§5 Mehrfachintegration

Satz 5.1 (1. Version des Satzes von Fubini). *Seien $I_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $I_2 \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene (nicht notwending beschränkte) Rechtecke und sei $f \in L^1(I_1 \times I_2)$ (bzgl. des Lebesgue-Maßes μ_{n+m} auf $\mathbb{R}^{n+m}$).*

(1) *Dann ist für fast alle $x \in I_1$ (μ_n-f.ü.) die Funktion*

$$y \mapsto f(x,y),\ y \in I_2,$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_m auf I_2. Außerdem ist die fast überall in I_1 definierte Funktion

$$h(x) = \int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_n auf I_1.

(2) *Analog zu (1) ist für fast alle $y \in I_2$ die Funktion*

$$x \mapsto f(x,y),\ x \in I_1,$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_n auf I_1. Außerdem ist die fast überall in I_2 definierte Funktion

$$g(y) = \int_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_n(x)$$

messbar und integrierbar bzgl. μ_m auf I_2.

(3) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{I_1\times I_2} f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} &= \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)\right)\mathrm{d}\mu_n(x)\\ &= \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\mathrm{d}\mu_m(y).\end{aligned}$$

Beweis. Erfolgt später. □

Korollar 5.7 (Folgerung für messbare Funktionen)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist die Funktion*

$$y \mapsto f(x,y),\ y \in \mathbb{R}^m,$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar.

Insbesondere ist für eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ die Schnittmenge

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in E\}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar.

Beweis. Erfolgt später. □

Hauptsatz 5.8 (Satz von Fubini). *Seien $E \in \mathcal{M}_{n+m}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:*

(1) *Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$, $y \in E_x$, messbar auf E_x.*

(2) *Ist $f \in L^1(E)$, so liegt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$, $y \in E_x$, in $L^1(E_x)$. Außerdem ist die Funktion*

$$x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$$

bezüglich x integrierbar; im Fall $E_x = \emptyset$ sei $\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) := 0$. Ferner gilt

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x).$$

Beweis. Die Aussage (1) folgt aus Korollar 5.7, wenn man f durch 0 zu einer Funktion $\overline{f}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ fortsetzt.

Für (2) sei $f \in L^1(E)$. Dann ist auch $\overline{f} \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$ und

$$\begin{aligned} \int_E f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu_{n+m} &\overset{\text{Satz 5.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x), \end{aligned}$$

da für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^m} \overline{f}\,\mathrm{d}\mu_m = \int_{\mathbb{R}^m} f\chi_{E_x}\,\mathrm{d}\mu_m = \int_{E_x} f\,\mathrm{d}\mu_m$$

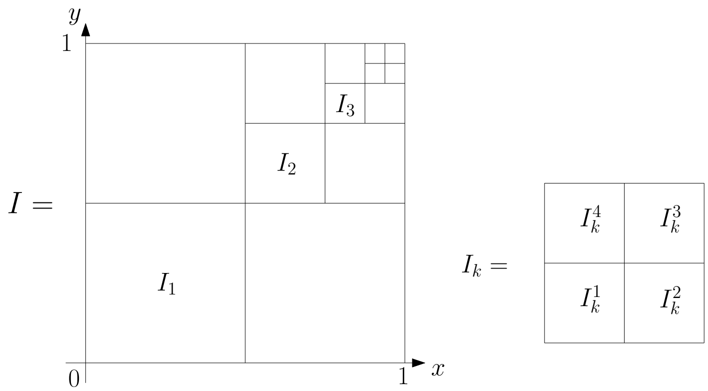
gilt. Insbesondere ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto \overline{f}(x,y) = f(x,y)\chi_{E_x}(y)$ integrierbar, d.h. $f(x,\cdot) \in L^1(E_x)$. □

Bemerkung. Aus $f \in L^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, folgt also die Gültigkeit des Satzes von Fubini. Dagegen reicht es nicht aus, dass beide iterierten Integrale

$$\int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int \left(\int f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

(alles im L^1-Sinne) existieren und übereinstimmen, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Sei $n = m = 1$ und $I = [0,1]^2$. Wir betrachten die unten in der Skizze dargestellte Aufteilung der Menge I.



Weiter sei die Funktion f so definiert, dass auf I_k

$$f = \begin{cases} 1/\mu_2(I_k) & \text{in } I_k^1 \cup I_k^3 \\ -1/\mu_2(I_k) & \text{in } I_k^2 \cup I_k^4 \end{cases}$$

gilt. Sonst sei $f = 0$ in I. Dann gilt $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ für fast alle $x \in [0,1]$ bzw. $y \in [0,1]$ und also auch

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 0.$$

Jedoch ist $f \notin L^1(I)$ und damit $\int_I f\,\mathrm{d}\mu_2$ nicht definiert, denn es gilt

$$\int_I |f|\,\mathrm{d}\mu_2 = \sum_k \int_{I_k} |f|\,\mathrm{d}\mu_2 = \sum_k 1 = \infty.$$

Dagegen gilt der Satz von Fubini immer, wenn $f \geq 0$ ist, wie der folgende Satz besagt.

