f \,\mathrm{d}y = \int_U f \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Aus Lemma 6.4 folgt $\phi^{-1}(\mathcal{M}_{n,V}) \subset \mathcal{M}_{n,U}$. Wegen

$$\{x : f \circ \phi(x) > \alpha\} = \phi^{-1}\{y : f(y) > \alpha\}$$

impliziert die Messbarkeit von f die Messbarkeit von $f \circ \phi$. Folglich ist auch $f \circ \phi \,|\det D\phi|$ messbar. Wenden wir nun $(\star)$ aus dem Teil (7) ds Beweises von Lemma 6.7 auf

$$f = (f \circ \phi \,|\det D\phi|) \circ \phi^{-1} |\det D\phi^{-1}|$$

mit V, ϕ^{-1} statt U, ϕ an, erhalten wir

$$\int_U f \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x \leq \int_V f \,\mathrm{d}y.$$

Zusammen mit $(\star)$ folgt die Gleichheit. □

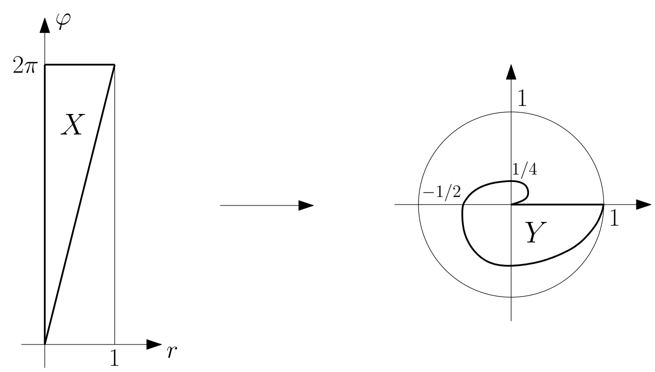
Beweis von Hauptsatz 6.1. Wir zerlegen f als $f = f^+ - f^-$ und benutzen die Eigenschaft, dass $f \in L^1(U)$ genau dann gilt, wenn $|f| \in L^1(U)$ ist. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus Korollar 6.8. □

Beispiel (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)**.** Sei

$$\phi : \{(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi)\} \to \{(x,y) : y = 0 \Rightarrow x < 0\}$$

mit $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann ist $\det D\phi = r$.

Sei nun $X = \{(r,\varphi) : 0 < r < \varphi/2\pi\}$ und $Y = \phi(X)$.



Die Substitutionsregel und der Satz von Fubini liefern

$$\mu_2(Y) = \int_X r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\varphi/2\pi} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Häufig taucht jedoch das Problem auf, dass ϕ auf ∂M, $M \subset U$, nicht mehr invertierbar ist.

Korollar 6.9. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\phi \in C^1(U)^n$, $M \subset U$ messbar und sei $M \backslash M^\circ$ ($\subset \partial M$) eine Nullmenge; hier bezeichne M° das Innere, also die Menge alle innerern Punkte, von M. Ferner sei $\phi|_{M^\circ} : M^\circ \to \phi(M^\circ)$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(1) *Für $f : M \to [0,\infty]$ messbar gilt*

$$\int_{\phi(M)} f\,\mathrm{d}y = \int_M f \circ \phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

(2) *Genau dann gehört $f : \phi(M) \to \overline{\mathbb{R}}$ zu $L^1(\phi(M))$, wenn $f \circ \phi\,|\det D\phi|$ zu $L^1(M)$ gehört. In diesem Fall gilt die Gleichung aus* (1)*.*

Beweis. Wegen $\mu_n(M\backslash M^\circ) = 0$ folgt aus Lemma 6.2, dass $\phi(M)\backslash\phi(M^\circ) \subset \phi(M\backslash M^\circ)$ eine Nullmenge ist. Dann liefert der Hauptsatz 6.1

$$\int_{\phi(M)} f\,\mathrm{d}y = \int_{\phi(M^\circ)} f\,\mathrm{d}y = \int_{M^\circ} f \circ \phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x = \int_M f \circ \phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

□

Bemerkung. Die Substitutionsregel gilt auch für Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$.

