



8. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ gegeben.

- Berechnen Sie $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ und geben sie den Gradienten an.
- Ist das Bild der Funktion f eine kompakte Menge?
- Wie lautet die Definition von totaler Differenzierbarkeit. Ist f total differenzierbar?
- Geben Sie die Niveaumengen N_1 und N_0 der Funktion f zum Niveau 1 bzw. 0 an.
- Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(0, 0, f(0, 0))^T$ an.

Aufgabe G2 (Gradient)

Zeigen Sie, dass für partiell differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

- $\text{grad}(f_1 + f_2) = \text{grad}(f_1) + \text{grad}(f_2)$
- $\text{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_2 \text{grad}(f_1) + f_1 \text{grad}(f_2)$

Aufgabe G3 (Approximationsfehler)

Sei f die Funktion aus G1. Berechnen Sie mit Hilfe von

$$\text{grad}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{grad}(f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{grad}(f) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

drei Näherungswerte für

$$f \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie exakt und geben Sie an, welche Approximation die beste ist. Warum ergibt dies Sinn?

Hausübung

Aufgabe H1 (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \exp(-x^2) \cos(y)$ gegeben.

- Berechnen Sie $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ und geben sie den Gradienten an.
- Ist das Bild der Funktion f eine kompakte Menge?
- Ist f total differenzierbar?
- Geben Sie die Niveaumengen N_1 und N_0 der Funktion f zum Niveau 1 bzw. 0 an.
- Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(0, \pi, f(0, \pi))^T$ an.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Sei f die Funktion aus H1. Bestimmen Sie mit Hilfe von

$$\text{grad}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Näherungswerte für

$$f(0.5, 0), f(0, \frac{\pi}{2}), f(0, 0).$$

Rechnen Sie exakt. Welche Approximation ist die genaueste?

Aufgabe H3 (5 Punkte)

- (a) Für die Funktion aus H1 gilt $f_{xy} = f_{yx}$. Wie hätten Sie das ohne Rechnung folgern können?
- (b) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn g stetig ist, so ist g überall partiell differenzierbar.