Hauptsatz 5.9 (**Satz von Tonelli**). *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und f eine nichtnegative, messbare Funktion auf E. Dann ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$, $y \in E_x$, für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ messbar, die Funktion $x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$ ist messbar auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x)$$

(u.U. sind beide Seiten $+\infty$).

Beweis. Ohne Einschränkung sei $E = \mathbb{R}^{n+m}$. Um die Aussage mit Hilfe des Satzes von Lebesgue über monotone Konvergenz auf den Satz von Fubini zurückzuführen, sei die Folge (f_k) definiert durch

$$f_k(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } |(x,y)| > k \\ \min\{k, f(x,y)\} & \text{für } |(x,y)| \leq k \end{cases}.$$

Dann folgt

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \nearrow f \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad f_k \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$$

und f_k genügt den Voraussetzungen des Satzes von Fubini.

Es gibt also eine gemeinsame (von $k \in \mathbb{N}$ unabhängige) Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass $f_k(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash N$, $k \in \mathbb{N}$, in y messbar ist. Dank der punktweisen Konvergenz von f_k gegen f ist auch $f(x,y)$ in y messbar für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash N$. Nun liefert die Anwendung des Satzes von Fubini auf f_k die Messbarkeit der Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \nearrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \quad x - \text{fast überall.}$$

Folglich ist auch die Abbildung

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y)$$

messbar. Endlich liefert die zweifache Anwendung desselben Satzes von Lebesgue sowohl die Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x) \nearrow \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_m(y) \right) \mathrm{d}\mu_n(x)$$

als auch den Grenzüberang

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_k\,\mathrm{d}\mu_m \right) \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_k\,\mathrm{d}\mu_{n+m} \nearrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,\mathrm{d}\mu_{n+m}.$$

Daraus folgt nun die Behauptung. □

Beispiel. (1) Für das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zum Beweis betrachten wir zuerst die Funktion $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ auf $(0,R) \times (0,R) =: I_R$, $R > 0$. Wegen

$$\int_{I_R} |f|\,\mathrm{d}\mu_2 \overset{\text{Satz 5.9}}{=} \int_0^R |\sin x| \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^R \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$$

ist $f \in L^1(I_R)$. Wenden wir nun den Satz von Fubini auf f, I_R an, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^R \sin x\Big(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{!}{=} \int_0^\infty \Big(\int_0^R \sin x\, e^{-xy}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\, e^{-xy}(-y\sin x - \cos x)\Big|_{x=0}^{x=R}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\Big(e^{-Ry}(-y\sin R - \cos R) + 1\Big)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Sei (R_n) eine monoton wachsende Folge in $(1,\infty)$ mit $R_n \nearrow \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{1+y^2}e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n) \to 0 \quad \text{für } n\to\infty \text{ und für alle } y>0$$

und

$$\Big|\frac{1}{1+y^2}e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n)\Big| \le \frac{(y+1)e^{-y}}{1+y^2} \in L^1(0,\infty).$$

Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\Big(e^{-R_n y}(-y\sin R_n - \cos R_n) + 1\Big)\,\mathrm{d}y \\ &\qquad \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty \Big(0 + \frac{1}{1+y^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) Es gilt (im Sinne von L^1-Funktionen)

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zuerst haben wir

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos x}{x}\Big|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

und

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \to \quad \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } R\to\infty,\ \varepsilon\to 0$$

$$\frac{1-\cos x}{x}\Big|_\varepsilon^R \quad \to \quad 0 \qquad \text{für } R\to\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

Aus der Identität $1-\cos x = 1-\cos\big(2\frac{x}{2}\big) = 2\sin^2\big(\frac{x}{2}\big)$ erhalten wir schließlich

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\Big)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big(\frac{\sin y}{y}\Big)^2\,\mathrm{d}y.$$

Bemerkung. Der Satz von Fubini (Satz 5.8) gilt auch für Funktionen $f : E \to \mathbb{C}$.

§6 Die Substitutionsregel

Definition. (1) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt C^1-*Diffeomorphismus*, falls $f \in C^1(U)^n$ bijektiv ist und die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist.*

(2) *Eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt* lokal Lipschitz-stetig, *wenn es zu jedem $x \in U$ eine (offene) Umgebung U_x von x gibt, so dass f auf $U_x \cap U$ Lipschitz-stetig ist, d.h., es existiert ein $L_x \geq 0$ mit*

$$\big|f(y) - f(y')\big| \leq L_x|y - y'| \quad \text{für alle } y, y' \in U_x \cap U.$$

Wir schreiben kurz $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(U)^m$.

Hauptsatz 6.1. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R}$ messbar. Genau dann ist $f \in L^1(V)$, wenn $f \circ \phi\,|\det D\phi|$ in $L^1(U)$ liegt. In diesem Fall gilt*

$$\int_V f \,\mathrm{d}y = \int_U f \circ \phi\,|\det D\phi|\,\mathrm{d}x.$$

Dabei ist $D\phi = (\partial_j\phi_i)_{i,j=1}^n = J_\phi$ die Funktionaldeterminante von ϕ. Formal gilt also für $y = \phi(x)$ die Identität $\mathrm{d}y = |\det D\phi(x)|\,\mathrm{d}x$.