§7 L^p-Räume

Definition. *Sei $E \in \mathcal{M}_n$ und $1 \leq p < \infty$.*

(1) *Dann definiert man den* Funktionenraum

$$\tilde{L}^p(E) = \Big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\textit{oder}\ \mathbb{C})\ \textit{messbar} : \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \Big\}$$

sowie die „Seminorm“

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,E} = \bigg(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \bigg)^{1/p} \quad \textit{für alle } f \in \tilde{L}^p(E).$$

(2) *Da $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ f.ü. in E ist, definiert man zu einer Funktion $f \in \tilde{L}^p(E)$ die* Äquivalenzklasse

$$[f] = \{ f + g : g = 0 \textit{ fast überall in } E \}$$

aller Funktionen in $\tilde{L}^p(E)$, die f.ü. mit f übereinstimmen. Damit erhält man den Raum

$$L^p(E) = \{ [f] : f \in \tilde{L}^p(E) \}$$

von Äquivalenzklassen und die „L^p-Norm“

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

(3) *Der Einfachheit halber schreiben wir kurz*

$$L^p(E) = \Big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})\ \textit{messbar} : \|f\|_p := \bigg(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \bigg)^{1/p} < \infty \Big\},$$

bedenken aber, dass die Elemente von $L^p(E)$ streng genommen keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen sind. Jedes $f \in L^p(E)$ ist als „Funktion“ nur fast überall eindeutig definiert.

Achtung. Es macht keinen Sinn, von einzelnen Funktionenswerten $f(x)$, $x \in E$, zu sprechen! Die bisherige Menge $L^1(E)$ aus §4 – §5 wird jetzt auch im obigen Sinne verstanden.

Definition. *Im Fall $p = \infty$ heißt eine messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)* wesentlich beschränkt (*essentially bounded*), *falls das* essentielle Supremum

$$\operatorname*{ess\,sup}_E |f| := \inf\{ \alpha \geq 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \} < \infty$$

ist. Dann ist

$$L^\infty(E) = \big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\textit{oder}\ \mathbb{C})\ \textit{messbar} : \|f\|_{\infty,E} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < \infty \big\}.$$

Dabei ist f wieder streng genommen als Äquivalenzklasse $[f]$ zu verstehen.

Bemerkung. Sei f eine messbare Funktion auf E und $M = \operatorname{ess\,sup}_E |f|$.

(1) Ist $M < \infty$, so ist $\mu(\{|f| > M + 1/k\}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also $\mu(\{|f| > M\}) = \lim_{k\to\infty} \mu(\{|f| > M + 1/k\}) = 0$ und wir erhalten $|f| \le M$ f.ü.. Andererseits, falls $M > 0$ ist, gilt $\mu(\{|f| > M - 1/k\}) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch diese beiden Bedingungen ist $M = \|f\|_\infty$ charakterisiert.

(2) Es ist $M = \infty$ genau dann, wenn $\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0$ für alle $\alpha > 0$ ist.

Satz 7.1. *Ist* $0 < \mu(E) < \infty$, *gilt für alle messbaren Funktionen* $f : E \to \mathbb{C}$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Beweis. Sei $M = \|f\|_\infty > 0$; der Fall $M = 0$ ist trivial Ist $M' < M$, dann gilt $\mu(A) > 0$ für die Menge $A = \{x \in E : |f| > M'\}$, und wir erhalten

$$\|f\|_p \ge \left(\int_A |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \ge M' \mu(A)^{1/p} \quad \xrightarrow{p\to\infty} \quad M'.$$

Daraus folgt $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge M'$ und damit auch $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge M$. Außerdem haben wir

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \le \left(\int_E M^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = M\mu(E)^{1/p} \quad \xrightarrow{p\to\infty} \quad M,$$

woraus $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le M$ folgt; diese Ungleichung gilt offensichtlich auch im Fall $M = \infty$. Zusammenfassend erhalten wir die Behauptung. □

Lemma 7.2 (Young'sche Ungleichung). *Für* $a, b \ge 0$ *und zueinander konjugierte Exponenten* $p, q \in (1, \infty)$, *d.h.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *gilt*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Aus der Konvexität der e-Funktion folgt

$$ab = (a^p)^{1/p}(b^q)^{1/q} = \exp\left(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\right) \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Satz 7.3 (Hölder-Ungleichung). *Seien* $p, q \in [1, \infty]$ *zueinander konjugierte Exponenten (im Fall* $p = 1$ *folgt* $q = \infty$ *und umgekehrt) und seien* $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$. *Dann ist* $f \cdot g \in L^1(E)$ *und*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Insbesondere gilt im Fall $p = q = 2$ *die sogenannte (Bunjakowski-)Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

Beweis. Der Fall $p = 1$, $q = \infty$ ist trivial. Sei also $p, q \in (1, \infty)$. Ist sogar $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, folgt aus der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_E |f \cdot g| \,\mathrm{d}\mu = \int_E |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_E \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \,\|g\|_q < \infty.\end{aligned}$$

Daraus folgt sowohl $f \cdot g \in L^1(E)$ als auch die gewünschte Ungleichung.

