Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl. Math. Katja Kulas
Dipl. Math. Hendrik Schäfer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
23. bis 25.6.2010

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangeansatz)

Betrachten Sie zylindrische Dosen. Es bezeichne r den Radius einer Dose und h die Höhe. Die Oberfläche O beträgt dann $O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r,h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche einer Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die gefunden Stelle das gesuchte Minimum ist.

Aufgabe G2 (Optimieren unter Nebenbedingungen)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2)-1) + \exp(\cos(\pi)) - x^2(1024 - 2^{10})$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Extremwerte von f unter der Nebenbedingung

$$3x + 3y = 0,$$

wenn möglich ohne Lagrangeansatz.

Aufgabe G3 (Jacobi-Matrix)

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_g(x,y)$ der Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x,y) = (0, x^2 + y^2)^T.$$

Berechnen Sie eine Näherung für $g(0,0)$ mit Hilfe von $J_g(0,1)$

Hausübung

Aufgabe H1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Lagrange-Funktion Kandidaten für die Extremalwerte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = xy,$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

Aufgabe H2 (7 Punkte)

Bestimmen Sie drei positive Zahlen, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Lagrange-Funktion einen Kandidaten für den Extremwert und begründen Sie dann geometrisch, wieso der gefundene Kandidat ein Minimum ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xyz \\ -xyz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle der folgenden Ausdrücke, die Sinn machen: $(\text{grad } f)(x, y, z)$, $J_f(x, y, z)$, $H_f(x, y, z)$, $(\text{grad } g)(x, y)$, $J_g(x, y)$, $H_g(x, y)$.

(b) Ist die Frage nach lokalen Extrema von f sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.