6.1 Bilder messbarer Mengen

Lemma 6.2. *Sei $N \in \mathcal{M}_n$ eine Lebesgue-Nullmenge und sei $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(N)^m$ mit $m \geq n$. Dann ist $f(N) \in \mathcal{M}_m$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. (vergleiche mit Lemma 6.10 in Analysis II für Jordan-Nullmengen). □

Lemma 6.3. *Sei $A \in \mathcal{M}_n$ und $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(A)^m$ mit $m \geq n$. Dann gilt $f(A) \in \mathcal{M}_m$.*

Beweis. Sei zuerst $A \in \mathcal{M}_n$ beschränkt. Nach dem Hauptsatz 2.8(3) gibt es eine F_σ-Menge $C_0 = \bigcup_j C_j$, C_j abgeschlossen, mit

$$C_0 \subset A, \quad \mu_n(A \backslash C_0) = 0, \quad \mu_n(C_0) = \mu_n(A).$$

Dann ist $A = C_0 \cup N$ mit einer Nullmenge $N \in \mathcal{M}_n$ und wir erhalten, dass $f(A) = \bigcup_j f(C_j) \cup f(N)$ gilt. Hier ist C_j sogar kompakt und $f \in C^0(C_j)$, also ist $f(C_j) \in \mathcal{M}_m$ kompakt. Aus Lemma 6.2 folgt $F(N) \in \mathcal{M}_m$ und damit $f(A) \in \mathcal{M}_m$.

Falls $A \in \mathcal{M}_n$ unbeschränkt ist, schreiben wir $A = \bigcup_{k=1}^\infty (A \cap B_k)$. □

Lemma 6.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)^m$, $m \geq n$, und sei $A \subset U$ messbar. Dann gilt $f(A) \in \mathcal{M}_m$.*

Beweis. Wegen $f|_A \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(A)^m$ liefert Lemma 6.3 die Behauptung. $\square$

Satz 6.5 (Spezieller Transformationssatz). *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sei $A \in \mathcal{M}_n$. Dann gilt*

$$\mu_n(T(A)) = |\det T|\, \mu_n(A).$$

Beweis. Da T linear ist, gilt $T \in C^1(\mathbb{R}^n)^n$ und $T(A) \in \mathcal{M}_n$ wegen Lemma 6.3.

Falls die Abbildung T nicht bijektiv ist (d.h. $\det T = 0$), liegt $T(A)$ in einer höchstens $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Also ist in dem Fall

$$\mu_n(T(A)) = 0 = |\det T|\, \mu_n(A).$$

Sei also T bijektiv ($\det T \neq 0$). Dann sieht man leicht, dass $\tilde{\nu}(A) := \mu_n(T(A))$ ein translationsinvariates Maß auf $\mathcal{M}_n$ mit der Eigenschaft $0 < \tilde{\nu}((0,1]^n) < \infty$ ist (weil $T((0,1]^n)$ beschränkt ist und innere Punkte enthält). Aus Satz 2.9 folgt $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}((0,1]^n)\mu_n$, und wir erhalten die Identität

$$\mu_n(T(A)) = \mu_n(T((0,1]^n))\mu_n(A).$$

Es bleibt also

$$\mu_n(T((0,1]^n)) = |\det T|$$

zu zeigen. Da T linear mit $\det T \neq 0$ ist, gibt es endlich viele elementare Zeilen- und Spaltentransformationen T_j mit

$$(T_m \circ \cdots \circ T_1) \circ T \circ (T_{m+1} \circ \cdots \circ T_M) = I.$$

Also ist T ein Produkt von endlich vielen elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen. Wir zeigen, dass für jede elementare Transformation T_j die Behauptung

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = |\det T_j|$$

gilt. Dann ist nämlich auch $\mu_n(T_j(A)) = |\det T_j|\, \mu_n(A)$ für $A \in \mathcal{M}_n$, was wiederum die gewünschte Identität für T

$$\begin{aligned}\mu_n(T((0,1]^n)) &= \mu_n(T_1 \circ \cdots \circ T_M((0,1]^n))\\ &= |\det T_1| \cdots |\det T_M|\, \mu_n((0,1]^n) = |\det T|\end{aligned}$$

liefert. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) Sei T_j eine Permutationsmatrix. Dann haben wir $T_j((0,1]^n) = (0,1]^n$ und $|\det T_j| = 1$.

(2) Sei $T_j = \operatorname{diag}(\alpha, 1, \ldots, 1)$ mit $\alpha \neq 0$. Dann ist $T_j((0,1]^n) = (0,\alpha] \times (0,1]^{n-1}$ bzw. $T_j((0,1]^n) = (-\alpha, 0] \times (0,1]^{n-1}$ und es gilt

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = |\alpha| = |\det T_j|.$$

(3) Sei T_j von der Form $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, also $T_j e_1 = e_1 + e_2$, $T_j e_2 = e_2$ usw. (Addition der ersten beiden Zeilenvektoren). Dann folgt aus einer geometrischen Anschauung und aus der Translationsinvarianz von μ_n, dass

$$\mu_n(T_j((0,1]^n)) = 1 = \mu_n((0,1]^n) \quad \text{und} \quad |\det T_j| = 1$$

gilt.