Im allgemeinen Fall sei $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$ (sonst ist z.B. $f = 0$ und die Behauptung trivial). Die Anwendung des ersten Falls auf

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$$

liefert nun die Behauptung des Satzes. □

Korollar 7.4. *Sei eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(E) < \infty$ gegeben. Dann gilt für alle $1 \leq p < r \leq \infty$*

$$L^r(E) \subset L^p(E).$$

Beweis. Sei $f \in L^r(E)$ und $r < \infty$. Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und $\frac{p}{r} + \frac{r-p}{r} = 1$ erhalten wir

$$\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E |f|^p \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_E |f|^r \,\mathrm{d}\mu \right)^{p/r} \left(\int_E 1 \,\mathrm{d}\mu \right)^{(r-p)/r} = \|f\|_r^p \,\mu(E)^{1-p/r}.$$

Also ist $f \in L^p(E)$ mit $\|f\|_p \leq \|f\|_r \mu(E)^{1/p-1/r}$. Das ist für $r = \infty$ trivial. □

Bemerkung. Korollar 7.4 ist falsch, falls $\mu(E) = \infty$ ist. Es gilt für alle $1 \leq p < r \leq \infty$

$$L^p(E) \not\subset L^r(E) \underbrace{\not\subset L^p(E)}_{\text{falls } \mu(E)=\infty}.$$

Satz 7.5 (Ungleichung von Minkowski). *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in L^p(E)$. Dann ist $f + g \in L^p(E)$ und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind trivial. Sei $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$ der konjugierte Exponent. Zuerst folgt aus der Ungleichung

$$|f + g|^p \leq (2 \max |f|, |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

dass $f+g$ in $L^p(E)$ liegt. Außerdem erhalten wir mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ (dabei ist $(p-1)p'=p$) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_E |f+g|^{p-1}|f+g| \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_E |f+g|^{p-1}|f| \,\mathrm{d}\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g| \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \Big(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'} \Big(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \\
&\quad + \Big(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'} \Big(\int_E |g|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \\
&= \|f+g\|_p^{p/p'}(\|f\|_p + \|g\|_p) \\
&= \|f+g\|_p^{p-1}\,(\|f\|_p + \|g\|_p).
\end{aligned}$$

Da $\|f+g\|_p < \infty$ ist, folgt aus der obigen Ungleichung, falls $\|f+g\| \neq 0$, die Behauptung. $\square$

Korollar 7.6. *Für jedes $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(E)$ ein normierter Vektorraum.*

Beweis. Seien $f, g \in L^p(E)$. Dann ist $\alpha f \in L^p(E)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) und nach Satz 7.5 auch $f+g \in L^p(E)$. Also ist $L^p(E)$ ein Vektorraum.

Außerdem gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ im Sinne $f = 0$ f.ü.. Es gilt $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), und die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ ist nach Satz 7.5 erfüllt. Also ist $L^p(E)$ ein normierter Vektorraum. $\square$

Definition. *Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt* Banachraum, *falls X bezüglich $\|\cdot\|$* vollständig *ist, d.h., jede Cauchy-Folge $(x_k) \subset X$ besitzt einen Grenzwert in X.*

Hauptsatz 7.7 (Satz von Fischer-Riesz). *Für jedes $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.*

Genauer gilt (nach H. Weyl): Sei $(f_k) \subset L^p(E)$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es genau ein $f \in L^p(E)$, so dass

$$f_k \xrightarrow{k\to\infty} f \quad \textit{bezüglich der } L^p\textit{-Norm.}$$

Weiterhin gibt es eine Teilfolge (f_{k_j}) von (f_k), so dass

$$f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f \quad \textit{punktweise f. ü. in } E.$$

Schließlich gibt es ein $h \in L^p(E)$ mit

$$|f_{k_j}| \le h \quad \textit{für alle } j \in \mathbb{N} \textit{ punktweise f. ü. in } E.$$

Beweis. Sei zuerst $1 \le p < \infty$ und sei $(f_k) \subset L^p(E)$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_j}) \subset (f_k)$, $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \nearrow \infty$ mit

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Definieren wir

$$g_N = \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|, \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|,$$

erhalten wir zuerst die Abschätzung

$$\|g_N\|_p \le \sum_{j=1}^{N} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p \le \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \le 1 \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

und danach mit Hilfe des Lemmas von Fatou die Ungleichung

$$\int_E |g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{N\to\infty} |g_N|^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{N\to\infty} \int_E |g_N|^p \,\mathrm{d}\mu \le 1.$$

Also ist $g \in L^p(E)$ und folglich $|g| < \infty$ fast überall in E, d.h., $\sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$ ist für fast alle $x \in E$ eine konvergente Reihe!

