Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Marco Lübbecke
Dipl.-Math. Hendrik Schäfer
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2010
21.-23.04.10

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für Bauwesen“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basis, lineare Hülle)

(i) Warum können zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ *keine* Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden?

(ii) Gegeben seien $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind.

(b) Liegen die folgenden Vektoren in der linearen Hülle von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$?

$$\mathbf{w}_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{der Nullvektor } \mathbf{w}_3 := \mathbf{0}$$

(c) Welche der Vektoren $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ bilden mit $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Zeigen Sie dazu, dass die entsprechenden Vektoren ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe G2 (Vektorräume)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Welche Teilmengen sind Teilräume mit welcher Dimension? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y = 0 \right\}$ (ii) $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = x^2 - 1 \right\}$

(iii) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x + y = 1 \right\}$

Aufgabe G3 (Taylorpolynom)

Sei $f(x) = \ln(x)$.

(i) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

(ii) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

(iii) Approximieren Sie $f(\frac{3}{2})$ mit den Taylorpolynomen aus (i) und (ii) und schätzen Sie jeweils den Fehler mit Hilfe des Restgliedes ab.

(iv) Welche Approximation ist tatsächlich besser?

Hausübung

– Abgabe am 28.-30.04.10 in der Übung –

Aufgabe H1 (Basis) (7 Punkte)

(i) Bilden die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Überprüfen Sie dabei, ob die Vektoren linear unabhängig sind und den $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

(ii) Stellen Sie, falls möglich, den Vektor $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ dar.

Aufgabe H2 (Vektorräume) (6 Punkte)

Bestimmen Sie für jede Teilmenge T, ob sie ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $T := \{ [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^2 \mid x_3 = 0\}$

(ii) $T := \{ [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1\}$

(iii) $T := \{ [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

Aufgabe H3 (Taylorpolynom) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x} \sin(x)$. Approximieren Sie die Funktion f durch ihr Taylorpolynom mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimmen Sie dabei den Grad des Polynoms so, dass der Fehler auf dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ kleiner als 10^{-8} ist.