□

6.2 Beweis der Substitutionsregel

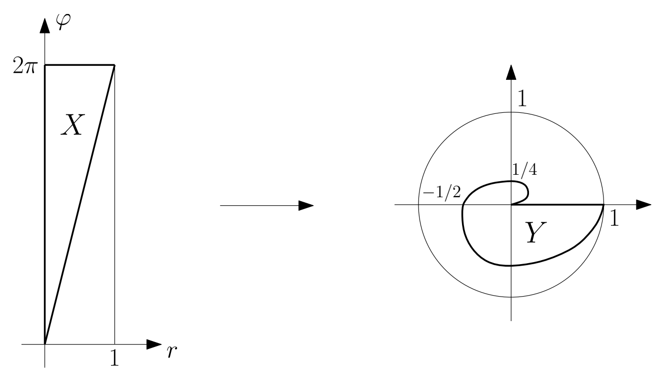
Der Beweis vom Hauptsatz 6.1 erfolgt später.

Beispiel (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)**.** Sei

$$\phi : \{(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi)\} \to \{(x,y) : y = 0 \Rightarrow x < 0\}$$

mit $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann ist $\det D\phi = r$.

Sei nun $X = \{(r,\varphi) : 0 < r < \varphi/2\pi\}$ und $Y = \phi(X)$.



Die Substitutionsregel und der Satz von Fubini liefern

$$\mu_2(Y) = \int_X r \, \mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varphi/2\pi} r \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{4\pi^2} \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Häufig taucht jedoch das Problem auf, dass ϕ auf ∂M, $M \subset U$, nicht mehr invertierbar ist.

Korollar 6.9. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\phi \in C^1(U)^n$, $M \subset U$ messbar und sei $M \backslash M^\circ$ ($\subset \partial M$) eine Nullmenge; hier bezeichne M° das Innere, also die Menge alle innerern Punkte, von M. Ferner sei $\phi|_{M^\circ} : M^\circ \to \phi(M^\circ)$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(1) *Für* $f : M \to [0, \infty]$ *messbar gilt*

$$\int_{\phi(M)} f \,\mathrm{d}y = \int_M f \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

(2) *Genau dann gehört* $f : \phi(M) \to \overline{\mathbb{R}}$ *zu* $L^1(\phi(M))$, *wenn* $f \circ \phi \,|\det D\phi|$ *zu* $L^1(M)$ *gehört. In diesem Fall gilt die Gleichung aus* (1).

Beweis. Wegen $\mu_n(M \setminus M^\circ) = 0$ folgt aus Lemma 6.2, dass $\phi(M) \setminus \phi(M^\circ) \subset \phi(M \setminus M^\circ)$ eine Nullmenge ist. Dann liefert der Hauptsatz 6.1

$$\int_{\phi(M)} f \,\mathrm{d}y = \int_{\phi(M^\circ)} f \,\mathrm{d}y = \int_{M^\circ} f \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x = \int_M f \circ \phi \,|\det D\phi| \,\mathrm{d}x.$$

□

Bemerkung. Die Substitutionsregel gilt auch für Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$.

§7 L^p-Räume

Definition. *Sei $E \in \mathcal{M}_n$ und $1 \le p < \infty$.*

(1) *Dann definiert man den* Funktionenraum

$$\tilde{L}^p(E) = \Big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\textit{oder } \mathbb{C}) \ \textit{messbar}: \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \Big\}$$

sowie die „Seminorm"

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,E} = \Big(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \quad \textit{für alle } f \in \tilde{L}^p(E).$$

(2) *Da $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ f.ü. in E ist, definiert man zu einer Funktion $f \in \tilde{L}^p(E)$ die* Äquivalenzklasse

$$[f] = \{ f + g : g = 0 \ \textit{fast überall in } E \}$$

aller Funktionen in $\tilde{L}^p(E)$, die f.ü. mit f übereinstimmen. Damit erhält man den Raum

$$L^p(E) = \{ [f] : f \in \tilde{L}^p(E) \}$$

von Äquivalenzklassen und die „L^p-Norm"

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

(3) *Der Einfachheit halber schreiben wir kurz*

$$L^p(E) = \Big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) \ \textit{messbar}: \|f\|_p := \Big(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} < \infty \Big\},$$

bedenken aber, dass die Elemente von $L^p(E)$ streng genommen keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen sind. Jedes $f \in L^p(E)$ ist als „Funktion" nur fast überall eindeutig definiert.

Achtung. Es macht keinen Sinn, von einzelnen Funktionenswerten $f(x)$, $x \in E$, zu sprechen! Die bisherige Menge $L^1(E)$ aus §4 – §5 wird jetzt auch im obigen Sinne verstanden.

Definition. *Im Fall $p = \infty$ heißt eine messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)* wesentlich beschränkt (*essentially bounded*), *falls das* essentielle Supremum

$$\operatorname*{ess\,sup}_E |f| := \inf\{ \alpha \ge 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \} < \infty$$

ist. Dann ist

$$L^\infty(E) = \big\{ f : E \to \mathbb{R}\,(\textit{oder } \mathbb{C}) \ \textit{messbar}: \|f\|_{\infty,E} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < \infty \big\}.$$

Dabei ist f wieder streng genommen als Äquivalenzklasse $[f]$ zu verstehen.