Sei nun

$$f(x) := f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)),$$

falls obige Reihe konvergiert (f.ü.), sonst sei $f(x) := 0$. Es gilt also

$$f_{k_N}(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) \quad \text{fast überall in } E.$$

Außerdem ist fast überall die Abschätzung

$$|f_{k_{N+1}}(x)| \le |f_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)| \le |f_{k_1}(x)| + |g(x)| =: h(x) \in L^p(E)$$

erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass f_k gegen f in der L^p-Norm konvergiert und somit auch f in $L^p(E)$ liegt. Da (f_k) eine L^p-Cauchy-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N, so dass

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \ge N.$$

Dann gilt für $m \ge N$ nach dem Lemma von Fatou

$$\int_E |f - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{j\to\infty} |f_{k_j} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f_m\|_p^p < \varepsilon^p.$$

Also ist $f - f_m \in L^p(E)$. Daraus folgt $f \in L^p(E)$ und $f_m \xrightarrow{L^p} f$, $m \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Sei $(f_k) \subset L^\infty(E)$ eine Cauchy-Folge von Funktionen (Repräsentanten von $[f_k]$). Seien

$$\begin{aligned} N_k &= \{x \in E : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}, \\ N_{km} &= \{x \in E : |f_k(x) - f_m(x)| > \|f_k - f_m\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Dann ist die Menge $N = \bigcup_k N_k \cup \bigcup_{k,m} N_{km}$ eine Nullmenge, und $(f_k|_{E\setminus N})$ ist eine Cauchy-Folge bezüglich der (üblichen) sup-Norm. Dann gibt es eine messbare Funktion $\tilde{f}$ auf $E\setminus N$ mit

$$f_k|_{E\setminus N} \longrightarrow \tilde{f} \quad \text{gleichmäßig in } E\setminus N.$$

Daraus folgt

$$f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{in } E\setminus N \\ 0 & \text{in } N \end{cases}.$$

Die speziellen Aussagen von H. Weyl gelten hier sogar für die ganze Folge (f_k). $\square$

Bemerkung. In Satz 7.7 gilt i.Allg. nicht $f_k \to f$ f.ü. oder $|f_k| \le h$ f.ü. mit $h \in L^p$.

Beispiel. Sei $E = (0,1)$ und $p = 1$. Außerdem seien

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{2}\,\chi_{(0,1/2)},\ f_2 = \sqrt{2}\,\chi_{(1/2,1)} \\ f_3 &= \sqrt{4}\,\chi_{(0,1/4)}, \dots,\ f_6 = \sqrt{4}\,\chi_{(3/4,1)} \\ &\ \,\vdots \\ f_{2^n-1} &= \sqrt{2^n}\,\chi_{(0,1/2^n)}, \dots,\ f_{2^{n+1}-2} = \sqrt{2^n}\,\chi_{(1-1/2^n,1)}. \end{aligned}$$

Wegen $\int_E |f_{2^n-1}|\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ usw. folgt

$$f_k \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^1(E).$$

Dagegen gilt

$$\limsup_{k\to\infty} |f_k| = \infty \quad \text{fast überall in } E.$$

Eine Teilfolge im Sinne des Satzes 7.7 wäre zum Beispiel $(f_{2^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition. (1) *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ eine Funktion. Dann heißt*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

der Träger (*support*) *von f.*

(2) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Eine Teilmenge* $Y \subset X$ *heißt* dicht *in* X*, falls es zu jedem* $x \in X$ *und* $\varepsilon > 0$ *ein* $y \in Y$ *mit* $\|y - x\| < \varepsilon$ *gibt.*

(3) $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* separabel*, falls* X *eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.*

Hauptsatz 7.8. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und sei* $1 \le p < \infty$*. Dann sind die Mengen (Vektorräume)*

$$S = \{s : \Omega \to \mathbb{R} : s \text{ ist (messbare) Treppenfunktion mit } \operatorname{supp} s \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

und sogar

$$C_0^0(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$.

Außerdem ist $L^p(\Omega)$*,* $1 \le p < \infty$*, separabel.*

Bemerkung. In §8 wird sogar gezeigt, dass der Funktionenraum

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, liegt.

Beweis von Satz 7.8. Den Beweis teilen wir in vier Behauptungen auf.

Behauptung 1. *Zu* $f \in L^p(\Omega)$ *und* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $f_1 \in L^p(\Omega)$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} f_1 \subset \Omega$ *und* $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ *(genauer gesagt gibt es ein* $[f_1] \in L^p(\Omega)$ *und einen Vertreter* $f_1 \in [f_1]$ *mit den genannten Eigenschaften).*

Beweis von Beh. 1. Sei

$$E_k = \left\{x \in \Omega : \|x\| \le k \text{ und } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann ist $E_k \subset \Omega$ kompakt und $E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \nearrow \Omega$. Definieren wir $g_k := f\,\chi_{E_k}$, erhalten wir $\operatorname{supp} g_k \subset E_k$,

$$g_k \longrightarrow f \quad \text{und} \quad |g_k - f|^p \le |f|^p \in L^1(\Omega) \quad \text{punktweise f.ü. in } \Omega.$$

Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert dann

$$\|g_k - f\|_p^p = \int_\Omega |g_k - f|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

■

Behauptung 2. *Zu obigem* f_1 *gibt es ein* $s \in S$ *mit* $\|f_1 - s\|_p < \varepsilon$.

