Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl. Math. Katja Kulas
Dipl. Math. Hendrik Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
26. bis 28.5.2010

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basistransformation)

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung.

(a) Was wird benötigt, wenn man eine Matrixdarstellung von ϕ haben möchte?

(b) Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis e_1, e_2. Suchen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, so dass die Darstellungsmatrix A' von ϕ bezüglich dieser neuen Basis eine Diagonalmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A' aus (b).

Aufgabe G2 (Orthonomierung)

Gegeben seien die linear unabhängigen Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie durch Verwendung des Verfahrens von Gram-Schmidt aus den Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G3 (Quadratische Formen)

Durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Form Q_A mit

$$Q_A(x) = x^T A x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Überführen Sie diese in eine rein quadratische Form.

Aufgabe G4 (Verständnis)

(a) Welches Konzept steckt hinter der Hauptachsentransformation und der Diagonalisierung von Matrizen?

(b) Kann die Hauptachsentransformation einer durch eine Matrix A aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ gegebenen quadratischen Form Q_A zu einer rein quadratischen Form mit

$$\tilde{Q}_A \tilde{x} = i\tilde{x}_1^2 + i\tilde{x}_2^2$$

führen?

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Form

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2.$$

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^3$ an, so dass gilt:

$$Q_A(x) = x^T Ax = Q(x)$$

mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.
(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^3$ derart, dass gilt:

$$S^T AS = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist.
(c) Bestimmen Sie die quadratische Form

$$\tilde{Q}_D(\tilde{x}) = \tilde{x}^T D\tilde{x}$$

mit $\tilde{x} = S^T x$.

Aufgabe H2 (6 Punkte)
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis (bzgl. Standardskalarprodukt) des von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten linearen Teilraums des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)
Seien A und B aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.
(a) Seien A und B orthogonale Matrizen. Ist $A + B$ dann ebenfalls orthogonal?
(b) Sei A symmetrisch, S orthogonal und $D = S^T AS$ eine Diagonalmatrix. Weiter gelte $A^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wie sieht die durch D gegebene quadratische Form aus?