Bemerkung. Sei f eine messbare Funktion auf E und $M = \operatorname{ess\,sup}_E |f|$.

(1) Ist $M < \infty$, so ist $\mu(\{|f| > M + 1/k\}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also $\mu(\{|f| > M\}) = \lim_{k\to\infty} \mu(\{|f| > M + 1/k\}) = 0$ und wir erhalten $|f| \le M$ f.ü.. Andererseits, falls $M > 0$ ist, gilt $\mu(\{|f| > M - 1/k\}) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch diese beiden Bedingungen ist $M = \|f\|_\infty$ charakterisiert.

(2) Es ist $M = \infty$ genau dann, wenn $\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0$ für alle $\alpha > 0$ ist.

Satz 7.1. *Ist $0 < \mu(E) < \infty$, gilt für alle messbaren Funktionen $f : E \to \mathbb{C}$*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Beweis. Sei $M = \|f\|_\infty > 0$; der Fall $M = 0$ ist trivial Ist $M' < M$, dann gilt $\mu(A) > 0$ für die Menge $A = \{x \in E : |f| > M'\}$, und wir erhalten

$$\|f\|_p \ge \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \ge M' \mu(A)^{1/p} \quad \xrightarrow{p\to\infty} \quad M'.$$

Daraus folgt $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge M'$ und damit auch $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge M$. Außerdem haben wir

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \le \left(\int_E M^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = M \mu(E)^{1/p} \quad \xrightarrow{p\to\infty} \quad M,$$

woraus $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le M$ folgt; diese Ungleichung gilt offensichtlich auch im Fall $M = \infty$. Zusammenfassend erhalten wir die Behauptung. □

Lemma 7.2 (Young'sche Ungleichung). *Für $a, b \ge 0$ und zueinander konjugierte Exponenten $p, q \in (1, \infty)$, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gilt*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Aus der Konvexität der e-Funktion folgt

$$ab = (a^p)^{1/p} (b^q)^{1/q} = \exp\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \right) \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Satz 7.3 (Hölder-Ungleichung). *Seien $p, q \in [1, \infty]$ zueinander konjugierte Exponenten (im Fall $p = 1$ folgt $q = \infty$ und umgekehrt) und seien $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(E)$ und*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Insbesondere gilt im Fall $p = q = 2$ die sogenannte (Bunjakowski-)Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

Beweis. Der Fall $p = 1$, $q = \infty$ ist trivial. Sei also $p, q \in (1, \infty)$. Ist sogar $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, folgt aus der Young-Ungleichung

$$\int_E |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) \mathrm{d}\mu$$
$$= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \, \|g\|_q < \infty.$$

Daraus folgt sowohl $f \cdot g \in L^1(E)$ als auch die gewünschte Ungleichung.

Im allgemeinen Fall sei $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$ (sonst ist z.B. $f = 0$ und die Behauptung trivial). Die Anwendung des ersten Falls auf

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$$

liefert nun die Behauptung des Satzes. □

Korollar 7.4. *Sei eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(E) < \infty$ gegeben. Dann gilt für alle $1 \leq p < r \leq \infty$*

$$L^r(E) \subset L^p(E).$$

Beweis. Sei $f \in L^r(E)$ und $r < \infty$. Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und $\frac{p}{r} + \frac{r-p}{r} = 1$ erhalten wir

$$\int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f|^p \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_E |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right)^{p/r} \left(\int_E 1 \, \mathrm{d}\mu \right)^{(r-p)/r} = \|f\|_r^p \, \mu(E)^{1-p/r}.$$

Also ist $f \in L^p(E)$ mit $\|f\|_p \leq \|f\|_r \mu(E)^{1/p-1/r}$. Das ist für $r = \infty$ trivial. □

Bemerkung. Korollar 7.4 ist falsch, falls $\mu(E) = \infty$ ist. Es gilt für alle $1 \leq p < r \leq \infty$

$$L^p(E) \not\subset L^r(E) \underbrace{\not\subset L^p(E)}_{\text{falls } \mu(E)=\infty}.$$

Satz 7.5 (Ungleichung von Minkowski). *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in L^p(E)$. Dann ist $f + g \in L^p(E)$ und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind trivial. Sei $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$ der konjugierte Exponent. Zuerst folgt aus der Ungleichung

$$|f + g|^p \leq (2 \max |f|, |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

dass $f+g$ in $L^p(E)$ liegt. Außerdem erhalten wir mit Hilfe der Hölder-Ungleichung für $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ (dabei ist $(p-1)p'=p$) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p = \int_E |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_E |f+g|^{p-1}|f+g| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_E |f+g|^{p-1}|f| \,\mathrm{d}\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p'} \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p'} \left(\int_E |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\
&= \|f+g\|_p^{p/p'} (\|f\|_p + \|g\|_p) \\
&= \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p).
\end{aligned}$$

Da $\|f+g\|_p < \infty$ ist, folgt aus der obigen Ungleichung, falls $\|f+g\| \neq 0$, die Behauptung. □

Korollar 7.6. *Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(E)$ ein normierter Vektorraum.*

Beweis. Seien $f, g \in L^p(E)$. Dann ist $\alpha f \in L^p(E)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ und nach Satz 7.5 auch $f+g \in L^p(E)$. Also ist $L^p(E)$ ein Vektorraum.