Beweis von Beh. 2. Es reicht $f_1 \ge 0$ zu betrachten. Nach Satz 3.7 existieren messbare Treppenfunktionen s_k mit $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \nearrow f_1$. Also ist $\operatorname{supp} s_k \subset \operatorname{supp} f_1 \subset \Omega$ kompakt. Daraus folgt $s_k \in S$,

$$|s_k - f_1|^p \longrightarrow 0 \quad \text{fast überall}, \quad |s_k - f_1|^p \le |f_1|^p \in L^1(\Omega).$$

Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert wieder die Konvergenz $s_k \to f_1$ in $L^p(\Omega)$. ∎

Aus Behauptungen 1. und 2. erhalten wir nun, dass

$$\|f - s_k\|_p \leq \|f - f_1\|_p + \|f_1 - s_k\|_p < 2\varepsilon$$

für k genügend groß gilt. Also liegt $S \subset L^p(\Omega)$ dicht.

Zum Beweis der Dichtheit von $C_0^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, reicht es deshalb aus, statt $f \in L^p(\Omega)$ eine charakteristische Funktion χ_E, $E \in \mathcal{M}_n$, mit $\overline{E} \subset \Omega$ kompakt zu betrachten.

Behauptung 3. *Sei $E \in \mathcal{M}_n$, $\overline{E} \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|g - \chi_E\|_p < \varepsilon$.*

Beweis von Beh. 3. Zu E gibt es nach Hauptsatz 2.8(3) eine abgeschlossene Menge $F \subset E$ (also ist F kompakt) mit $\mu(E\backslash F) < \varepsilon^p$. Daraus folgt

$$\|\chi_E - \chi_F\|_p = \left(\int_{E\backslash F} 1 \right)^{1/p} = \mu(E\backslash F)^{1/p} < \varepsilon.$$

Sei nun $d : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x) = \operatorname{dist}(x, F)$. Dann hat d die Eigenschaften

$$d \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{(Lipschitzstetigkeit)}, \quad d \geq 0,$$

und aus der Kompaktheit von F folgt

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

Definieren wir $g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$g_k = (1 - kd)_+,$$

erhalten wir die Eigenschaften

$$g_k \in C^0(\Omega), \quad 0 \leq g_k \leq 1, \quad g_k = 1 \text{ auf } F, \quad g_k(x) = 0 \text{ für } d(x) \geq \frac{1}{k};$$

also ist $g_k \in C_0^0(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ groß. Außerdem gilt

$$g_k \longrightarrow \chi_F \quad \text{punktweise in } \Omega \quad \text{und} \quad |g_k| \leq \chi_{U_1(F)} \in L^1(\Omega),$$

wobei $U_1(F) := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, F) \leq 1\}$ ist Der Satz von Lebesgue liefert jetzt $g_k \to \chi_F$ in $L^p(\Omega)$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|g_k - \chi_F\|_p < \varepsilon$ und folglich $\|g_k - \chi_E\|_p < 2\varepsilon$. ∎

Damit haben wir gezeigt, dass der Raum $C_0^0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Es bleibt nun die folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung 4. Der Raum $L^p(\Omega)$ ist separabel für $1 \leq p < \infty$.

Beweis von Beh. 4. Sei $\mathcal{M}'_n(\Omega) = \{E \in \mathcal{M}_n : E \subset \Omega,\, \mu(E) < \infty\}$. Es ist bereits bewiesen, dass die Menge

$$S_1 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} : E_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega),\, a_k \in \mathbb{R},\, N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, ist auch die Menge

$$S_2 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} : E_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega),\, a_k \in \mathbb{Q},\, N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$. Da es zu jedem E_k nach Satz7 2.8 eine offene Menge $U_k \subset \Omega$ mit

$$\mu(U_k \backslash E_k) < \varepsilon^p \quad (\Rightarrow \|\chi_{U_k} - \chi_{E_k}\|_p < \varepsilon)$$

gibt, folgt sogar, dass die Menge

$$S_3 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{U_k} : U_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ offen},\, a_k \in \mathbb{Q},\, N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

Nun gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine abzählbare Teilmenge } \mathcal{V} \subset \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ mit der Eigenschaft:} \\ \text{Zu jedem offenen } U \in \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ und } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } V \in \mathcal{V} \text{ mit} \\ \qquad V \subset U, \quad \mu(U \backslash V) < \varepsilon^p \quad (\Rightarrow \|\chi_U - \chi_V\|_p < \varepsilon). \end{array} \right. \tag{$*$}$$

Daraus folgt, dass

$$S_4 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{V_k} : V_k \in \mathcal{V},\, a_k \in \mathbb{Q},\, N \in \mathbb{N} \Big\}$$

eine *abzählbare*, dichte Teilmenge von $L^p(\Omega)$ ist.

