Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl.-Math. Hendrik Schäfer
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2010
5.-7.5.10

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Matrixmultiplikation)
Berechne die Matrixprodukte AB, CA, BC und CB für die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2 (Rechenregeln für Matrizen)
Beweise die folgenden Rechenregeln für Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$:

(i) $(A^T)^T = A$;

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$.

Aufgabe G3 (Abbildungsmatrizen)
Wir betrachten die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ z + 3x \end{pmatrix}.$$

(i) Zeige, dass die Abbildung linear ist.

(ii) Bestimme die darstellende Matrix der Abbildung bezüglich

(a) der Standardbasis $\mathcal{B}_0$ des $\mathbb{R}^3$;

(b) der Basis

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe G4 (Inverse einer Matrix)
Berechne die Inversen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

– Abgabe am 12.-14.05.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Multiplikation von Matrizen) (7 Punkte)

(i) Man berechne alle möglichen Produkte $A_i A_j$, $1 \leq i, j \leq 3$ für

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Für Matrizen $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit komplexen Einträgen definiert man analog zur Transponierten einer reellwertigen Matrix die *hermitesche* bzw. *adjungierte* Matrix $A^* = (a_{ij})^*_{ij}$ durch $(a_{ij})^*_{ij} = (\overline{a}_{ji})_{ij}$, d.h. $A^* = \overline{A^T}$.

Beweise für A, $B \in \mathbb{C}^{n,n}$

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Aufgabe H2 (Darstellende Matrizen) (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y - z \\ 2x \\ x + y + z \\ y + z \end{pmatrix}.$$

(i) Zeige, dass die Abbildung linear ist.

(ii) Berechne die darstellende Matrix der Abbildung L bezüglich

(a) der Standardbasis $\mathcal{B}_0$ des $\mathbb{R}^3$;

(b) der Basis

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe H3 (Inverse einer Matrix) (7 Punkte)

(i) Bestimme die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(ii) Berechne die Inverse der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} i & 1 + 2i \\ 1 - i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

und benutze diese, um die Gleichungssysteme

$$(a) \quad C \cdot \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad\qquad (b) \quad C \cdot \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 - 2i \end{pmatrix}$$

für $\overrightarrow{x} \in \mathbb{C}^2$ zu lösen.

Bemerkung: Der Gauss–Algorithmus lässt sich auch für komplexe lineare Gleichungssystem durchführen. Allerdings erhöht sich in diesem Fall der Rechenaufwand durch die komplexen Rechenoperationen.