Außerdem gilt $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ im Sinne $f = 0$ f.ü.. Es gilt $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, und die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ist nach Satz 7.5 erfüllt. Also ist $L^p(E)$ ein normierter Vektorraum. □

Definition. *Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt* Banachraum*, falls X bezüglich $\|\cdot\|$* vollständig *ist, d.h., jede Cauchy-Folge $(x_k) \subset X$ besitzt einen Grenzwert in X.*

Hauptsatz 7.7 (Satz von Fischer-Riesz). *Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.*

Genauer gilt (nach H. Weyl): Sei $(f_k) \subset L^p(E)$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es genau ein $f \in L^p(E)$, so dass

$$f_k \xrightarrow{k\to\infty} f \quad \textit{bezüglich der } L^p\textit{-Norm.}$$

Weiterhin gibt es eine Teilfolge (f_{k_j}) von (f_k), so dass

$$f_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} f \quad \textit{punktweise f. ü. in } E.$$

Schließlich gibt es ein $h \in L^p(E)$ mit

$$|f_{k_j}| \leq h \quad \textit{für alle } j \in \mathbb{N} \textit{ punktweise f. ü. in } E.$$

Beweis. Sei zuerst $1 \leq p < \infty$ und sei $(f_k) \subset L^p(E)$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_j}) \subset (f_k)$, $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \nearrow \infty$ mit

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Definieren wir

$$g_N = \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|, \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|,$$

erhalten wir zuerst die Abschätzung

$$\|g_N\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \leq 1 \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

und danach mit Hilfe des Lemmas von Fatou die Ungleichung

$$\int_E |g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{N\to\infty} |g_N|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{N\to\infty} \int_E |g_N|^p \,\mathrm{d}\mu \leq 1.$$

Also ist $g \in L^p(E)$ und folglich $|g| < \infty$ fast überall in E, d.h., $\sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$ ist für fast alle $x \in E$ eine konvergente Reihe!

Sei nun

$$f(x) := f_{k_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)),$$

falls obige Reihe konvergiert (f.ü.), sonst sei $f(x) := 0$. Es gilt also

$$f_{k_N}(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) \quad \text{fast überall in } E.$$

Außerdem ist fast überall die Abschätzung

$$|f_{k_{N+1}}(x)| \leq |f_{k_1}(x)| + \sum_{j=1}^{N} |f_{k_{j+1}}(x) - f_{k_j}(x)| \leq |f_{k_1}(x)| + |g(x)| =: h(x) \in L^p(E)$$

erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass f_k gegen f in der L^p-Norm konvergiert und somit auch f in $L^p(E)$ liegt. Da (f_k) eine L^p-Cauchy-Folge ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N, so dass

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Dann gilt für $m \geq N$ nach dem Lemma von Fatou

$$\int_E |f - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{j\to\infty} |f_{k_j} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f_m\|_p^p < \varepsilon^p.$$

Also ist $f - f_m \in L^p(E)$. Daraus folgt $f \in L^p(E)$ und $f_m \xrightarrow{L^p} f$, $m \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Sei $(f_k) \subset L^\infty(E)$ eine Cauchy-Folge von Funktionen (Repräsentanten von $[f_k]$). Seien

$$\begin{aligned} N_k &= \{x \in E : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}, \\ N_{km} &= \{x \in E : |f_k(x) - f_m(x)| > \|f_k - f_m\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Dann ist die Menge $N = \bigcup_k N_k \cup \bigcup_{k,m} N_{km}$ eine Nullmenge, und $(f_k|_{E\setminus N})$ ist eine Cauchy-Folge bezüglich der (üblichen) sup-Norm. Dann gibt es eine messbare Funktion $\tilde{f}$ auf $E\setminus N$ mit

$$f_k|_{E\setminus N} \longrightarrow \tilde{f} \quad \text{gleichmäßig in } E\setminus N.$$

Daraus folgt

$$f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{in } E\setminus N \\ 0 & \text{in } N \end{cases}.$$

Die speziellen Aussagen von H. Weyl gelten hier sogar für die ganze Folge (f_k). $\square$

Bemerkung. In Satz 7.7 gilt i.Allg. nicht $f_k \to f$ f.ü. oder $|f_k| \leq h$ f.ü. mit $h \in L^p$.