Es bleibt nun die Existenz der Menge $\mathcal{V}$ mit der oben genannten Eigenschaft $(*)$ zu zeigen. Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' = \Big\{ & V \text{ ist halboffenes dyadisches Interval in } \Omega, \text{ d.h.,} \\ & V = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j] \subset \Omega \text{ mit } a_j, b_j \in \Big\{ \frac{k}{2^l}; k \in \mathbb{Z},\, l \in \mathbb{N}_0 \Big\} \Big\} \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{V} = \{V \text{ ist Vereinigung von } \textit{endlich} \text{ vielen paarweise disjunkten } V_j \in \mathcal{V}'\}.$$

Bekanntlich gibt es zu jedem offenen $U \in \mathcal{M}_n'(\Omega)$ eine Folge $(V_j) \subset \mathcal{V}$ mit $V_j \nearrow U$. Also gilt $\mu(U \backslash V_j) \to 0$. Da $\mathcal{V}'$ und folglich $\mathcal{V}$ abzählbar sind, folgt die gewünschte Aussage. ■

□

Bemerkung. Für $p = \infty$ ist $C_0^0(\Omega)$ *nicht dicht* in $L^\infty(\Omega)$, und $L^\infty(\Omega)$ ist *nicht separabel* (für $\Omega = (0,1)$ betrachte $f_t = \chi_{(0,t)} \in L^\infty(\Omega)$, $t \in (0,1)$).

Korollar 7.9 (Satz von der Stetigkeit im L^p-Mittel)**.** *Sei* $1 \le p < \infty$ *und sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*. Dann konvergieren die Translate* $f_\tau \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$*, definiert durch* $f_\tau(x) = f(x+\tau)$*, in der* L^p*-Norm gegen* f *für* $|\tau| \to 0$:

$$\|f_\tau - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\tau) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \quad \textit{für } |\tau| \to 0.$$

Beweis. Nach der Substitutionsregel (Satz 6.1) gilt $f_\tau \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f_\tau\|_p = \|f\|_p \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ gewählt mit $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f - f_\tau\|_p &\le \|f - g\|_p + \|g - g_\tau\|_p + \|g_\tau - f_\tau\|_p \\ &\le 2\|f - g\|_p + \|g - g_\tau\|_p \le \frac{2\varepsilon}{3} + \|g - g_\tau\|_p.\end{aligned}$$

Da $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ ist, gibt es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{supp} g \subset K, \quad \operatorname{supp} g_\tau \subset K \text{ für alle } \tau \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\tau| \le 1.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es auch ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(x+\tau)| < \frac{\varepsilon/3}{\mu(K)^{1/p}} \quad \text{für alle } x \in K,\ |\tau| < \delta,$$

gilt. Daraus folgt

$$\|g - g_\tau\|_p^p = \int_K |g - g_\tau|^p \, \mathrm{d}\mu < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p, \quad |\tau| < \delta.$$

Zusammenfassend erhalten wir $\|f - f_\tau\|_p < \varepsilon$ für $|\tau| < \delta$. □

§8 Faltungsintegrale

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) definieren wir das *Faltungsintegral*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu_n(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Frage: Unter welchen Voraussetzungen an f, g und für welche $x \in \mathbb{R}^n$ existiert dieses Integral?

Seien f, g messbar bezüglich μ_n. Dann sind auch die Funktionen $(x, y) \mapsto f(x)$ und $(x, y) \mapsto g(y)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich μ_{2n} messbar. Deshalb ist auch die Funktion

$$(x, y) \mapsto F(x, y) := f(x)g(y)$$

μ_{2n}-messbar. Mit dem C^1-Diffeomorphismus

$$\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \phi(x, y) = (x - y, y)$$

folgt nun mit einem einfachen Argument wie im Beweis von Korollar 6.8, dass

$$(x, y) \mapsto F(\phi(x, y)) = f(x - y)g(y)$$

μ_{2n}-messbar ist.

