Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl.-Math. Hendrik Schäfer
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2010
19.-21.05.10

# 5. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Eigenwerte und -vektoren)

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(ii) Geben Sie die Eigenräume an.

(iii) Geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

(iv) Entscheiden Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe G2** (Diagonalisierung)

(i) Die Matrix $A$ sei diagonalisierbar, d. h. es gelte $A = SDS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D$ und einer invertierbaren Matrix $S$. Zeigen Sie: In der Matrix $S$ stehen spaltenweise die Eigenvektoren von $A$.

(ii) Schreiben Sie die Matrizen aus Aufgabe G1 (wenn dies möglich ist) als $A = SDS^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D$. Geben Sie $D$ und $S$ explizit an.

**Aufgabe G3** (Verständnisfragen)

Beantworten Sie ohne Rechnung die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten. **Alle Matrizen werden als Abbildungen vom $\mathbb{C}^n$ in den $\mathbb{C}^n$ aufgefasst.**

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. $A$ habe drei paarweise verschiedene Eigenwerte. Ist $A$ diagonalisierbar?

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$. $A$ habe einen komplexen Eigenwert. Ist $A$ diagonalisierbar? Hat $A$ einen reellen Eigenwert?

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. $A$ habe einen doppelten Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 1. Ist $A$ diagonalisierbar?

**Aufgabe G4** (Multiple Choice :-))

Sie haben ein Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gelöst und festgestellt, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Jemand fragt Sie, ob Sie ohne weitere Rechnung einen Eigenwert von $A$ angeben können. Was antworten Sie?

- ☐ "Bei Eigenwerten war ich krank"
- ☐ "Das kriegen wir später"
- ☐ "Ist das klausurrelevant?"
- ☐ Sie geben sofort einen Eigenwert an, nämlich: ...

Begründen Sie Ihre Antwort.

# Hausübung

– Abgabe am 26.-28.05.10 in der Übung –

**Aufgabe H1** (Eigenwerte und -vektoren) (8 Punkte)

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. Hinweis: Ein Eigenwert von $A$ ist 1.

(ii) Geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

(iii) Entscheiden Sie, ob $A$ diagonalisierbar sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe H2** (Diagonalisierung) (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

auf Diagonalisierbarkeit, und geben Sie – falls möglich – eine Diagonalmatrix $D$ und eine invertierbare Matrix $S$ an, für die $A = SDS^{-1}$ gilt.

**Aufgabe H3** (Verständnisfragen) (5 Punkte)

Beantworten Sie ohne Rechnung die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten. **Alle Matrizen werden als Abbildungen vom $\mathbb{C}^n$ in den $\mathbb{C}^n$ aufgefasst.**

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. $A$ habe mindestens einen komplexen Eigenwert. Ist $A$ diagonalisierbar?

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ein Eigenwert sei $\lambda$, und es gibt zwei zu diesem Eigenwert gehörige linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Ist eine beliebige Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$?

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alle Eigenwerte von $A$ seien ungleich 0. Ist das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für beliebiges $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar?