Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl. Math. Katja Kulas
Dipl. Math. Hendrik Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
12. bis 14.5.2010

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Determinanten)
Berechnen Sie (möglichst vorteilhaft) die Determinanten folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 27 & 31 & 7 \\ 4 & 7 & 73 & 16 \\ \pi & e & 0 & 1 \\ 16 & 28 & 292 & 64 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2 (Koordinatenwechsel)
Eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3 durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie die Darstellungsmatrix A' von ϕ bezüglich der Basis $e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + e_3$.

Aufgabe G3 (Rechenregeln)
Seien A und B obere Dreiecksmatrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$.
(a) Zeigen Sie: $det(AB) = det(A)det(B)$.
(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a), dass

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

gilt, falls A invertierbar ist.
(c) Was kann über die Einträge von A gesagt werden, falls A invertierbar ist?
(d) Gilt die Gleichung aus (a) auch für untere Dreiecksmatrizen?

Hausübung

Aufgabe H1 (7 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & \pi & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$ jeweils

- mittels der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten und
- mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Aufgabe H2 (7 Punkte)
Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der kanonischen Basen e_1, e_2, e_3, e_4 und e_1, e_2, e_3 durch die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Was ist die geometrische Wirkung von A? *Hinweis: Was passiert mit der 2-3-Ebene und was mit der 4. Achse.* Berechnen Sie die Darstellungsmatrix A' von ϕ bezüglich der Basen $e_1, e_1 + 2e_2, 2e_2 + e_3, 5e_4$ in $\mathbb{R}^4$ und $e_1, e_1 + 2e_2, 3e_3$ in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H3 (6 Punkte, je 3 Punkte)
(a) Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ invertierbar. Weiter gelte $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$det(A) = det(A^{-1}) = \pm 1$$

gilt.
(b) Sei $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ eine obere Dreiecksmatrix und invertierbar. Es gelte $det(A) = det(A^{-1}) = \pm 1$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ gilt.