Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl.-Math. Hendrik Schäfer
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
02.-04.06.10

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hauptachsentransformation)

(i) Wie ist eine Quadrik definiert?

(ii) Welche Arten von Kegelschnitten kennen Sie? Und wie sind sie definiert?

(iii) Bestimmen Sie die Hauptachsen der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3} = 0 \right\}.$$

Geben Sie auch die Koordinatentransformation an, die die quadratische Gleichung in Normalform überführt. Von welchem Kurventyp ist Q?

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Aufgabe G2 (Topologie im $\mathbb{R}^n$)

Betrachten Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x) = 1\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 < 1\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \qquad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 < 1\},$$

Skizzieren Sie diese Mengen. Was sind ihre Randpunkte? Entscheiden Sie, ob die Mengen offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

Aufgabe G3 (Abgeschlossene und offene Mengen)

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(i) Das Komplement einer abgeschlossenen Menge des $\mathbb{R}^n$ ist immer offen.

(ii) Abgeschlossene Mengen sind nicht offen.

(iii) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist $A \cup B$ ebenfalls abgeschlossen.

Hausübung

– Abgabe am 09.-11.06.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Hauptachsentransformation) (11 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2+6\sqrt{2} \\ 2+6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 20.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge Q der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

(i) Die Eigenwerte der Matrix A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Bestimmen Sie die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

(ii) Geben Sie die orthogonale Matrix C der Hauptachsentransformation an und transformieren Sie die linearen Terme der Kegelschnittgleichung.

(iii) Geben Sie den Kegelschnitt Q in Hauptachsen-/Normalform an. Welche Längen haben die Halbachsen von Q?

Aufgabe H2 (Topologie im $\mathbb{R}^n$) (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x| < 1,\ |y| < 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x| < 1,\ |y| \leq 1\}$,

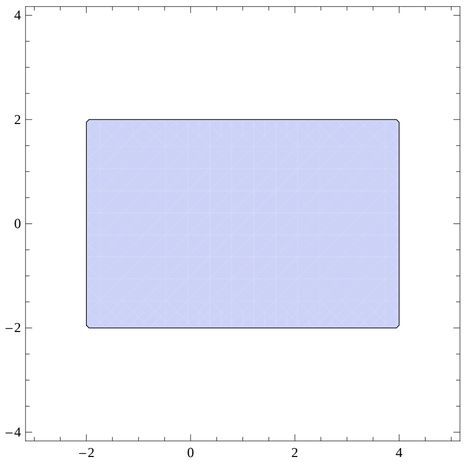
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ |x| < 1,\ |y| < 1,\ z = 1\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ (x+1)^2 + (y-2)^2 < 4\}$,

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ |x| = |y|\}$.

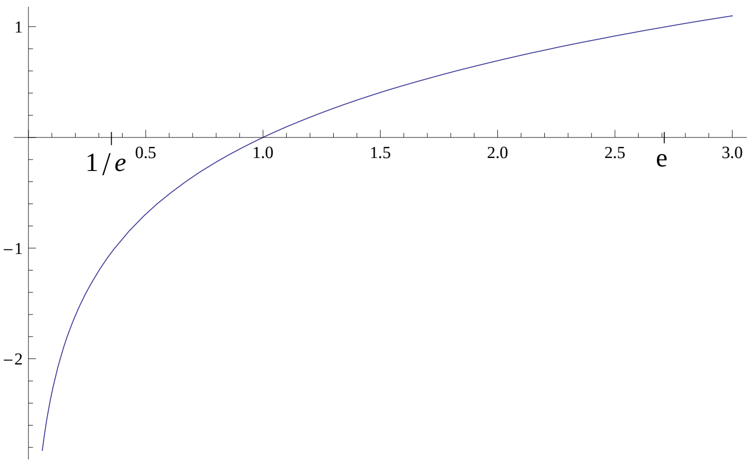
Skizzieren Sie diese Mengen. Was sind ihre Randpunkte? Entscheiden Sie, ob die Mengen offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

Aufgabe H3 (Mengenbeschreibung) (4 Punkte)

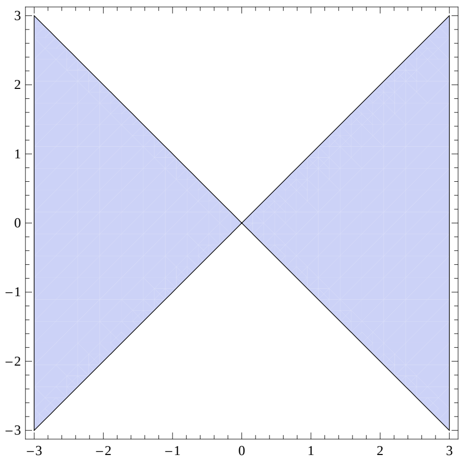
Beschreiben Sie in der Art der zweiten Aufgabe die folgenden abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.



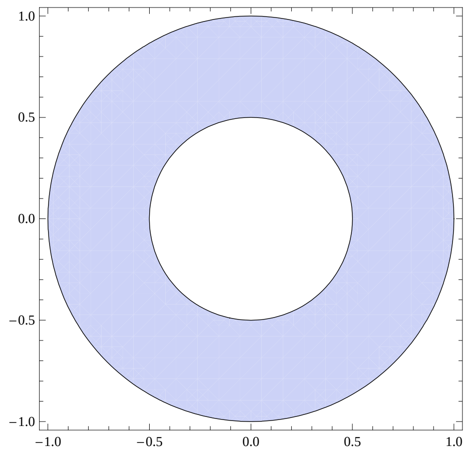
(a)



(b)



(c)



(d)