Beispiel. Sei $E = (0,1)$ und $p = 1$. Außerdem seien

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{2}\,\chi_{(0,1/2)},\ f_2 = \sqrt{2}\,\chi_{(1/2,1)} \\ f_3 &= \sqrt{4}\,\chi_{(0,1/4)}, \dots,\ f_6 = \sqrt{4}\,\chi_{(3/4,1)} \\ &\ \vdots \\ f_{2^n-1} &= \sqrt{2^n}\,\chi_{(0,1/2^n)}, \dots,\ f_{2^{n+1}-2} = \sqrt{2^n}\,\chi_{(1-1/2^n,1)}. \end{aligned}$$

Wegen $\int_E |f_{2^n-1}|\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ usw. folgt

$$f_k \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^1(E).$$

Dagegen gilt

$$\limsup_{k\to\infty} |f_k| = \infty \quad \text{fast überall in } E.$$

Eine Teilfolge im Sinne des Satzes 7.7 wäre zum Beispiel $(f_{2^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition. (1) *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ eine Funktion. Dann heißt*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

der Träger (*support*) *von f.*

(2) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum. Eine Teilmenge* $Y \subset X$ *heißt* dicht *in* X*, falls es zu jedem* $x \in X$ *und* $\varepsilon > 0$ *ein* $y \in Y$ *mit* $\|y - x\| < \varepsilon$ *gibt.*

(3) $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* separabel*, falls* X *eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.*

Hauptsatz 7.8. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und sei* $1 \le p < \infty$*. Dann sind die Mengen (Vektorräume)*

$$S = \{s : \Omega \to \mathbb{R} : s \textit{ ist (messbare) Treppenfunktion mit } \operatorname{supp} s \subset \Omega \textit{ kompakt}\}$$

und sogar

$$C_0^0(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \Omega \textit{ ist kompakt}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$.

Außerdem ist $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, *separabel.*

Bemerkung. In §8 wird sogar gezeigt, dass der Funktionenraum

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, liegt.

Beweis von Satz 7.8. Den Beweis teilen wir in vier Behauptungen auf.

Behauptung 1. *Zu* $f \in L^p(\Omega)$ *und* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $f_1 \in L^p(\Omega)$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} f_1 \subset \Omega$ *und* $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ *(genauer gesagt gibt es ein* $[f_1] \in L^p(\Omega)$ *und einen Vertreter* $f_1 \in [f_1]$ *mit den genannten Eigenschaften).*

Beweis von Beh. 1. Sei

$$E_k = \left\{x \in \Omega : \|x\| \le k \text{ und } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{k}\right\}.$$

Dann ist $E_k \subset \Omega$ kompakt und $E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \nearrow \Omega$. Definieren wir $g_k := f\,\chi_{E_k}$, erhalten wir $\operatorname{supp} g_k \subset E_k$,

$$g_k \longrightarrow f \quad \text{und} \quad |g_k - f|^p \le |f|^p \in L^1(\Omega) \quad \text{punktweise f.ü. in } \Omega.$$

Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert dann

$$\|g_k - f\|_p^p = \int_\Omega |g_k - f|^p \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

■

Behauptung 2. *Zu obigem* f_1 *gibt es ein* $s \in S$ *mit* $\|f_1 - s\|_p < \varepsilon$.

Beweis von Beh. 2. Es reicht $f_1 \ge 0$ zu betrachten. Nach Satz 3.7 existieren messbare Treppenfunktionen s_k mit $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \nearrow f_1$. Also ist $\operatorname{supp} s_k \subset \operatorname{supp} f_1 \subset \Omega$ kompakt. Daraus folgt $s_k \in S$,

$$|s_k - f_1|^p \longrightarrow 0 \quad \text{fast überall}, \quad |s_k - f_1|^p \le |f_1|^p \in L^1(\Omega).$$

Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz liefert wieder die Konvergenz $s_k \to f_1$ in $L^p(\Omega)$. ■

Aus Behauptungen 1. und 2. erhalten wir nun, dass

$$\|f - s_k\|_p \le \|f - f_1\|_p + \|f_1 - s_k\|_p < 2\varepsilon$$

für k genügend groß gilt. Also liegt $S \subset L^p(\Omega)$ dicht.

Zum Beweis der Dichtheit von $C_0^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, reicht es deshalb aus, statt $f \in L^p(\Omega)$ eine charakteristische Funktion χ_E, $E \in \mathcal{M}_n$, mit $\overline{E} \subset \Omega$ kompakt zu betrachten.

Behauptung 3. *Sei $E \in \mathcal{M}_n$, $\overline{E} \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_0^0(\Omega)$ mit $\|g - \chi_E\|_p < \varepsilon$.*

Beweis von Beh. 3. Zu E gibt es nach Hauptsatz 2.8(3) eine abgeschlossene Menge $F \subset E$ (also ist F kompakt) mit $\mu(E \backslash F) < \varepsilon^p$. Daraus folgt

$$\|\chi_E - \chi_F\|_p = \left(\int_{E \backslash F} 1 \right)^{1/p} = \mu(E \backslash F)^{1/p} < \varepsilon.$$

Sei nun $d : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x) = \operatorname{dist}(x, F)$. Dann hat d die Eigenschaften

$$d \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) \quad \text{(Lipschitzstetigkeit)}, \quad d \ge 0,$$

und aus der Kompaktheit von F folgt

$$d(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

Definieren wir $g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$g_k = (1 - kd)_+,$$

erhalten wir die Eigenschaften

$$g_k \in C^0(\Omega), \quad 0 \le g_k \le 1, \quad g_k = 1 \text{ auf } F, \quad g_k(x) = 0 \text{ für } d(x) \ge \frac{1}{k};$$

also ist $g_k \in C_0^0(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ groß. Außerdem gilt

$$g_k \longrightarrow \chi_F \quad \text{punktweise in } \Omega \quad \text{und} \quad |g_k| \le \chi_{U_1(F)} \in L^1(\Omega),$$

wobei $U_1(F) := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, F) \le 1\}$ ist Der Satz von Lebesgue liefert jetzt $g_k \to \chi_F$ in $L^p(\Omega)$. Also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|g_k - \chi_F\|_p < \varepsilon$ und folglich $\|g_k - \chi_E\|_p < 2\varepsilon$. ■

Damit haben wir gezeigt, dass der Raum $C_0^0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Es bleibt nun die folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung 4. Der Raum $L^p(\Omega)$ ist separabel für $1 \le p < \infty$.