Folgerung. *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert das Integral*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, es definiert eine $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion und es gilt

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Beweis. Wegen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sind auch $|f|, |g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und nach dem Satz von Tonelli (Satz 5.9) und Korollar 6.8 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Satz 5.9}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{Kor. 6.8}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)||g(y)|\,\mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{Satz 5.9}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(|f| * |g|)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert. Wegen

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \le (|f| * |g|)(x)$$

existiert auch $f * g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, es gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

□

Satz 8.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \le p \le \infty$. Dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Faltungsintegral*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

es ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Beweis. Sei $p < \infty$ und sei zuerst $f \ge 0$, $g \ge 0$, so dass der Satz von Tonelli anwendbar ist. Mit der Hölder-Ungleichung (beachte $1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p'}$) ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^{1-1/p} f(x-y)^{1/p} g(y)\,\mathrm{d}y \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\mathrm{d}y \Big)^{(p-1)/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)^p\,\mathrm{d}y \Big)^{1/p} \\
&\le \|f\|_1^{(p-1)/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)^p\,\mathrm{d}y \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Tonelli die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \Big|^p \mathrm{d}x &\le \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)^p\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x \\
&= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)^p\,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \\
&= \|f\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)^p \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \\
&= \|f\|_1^{p-1+1} \|g\|_p^p \quad < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $f * g(x) < \infty$ fast überall, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Im allgemeinen Fall zeigt die obige Abschätzung, dass

$$|f| * |g|(x) < \infty \text{ fast überall}, \quad |f| * |g| \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \||f| * |g|\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$$

gilt. Daraus folgen die gewünschten Eigenschaften

$$|f * g(x)| \le |f| * |g|(x) < \infty \text{ f.ü.}, \quad f * g \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Der Fall $p = \infty$ ist trivial; in diesem Fall existiert $f * g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Satz 8.2. *Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Das Faltungsprodukt $*$ auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $f * g = g * f$ (Kommutativität),

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativität),

(iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Ferner gelten die Distributivgesetze

(iv) $f * (g + h) = f * g + f * h$,

(v) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Damit ist der Vektorraum $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$ mit dem Faltungsprodukt $*$ eine sogenannte kommutative, assoziative Banachalgebra $(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ über $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Bemerkung. Die Aussage (i) gilt auch für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und die Aussage (iii) gilt auch, falls eine der Funktionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Beweis von Satz 8.2. Der Beweis von (iv) und (v) ist trivial, die Aussage (iii) ist Teil von Satz 8.1. Wir zeigen die Aussagen (i) und (ii).

(i) Die Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$ existieren für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und die Integranden sind bzgl. y L^1-Funktionen. Dann folgt mit der Substitution $y' = x - y$, dass die Integrale (für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$) übereinstimmen.

(ii) Eine formale Rechnung und die Substitution $(y, z) \mapsto (y, u) = (y, y + z)$ liefern

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y)h(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z)\,\mathrm{d}z \right) h(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x - y - z)g(z)h(y)\,\mathrm{d}\mu_{2n}(y, z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x - u)g(u - y)h(y)\,\mathrm{d}\mu_{2n}(y, u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u - y)h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - u)(g * h)(u)\,\mathrm{d}u \\
&= f * (g * h)(x).
\end{aligned}$$

Für $f, g, h \geq 0$ ist dieser Beweis nach dem Satz von Tonelli korrekt. Nach dem Satz von Fubini sind in obiger Rechnung dann auch beliebige $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erlaubt, da für fast alle x die Abbildung

$$(y, z) \mapsto f(x - y - z)g(z)h(y) \quad \text{in} \quad L^1(\mathbb{R}^{2n})$$

liegt. □

Satz 8.3. *Sei $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt $f * \rho$ die Eigenschaften:*

(1) *Es ist $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $D^\alpha(f * \rho) = f * (D^\alpha \rho)$ für die Ableitung $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$ der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.*

(2) *Ist sogar $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m$, so gilt auch*

$$D^\alpha(f * \rho) = (D^\alpha f) * \rho, \quad |\alpha| \le m.$$

(3) *Ist $K := \operatorname{supp} f$ (kompakt), so liegt $\operatorname{supp}(f * \rho)$ in der (kompakten) Menge*

$$K + \operatorname{supp} \rho = \{x + y : x \in K,\, y \in \operatorname{supp} \rho\}.$$

Beweis. Sei $K' := \operatorname{supp} \rho$. Dann ist die Menge K' kompakt. Da für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$|f * \rho(x)| = \left| \int_{K'} f(x-y)\rho(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \int_{K'} |f(x-y)| M\,\mathrm{d}y = M \int_{x-K'} |f|\,\mathrm{d}\mu_n < \infty$$

gilt, ist die Faltung $f * \rho(x)$ punktweise für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert. Das letzte Integral ist nach der Hölder-Ungleichung endlich, da $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $x - K'$ kompakt ist.

(3) Sei $\operatorname{supp} f \subset K$ (kompakt) und $x \notin K + K'$. Dann ist $(x - K') \cap K = \emptyset$. Also ist $f * \rho(x) = 0$ und die Aussage (3) folgt.

