Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl. Math. Katja Kulas
Dipl. Math. Hendrik Schäfer

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2010
28. bis 30.4.2010

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Lösungsmengen von LGS)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender LGS:

(a)

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{\pi} & 2\sqrt{\pi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3.5 & 3.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G5 (Gauß-Algorithmus)

(a) Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Rang von A. Lösen Sie dann das LGS

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie nennt man ein solches LGS?

(b) Lösen Sie das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G6 (Lösungsmengen im $\mathbb{R}^3$)

Wie können Lösungsmengen von homogenen LGS im $\mathbb{R}^3$ geometrisch aussehen? Geben Sie jeweils ein LGS dafür an.

Aufgabe G7 (Lösbarkeit)
(a) Seien A und B $n \times n$-Matrizen und b ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$. Es sei angenommen, dass das LGS

$$Ax = \ b$$

eine eindeutige Lösung hat. Geben Sie in Abhängigkeit von $Rang(B)$ und b die Dimension des Lösungsraums des LGS

$$(B \cdot A)x = \ b$$

an.
(b) Sei A eine $n \times m$-Matrix und b ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$. Kann das LGS

$$Ax = b$$

eine eindeutig bestimmte Lösung haben, wenn $n < m$ gilt?

Hausübung

Aufgabe H4 (5 P., je 2.5 P.)
(a) Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass für die durch

$$A^{-1} := \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

definierte Matrix A^{-1} immer $A(A^{-1}x) = A^{-1}(Ax) = x$ gilt.
(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe H5 (10 P., je 5 P.)
Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix sowie die Dimension des Lösungsraums. Geben Sie den Lösungsraum an.

Aufgabe H6 (5 P.)
Seien A_1 und A_2 $n \times n$-Matrizen und b_1 und b_2 Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Es sei angenommen, dass die LGS

$$A_1 x = \ b_1,$$
$$A_2 x = \ b_2$$

jeweils eine eindeutige Lösung haben. Hat dann auch das LGS

$$(A_1 + A_2)x = \ b_1 + b_2$$

eine eindeutige Lösung?