Beweis von Beh. 4. Sei $\mathcal{M}'_n(\Omega) = \{E \in \mathcal{M}_n : E \subset \Omega,\ \mu(E) < \infty\}$. Es ist bereits bewiesen, dass die Menge

$$S_1 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} : E_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega),\ a_k \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, ist auch die Menge

$$S_2 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} : E_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega),\ a_k \in \mathbb{Q},\ N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$. Da es zu jedem E_k nach Satz7 2.8 eine offene Menge $U_k \subset \Omega$ mit

$$\mu(U_k \backslash E_k) < \varepsilon^p \quad (\Rightarrow \|\chi_{U_k} - \chi_{E_k}\|_p < \varepsilon)$$

gibt, folgt sogar, dass die Menge

$$S_3 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{U_k} : U_k \in \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ offen},\ a_k \in \mathbb{Q},\ N \in \mathbb{N} \Big\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

Nun gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine abzählbare Teilmenge } \mathcal{V} \subset \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ mit der Eigenschaft:} \\ \text{Zu jedem offenen } U \in \mathcal{M}'_n(\Omega) \text{ und } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } V \in \mathcal{V} \text{ mit} \\ \qquad V \subset U, \quad \mu(U \backslash V) < \varepsilon^p \quad (\Rightarrow \|\chi_U - \chi_V\|_p < \varepsilon). \end{array} \right. \qquad (*)$$

Daraus folgt, dass

$$S_4 = \Big\{ s = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{V_k} : V_k \in \mathcal{V},\ a_k \in \mathbb{Q},\ N \in \mathbb{N} \Big\}$$

eine *abzählbare*, dichte Teilmenge von $L^p(\Omega)$ ist.

Es bleibt nun die Existenz der Menge $\mathcal{V}$ mit der oben genannten Eigenschaft $(*)$ zu zeigen. Seien

$$\mathcal{V}' = \Big\{ V \text{ ist halboffenes dyadisches Interval in } \Omega, \text{ d.h.,} \\ V = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j] \subset \Omega \text{ mit } a_j, b_j \in \Big\{ \frac{k}{2^l}; k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N}_0 \Big\} \Big\}$$

und

$$\mathcal{V} = \{V \text{ ist Vereinigung von } \textit{endlich} \text{ vielen paarweise disjunkten } V_j \in \mathcal{V}'\}.$$

Bekanntlich gibt es zu jedem offenen $U \in \mathcal{M}_n'(\Omega)$ eine Folge $(V_j) \subset \mathcal{V}$ mit $V_j \nearrow U$. Also gilt $\mu(U \backslash V_j) \to 0$. Da $\mathcal{V}'$ und folglich $\mathcal{V}$ abzählbar sind, folgt die gewünschte Aussage. ∎

□

Bemerkung. Für $p = \infty$ ist $C_0^0(\Omega)$ *nicht dicht* in $L^\infty(\Omega)$, und $L^\infty(\Omega)$ ist *nicht separabel* (für $\Omega = (0,1)$ betrachte $f_t = \chi_{(0,t)} \in L^\infty(\Omega)$, $t \in (0,1)$).

Korollar 7.9 (Satz von der Stetigkeit im L^p-Mittel)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergieren die Translate $f_\tau \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, definiert durch $f_\tau(x) = f(x+\tau)$, in der L^p-Norm gegen f für $|\tau| \to 0$:*

$$\|f_\tau - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\tau) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \quad \textit{für } |\tau| \to 0.$$

Beweis. Nach der Substitutionsregel (Satz 6.1) gilt $f_\tau \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f_\tau\|_p = \|f\|_p \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ gewählt mit $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_\tau\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - g_\tau\|_p + \|g_\tau - f_\tau\|_p \\ &\leq 2\|f - g\|_p + \|g - g_\tau\|_p \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g - g_\tau\|_p. \end{aligned}$$

Da $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ ist, gibt es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{supp} g \subset K, \quad \operatorname{supp} g_\tau \subset K \text{ für alle } \tau \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |\tau| \leq 1.$$

Wegen der Stetigkeit von g gibt es auch ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(x) - g(x+\tau)| < \frac{\varepsilon/3}{\mu(K)^{1/p}} \quad \text{für alle } x \in K,\ |\tau| < \delta,$$

gilt. Daraus folgt

$$\|g - g_\tau\|_p^p = \int_K |g - g_\tau|^p \, \mathrm{d}\mu < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p, \quad |\tau| < \delta.$$

Zusammenfassend erhalten wir $\|f - f_\tau\|_p < \varepsilon$ für $|\tau| < \delta$. □