(1) Für $h \ne 0$, $|h| < 1$, $i = 1, \ldots, n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{1}{h}\big(f * \rho(x + he_i) - f * \rho(x)\big) = \int_{K_x} f(y)\,\frac{1}{h}\big(\rho(x + he_i - y) - \rho(x-y)\big)\,\mathrm{d}y,$$

wobei nur über die kompakte Menge $K_x = x - U_1(K')$ integriert wird. Für $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt nach dem Mittelwertsatz mit $0 < \theta < 1$

$$\left|\frac{1}{h}\big(\rho(x + he_i - y) - \rho(x-y)\big)\right| = |\partial_i \rho(x + \theta h e_i - y)| \le M \quad \text{für alle } h, y$$

und

$$\frac{1}{h}\big(\rho(x + he_i - y) - \rho(x-y)\big) \xrightarrow{h \to 0} \partial_i \rho(x-y).$$

Wenden wir nun den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz auf den Integranden $f(y)\,\frac{1}{h}\big(\rho(x + he_i - y) - \rho(x-y)\big)$ mit der L^1-Schranke $Mf\chi_{K_x}$ an, erhalten wir

$$\frac{1}{h}\big(f * \rho(x + he_i) - f * \rho(x)\big) \xrightarrow{h \to 0} f * \partial_i \rho(x).$$

Daraus folgt die Aussage (1) für $|\alpha| = 1$. Für höhere Ableitungen gehen wir per Induktion vor.

(2) Der Beweis kann mit Hilfe partieller Integration durchgeführt werden. □

Definition. *Sei* $0 \le \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$*, ein sog.* Friedrichs'scher Glättungskern*, gegeben. Ferner sei für* $\varepsilon > 0$

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

so dass also auch $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$ *für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt. Dann definiert man für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \le p \le \infty$*, die* Friedrichs'sche Glättung

$$f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Satz 8.4. *Sei* ρ *ein Friedrichs'scher Glättungskern und* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \le p < \infty$*. Dann gilt*

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \longrightarrow 0 \quad \textit{für } \varepsilon \to 0.$$

Beweis. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1$ ist $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\rho_\varepsilon(y)^{1/p}\rho_\varepsilon(y)^{1/p'}\,\mathrm{d}y \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \right)^{1/p} \cdot 1 \end{aligned}$$

x-fast überall. Mit Hilfe des Satzes von Tonelli erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\|f_{-y} - f\|_p^p\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

wobei eigentlich nur über die Menge $\{y : \frac{y}{\varepsilon} \in \operatorname{supp}\rho\} = \varepsilon \operatorname{supp}\rho$ integriert werden muss. Also gibt es ein $M > 0$, so dass

$$\|f_\varepsilon - f\|_p^p \le \sup_{\|y\| \le \varepsilon M} \|f_y - f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = \sup_{\|y\| \le \varepsilon M} \|f_y - f\|_p^p \quad \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad 0$$

(nach Korollar 7.9) gilt. □

Bemerkung. Aufgrund der Approximationseigenschaft von Satz 8.4 heißt die Familie der Glättungskerne $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine *Approximation der Identität*:

$$\rho_\varepsilon * f \longrightarrow f = \mathrm{id}(f), \quad \varepsilon \to 0.$$

Korollar 8.5. *Die Banachalgebra* $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$ *besitzt kein Eins-Element, d.h., es gibt kein Element* $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $e * f = f$ *für alle* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ein Eins-Element. Dann gilt nach Satz 8.4

$$\rho_\varepsilon = e * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0_+} e \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Für eine Nullfolge (ε_k) liefert der Satz von Fischer-Riesz die Konvergenz

$$\rho_{\varepsilon_k} \longrightarrow e \quad \text{punktweise fast überall in } \mathbb{R}^n.$$

Jedoch gilt auch

$$\rho_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{für alle } 0 \neq x \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt $e = 0$, was den Widerspruch liefert. □

Korollar 8.6. *Sei* $1 \le p < \infty$. *Für* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen ist* $C_0^\infty(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\delta > 0$. Nach Satz 7.8 gibt es ein $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \Omega$, so dass $\|f - \tilde{f}\|_{p,\Omega} < \delta$ gilt. Setzt man $f, \tilde{f}$ durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fort, so ist

$$\|f - \tilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^n} < \delta.$$

Außerdem gibt es nach Satz 8.3 und 8.4 ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_{p,\mathbb{R}^n} < \delta, \quad \tilde{f}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0^\infty(\Omega),$$

gilt. Daraus folgt auch $\|f - \tilde{f}_\varepsilon\|_{p,\mathbb{R}^n} < 2\delta$ und $\|f - \tilde{f}_\varepsilon\|_{p,\Omega} < 2\delta$. □