Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl.-Math. Hendrik Schäfer
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
16.-18.06.10

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Richtungsableitung)

Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $V(\mathbf{x}) := f(|\mathbf{x}|)$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(i) Bestimmen sie den Gradienten $\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V$ von V für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Geben Sie $\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} V$ nun für $f(x) = \frac{1}{x}$ an.

(iii) Berechnen Sie die Ableitung von V für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ in Richtung $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ im Punkt $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^2 \\ 0 \\ z_0^2 \end{pmatrix}$. Was passiert mit $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$ für $x_0, z_0 \to 0$?

Aufgabe G2 (Extremwertberechnung)

Finden Sie den kleinsten und den größten Wert der Funktion f auf der Menge A.

$$f(x,y) = x + y - 2\sin x \sin y, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq \pi\}.$$

Aufgabe G3 (Hessematrix)

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Widerspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Hausübung

– Abgabe am 23.-25.06.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Richtungsableitung) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = e^{x^2-y^2} - \frac{1}{x} + xy^2.$$

Berechnen Sie im Punkt $M = (1,-1)$ die Richtungsableitung von g in Richtung

(i) von $\mathbf{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ und (ii) des größten Anstieges von g.

Aufgabe H2 (Extremwertberechnung) (7 Punkte)

Gesucht ist das globale Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + \frac{5}{4}y^2 - 2x - 2y$$

auf dem Einheitsquadrat $S = [0,1] \times [0,1]$.
Bestimmen Sie dazu

(a) die lokalen Extrema von f im Inneren von S,

(b) die globalen Extrema von f auf dem Rand von S,

(c) die globalen Extrema von f auf S.

Aufgabe H3 (Hustensaft) (7 Punkte)

Die Wirkung $W(x,t)$ von x ml Hustensaft t Minuten nach deren Einnahme werde durch eine Funktion der Form

$$W(x,t) = cx^2(30-x)t^2e^{-t}$$

beschrieben, wobei c ein positiver Parameter ist.

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom von W der Ordnung 2 im Punkt $(x_0,t_0) = (1,0)$ an.

(ii) Bestimmen Sie die Kombination(en) von Dosis x und Zeit t, bei denen die Wirkung maximal wird.